

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLII

1955

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XIX


(2° semestre 1955)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1955



Digitized by the Internet Archive
in 2024

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1955 - Luglio-Agosto

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Meccanica. — *Formulazioni di Meccanica astronautica.* Nota (*)
del Socio G. ARTURO CROCCÒ.

Questa Nota svolge alcune formulazioni di Meccanica astronautica connesse col singolare fenomeno del passaggio apparente della Terra sul Sole, in una escursione Terra-Marte, da me segnalato alla Classe in una Nota preliminare ⁽¹⁾.

A questo scopo suppongo anzitutto che la Tecnica sia in grado di realizzare un *satellite artificiale* della Terra, mediante endoreattori a combustione chimica; e che in un secondo tempo, dopo averlo opportunamente rifornito, sia altresì in grado di accelerarlo ulteriormente sino ad ottenere la *evasione dalla gravità* terrestre.

Più precisamente suppongo che il missile sia stato lanciato con modalità che a suo tempo preciserò, a tale distanza dalla Terra da poterne considerare l'attrazione residua praticamente trascurabile di fronte a quella del Sole; per esempio la *centesima parte*. Poiché l'attrazione della Terra varia in ragione inversa del quadrato della distanza, espressa in raggi terrestri, mentre l'attrazione del Sole su una massa che si muova per ipotesi lungo l'orbita terrestre risulta di 1 : 1660 di quella che esercita la Terra a livello del mare, per ottenere il suddetto rapporto di 1 : 100 si dovrà avere, come rapporto delle distanze $(r/R)^2 = 100 \times 1660$; cioè $r \cong 407$ volte il raggio

(*) Presentata nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) Questi « Rendiconti », *Passaggio apparente della Terra sul Sole in una escursione Terra-Marte*, marzo 1955.

terrestre, R. A questa distanza si potrà dunque supporre in prima approssimazione che il missile sia soggetto unicamente alla attrazione del Sole e che quindi il suo moto sia trattabile con l'algoritmo delle forze centrali. Si riterrà, in particolare, che esso si troverà ancora sensibilmente sull'orbita terrestre; ma con una velocità propria, V_0 , superiore a quella della Terra. Sia pertanto determinata, come appresso dirò, questa velocità, V_0 , in grandezza e direzione e tracciata nella fig. 1; che considera l'orbita ellittica del missile in partenza dal punto P_0 a distanza $P_0S = s_0$ dal Sole, indipendentemente dalla posizione della Terra che lo ha lanciato. I due vettori s_0 e V_0 determinano il *piano dell'orbita* ed il loro prodotto vettoriale ne determinano la *costante areale*.

Tracciata da P_0 la normale n_0 al raggio s_0 , potremo considerarla come *orizzonte* solare di partenza, mentre s_0 potrà considerarsi come *verticale* di partenza. Riferendo ad s_0 l'obliquità ψ di V_0 , la costante areale, \hat{c} , risulterà allora

$$2 \hat{c} = V_0 s_0 \cos \psi;$$

ed il parametro p della orbita stessa; nonché la sua eccentricità e ; conterranno entrambi esplicitamente l'angolo di obliquità ψ .

Se invece passiamo a formulare il semiasse maggiore ⁽²⁾, a , vedremo scomparire del tutto il parametro ψ dalla espressione di a ; ottenendo:

$$(1) \quad \frac{1}{a} = \frac{1-e^2}{p} = \frac{2}{s_0} - \frac{V_0^2}{\bar{\mu}},$$

classica formula della meccanica celeste, dove $\bar{\mu}$ rappresenta la costante della gravitazione solare, pari a $132,6 \cdot 10^9 \text{ km}^3/\text{sec}^2$; e che qui connette scalarmente a e V_0 in funzione del solo s_0 . Il valore numerico di a è quindi un *invariante* rispetto alla obliquità, ψ , di V_0 .

Ci varremo di questa considerazione per delineare la *geometria orbitale* di un mobile planetario, così determinato dai tre parametri V_0 , s_0 , ψ . Ci basterà tener conto che la tangente all'orbita e la sua normale in un punto qualsiasi dimezzano gli angoli dei due raggi focali di quel punto, per tracciare il *triangolo focale* SP_0S_1 ; dove l'angolo in P_0 è 2ψ ed il lato P_0S_1 è $m = 2a - s_0$; essendo $2a$ determinato, nel modo anzidetto, dalla (1).

Il terzo lato SS_1 del triangolo focale, dimezzato dal centro C dell'orbita, segna la direzione dell'asse maggiore PCA e risulta ruotato dell'angolo φ , a partire dal raggio vettore s_0 . Porremo $SS_1 = 2c$; dove c determina l'eccentricità $e = c/a$ dell'ellisse e quindi fornisce, dal triangolo rettangolo CBD, dove $CD = a$, il semiasse minore b .

Risulta così determinata la geometria della traiettoria in dimensioni ed orientamento.

(2) M. J. KOOY e W. HUYTENBOGAART, *Balistic of the future*, p. 146 (1946); G. ARMELLINI, *I fondamenti scientifici dell'Astronomia*, p. 120 (1947).

Analiticamente proiettando il triangolo focale sull'asse P_oSA_o , si ottengono le due relazioni

$$(2) \quad 2c^2 = 2a^2 - s_o(2a - s_o)(1 + \cos 2\psi);$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{(2a - s_o) \sin 2\psi}{(2a - s_o) \cos 2\psi - s_o};$$

che precisano numericamente i due elementi della orbita c e φ in funzione dei dati di lancio s_o , a e ψ .

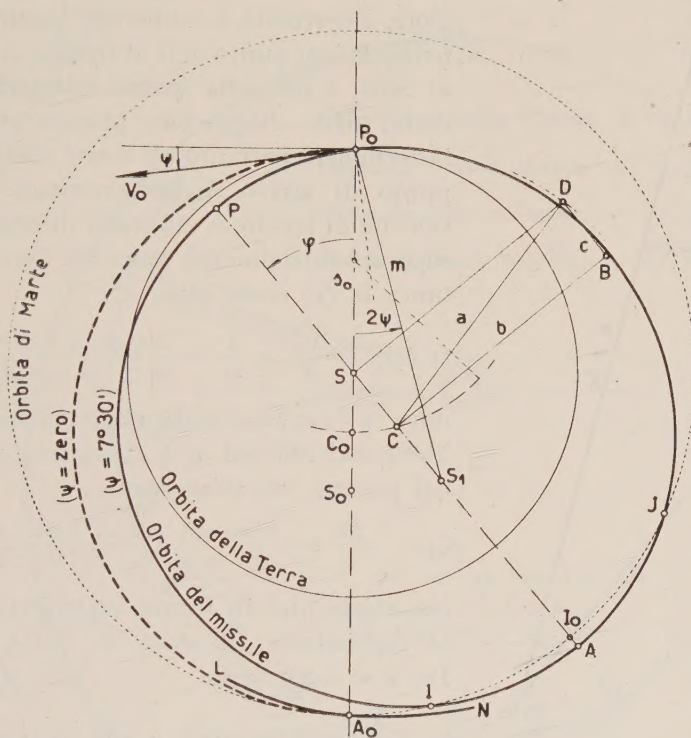


Fig. 1.

Per $\psi = 0$, si ha $\varphi = 0$, e $c = c_o = a - s_o$.

Per mettere in evidenza l'orientamento φ dell'asse maggiore provocato da una obliquità ψ diversa da zero, la fig. 1 presenta il suggestivo caso schematico nel quale entrambe le orbite, di Marte e della Terra, siano considerate come cerchi concentrici rispetto al Sole; nel medio rapporto radiale $m : s_o = 1,52$.

Dopo aver segnato i valori $P_oS = s_o$; $SC_o = c_o$; $SA_o = m$; $P_oA_o = 2a$, corrispondenti a $\psi = \text{zero}$; si è tracciata la traiettoria del missile P_oPA per $\psi = 7^\circ 30'$; collo stesso valore $2a$ del caso $\psi = 0$. Si rileva una *deviazione* dell'asse maggiore, $\varphi = 40^\circ$, ed un notevole *scorrimento*, $c - c_o$, rispetto al Sole: per modo che l'afelio A viene ora a cadere fuori dell'orbita circolare di Marte, e questa risulta tagliata dalla traiettoria del missile in due

punti I ed J; mentre nel caso $\psi = 0$ l'afelio A_0 costituiva punto di tangenza fra le due curve. Si noti poi, pro memoria, che col variare dell'angolo ψ , il centro C descrive una circonferenza, $C_0 C$, attorno al punto di mezzo tra P_0 ed S , segnato senza lettera indicativa.

Mi riservo di illustrare in una prossima Nota alcuni importanti problemi astronautici che queste considerazioni di *geometria orbitale* consentono di affrontare.

Qui mi limiterò al caso di una traiettoria di missile predisposta per un determinato valore $2a$ del suo asse maggiore, e destinata a connettere il punto di partenza P_0 col punto agli antipodi, A_0 , rispetto al Sole; e ciò nella ipotesi schematica, anzi detta, delle due orbite planetarie circolari. Determinerò pertanto gli scarti che risentirà il punto di arrivo A_0 per un errore ΔV sulla velocità di lancio; o $\Delta\psi$ sulla direzione di V_0 ; supposto inizialmente $\psi = \text{zero}$. Scrivendo pertanto la (1) come segue

$$(1 \text{ bis}) \quad \frac{V_0^2}{\mu} = \frac{2}{s_0} - \frac{1}{a} = \frac{a + c_0}{(a - c_0)a} = \frac{1 + e}{s_0};$$

dove $a - c_0 = s_0$ è la media distanza della Terra dal Sole ed $a + c_0$ la media distanza del pianeta, ne ricaveremo:

$$(4) \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{2(a + c_0)}{a - c_0} \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{2 \Delta V}{V_0} \frac{1 + e}{1 - e};$$

che ripresenta, in forma leggermente diversa, la espressione già data da J. G. Porter ⁽³⁾. Per $e = 0.207$ si ha

$$\frac{\Delta a}{a} = 3,04 \cdot 10^{-4} \quad ; \quad \Delta a = 57200 \text{ km}$$

cioè 9,7 diametri di Marte.

Posto ora $\Delta a = 0$ e $\psi \neq 0$, ricaverò anzitutto dalla (2), sostituendo a $\cos 2\psi$ l'equivalente espressione $1 - 2 \sin^2 \psi$, la relazione più espressiva;

$$(5) \quad c^2 = c_0^2 + (a - c_0)^2 \sin^2 \psi;$$

che si deduce direttamente dal triangolo focale $P_0 S S_1$ esprimendo il lato $2c$ in funzione degli altri due $P_0 S = s_0 = a - c_0$; ed $a + c_0 = P_0 S_1$; nonché dell'angolo compreso, 2ψ ; (fig. 2).

Posto allora $c = c_0 + \Delta c$ e supponendo trascurabile il Δc^2 di fronte a c_0^2 per piccoli valori dell'errore ψ , la (5) diverrà

$$2c_0 \Delta c = (a - c_0)^2 \sin^2 \psi = (a + c_0)(a - c_0) \sin^2 \psi;$$

(3) Vedi nota successiva a p. 7.

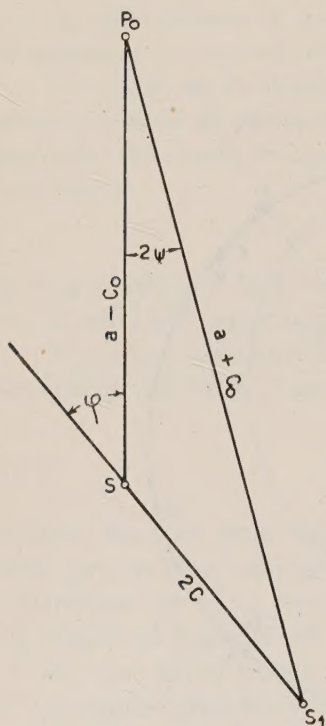


Fig. 2.

e fornirà subito lo *scorrimento* relativo dell'asse maggiore

$$(6) \quad \frac{\Delta c}{a + c_0} = \frac{a - c_0}{2 c_0} \sin^2 \psi = \frac{1 - e}{2 e} \sin^2 \psi.$$

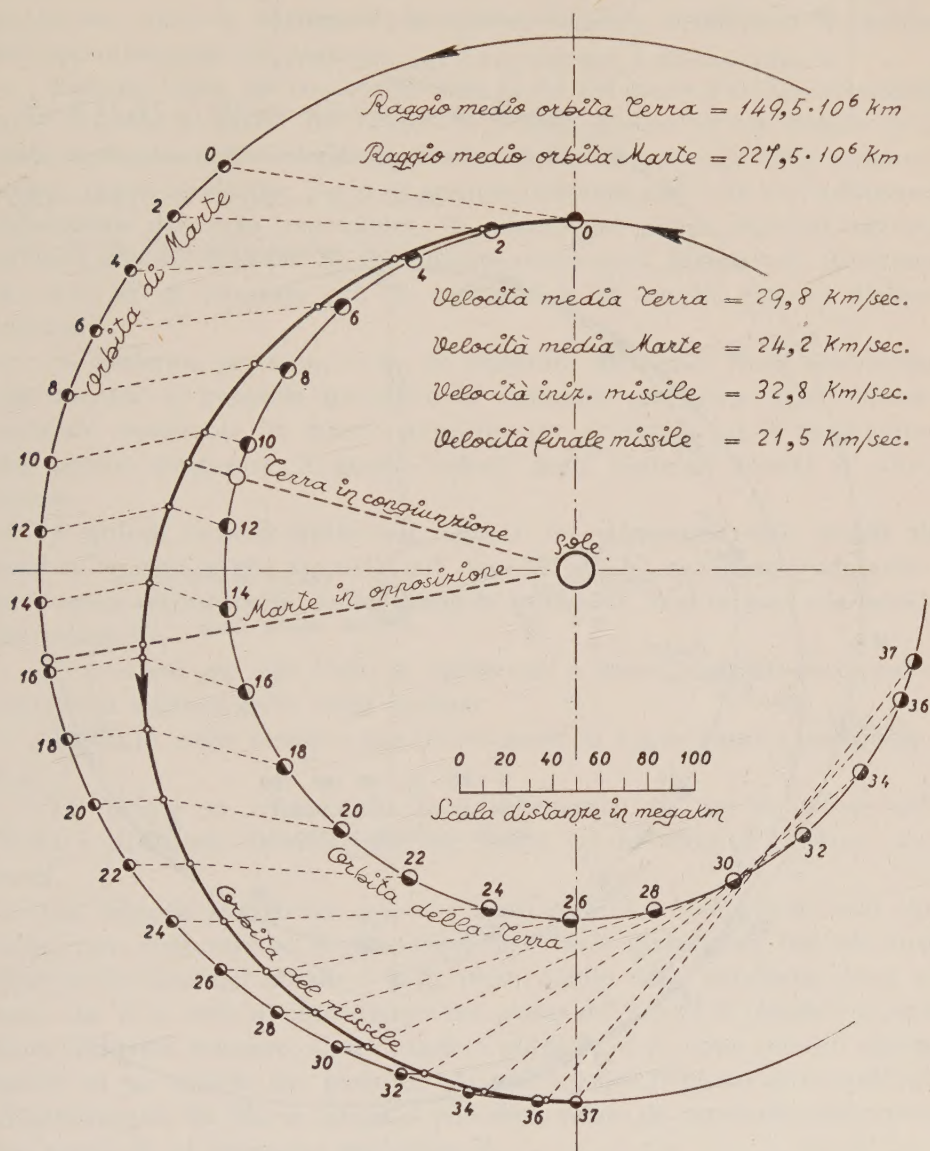


Fig. 3.

Anche la (6) ripresenta, in modo leggermente diverso, la formula già data dal Porter.

Ne risulterà, per $e = 0,207$ e $\psi =$ mezzo grado, uno scorrimento relativo dell'asse maggiore pari a circa $76 \cdot 10^{-6}$; che corrisponde, colle assunzioni numeriche indicate nella fig. 3, ad un errore di oltre *undici* raggi

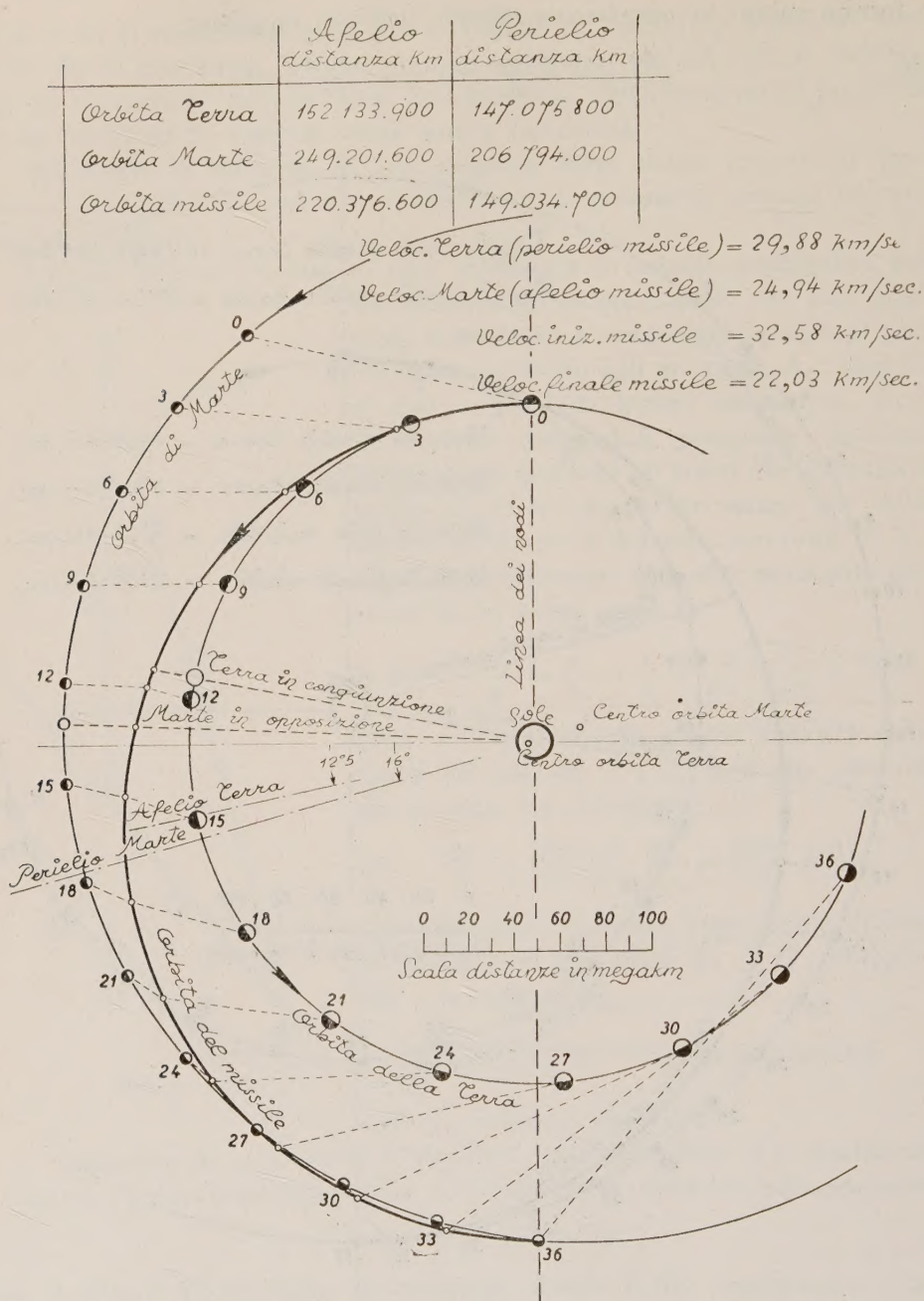


Fig. 4.

marziani. Più notevole risulta lo scorrimento *tangenziale* del punto A. La (3) fornirà in proposito, postovi $\cos 2\psi$ eguale ad uno,

$$(7) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{sen} 2\psi}{\cos 2\psi - s_0/(2a - s_0)} \cong \frac{a + c_0}{2c_0} \operatorname{sen} 2\psi;$$

che con i dati precedenti fornisce una angolazione $\varphi = 0,0506$ cioè di circa 3° per $\psi = 30'$; e, tenendo conto dell'enorme braccio ruotante, pari a 227 Mkm, fornisce uno scorrimento tangenziale di 11,6 Mkm. Valutato in tempo, alla velocità residua del missile di 77400 km ora, esso corrisponde a 150 ore circa di anticipo o di ritardo, secondo il tempo di ψ , sull'ora dell'appuntamento col pianeta.

Rimane infine da considerare uno scarto del piano d'arrivo della traiettoria rispetto al piano dell'orbita di Marte dovuto ad un angolo $\xi \neq 0$ nella direzione della velocità rispetto al piano di partenza della traiettoria stessa. Supponendo che $\xi \neq 0$ si verifichi insieme a $\psi \neq 0$; e si adottino le valutazioni del caso precedente, lo scarto del piano d'arrivo risulterà di $\sin \xi$ moltiplicato per lo scorrimento tangenziale dovuto a ψ . Adottando $\psi = \xi = 30'$ si avranno più di 100.000 km di scarto; cioè 17 diametri marziani.

Si conferma pertanto, come ho osservato nella mia Nota preliminare, che mentre è possibile garantire la massima precisione degli elementi *naturali* occorrenti in questo avvenimento artificiale, si è ben lontani dal potere assicurare il giusto valore degli elementi *tecnici* di avviamento.

È quindi indispensabile una *nautica interplanetaria* assai simile alla nautica marina e che consista nel *fare il punto astronomico* durante il percorso e rettificare in conseguenza la posizione, la direzione e la velocità del missile ⁽⁴⁾.

E previsto per ciò l'uso di *effemeridi* o *ebdomadarî* di riscontro; ed una carta nautica della rotta iniziale.

Presento come esempio due illustrazioni di Carta nautica nelle figg. 3 e 4.

La prima si riferisce al caso schematico in cui le orbite della Terra e di Marte sono considerate come cerchi concentrici, con valori medi.

La seconda si riferisce invece al caso reale in cui le orbite sono ellittiche, non concentriche, e non coassiali; e come giacimento dell'asse maggiore dell'orbita del missile è stato preso quello della cosiddetta *linea dei nodi* che è la retta di intersezione del piano dell'orbita di Marte col piano della eclittica terrestre. Così facendo i punti P_0 ed A_0 sono comuni alle due orbite ed un missile che parte da A_0 può seguire il piano della eclittica, allontanandosi da Marte lungo il percorso, sicuro di ritrovarlo esattamente nel punto P_0 al momento dell'arrivo ⁽⁵⁾.

(4) J. G. PORTER, *Navigations without gravity*. « Journal of the British Interplanetary Society », March 1954.

(5) Questo secondo caso è stato ampiamente volgarizzato in « Civiltà delle Macchine » in un mio articolo dal titolo *Anticipazioni della Nautica interplanetaria*. Il lettore potrà consultare il numero di maggio-giugno 1955, che lo contiene, presso la Biblioteca dell'Accademia dei Lincei alla quale è stato fatto omaggio del numero da parte dell'autore all'atto della presentazione della presente Nota.

I dati astronomici assunti per il calcolo sono riportati sulle rispettive tavole: e i dati tecnici di partenza sono supposti *senza errori*.

Infine i calcoli si limitano al viaggio di andata. L'argomento del ritorno formerà oggetto di una Nota ulteriore, connessa con la presente.

Osservo subito che seguendo il piano della ecclittica e traguardando dal missile il centro del Sole si potranno osservare, con opportuni accorgimenti ottici, i singoli astri dello Zodiaco e dedurne le longitudini che forniranno le anomalie vere, ϑ , corrispondenti a tempi t .

Se a questi due elementi si associa la misura del raggio solare corrispondente, dedotto dalla grandezza apparente del Sole, che la moderna elettronica potrà fornire con sufficiente precisione tecnica, si otterranno tutti i parametri dell'orbita percorsa da questi tre elementi ϑ, t, r . Si avrà ad esempio

$$e = \frac{r - s_0}{s_0 - r \cos \vartheta} \quad ; \quad a = \frac{s_0}{1 - e} ;$$

e si potrà dedurre V_0 e ψ dalle (1 bis) e (2).

Passo ora a formulare l'algoritmo del fenomeno del passaggio apparente della Terra sul disco del Sole che viene a corroborare senza misure posizionali il riscontro della traiettoria percorsa (fig. 5).

Premetto che avendo supposto, all'ora zero, il missile alla distanza di 407 raggi terrestri dalla Terra, il raggio vettore del missile precede già in partenza quello della Terra di circa un grado. Del che sarà facile tener conto a suo tempo. Qui porremo per generalità che anche la Terra sia in P_0 ; e che il missile se ne distacchi, precedendola, solo qualche istante dopo (fig. 6).

Ma poiché la sua velocità angolare va poi attenuandosi, avverrà presto che essa risulti eguale a quella della Terra.

È agevole calcolare che ciò avverrà quando sarà soddisfatta per il raggio vettore la equazione

$$(8) \quad r^3 + s_0 \left(\frac{r}{a} - 2 \right) = 0 ;$$

e che per tale valore di r il missile precede ancora di alcuni gradi quello della Terra.

Poi r si allunga sensibilmente fino a raggiungere e superare il valore del semiasse maggiore. Ma già quando si ha $r = a$, e quindi il missile si trova al punto di mezzo della sua semiorbita di andata, è agevole calcolare che le condizioni si sono invertite ed il raggio vettore della Terra precede sensibilmente quello del missile. Ciò risulta dalla valutazione precisa del settore corrispondente, esprimibile da πab ($0,25 - e/2 \pi$) e quindi dal tempo impiegato a percorrerlo e dalla corrispondente anomalia.

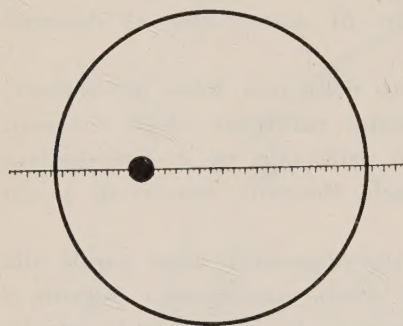


Fig. 5.

Rimane così dimostrata l'esistenza del fenomeno segnalato, che si verifica nei casi considerati, entro il primo quarto dell'orbita.

Ciò posto, per una determinazione del *tempo* del fenomeno (fig. 6), adoterò un valor medio $a_m = (a + b)/2$ ed una eccentricità media $e_m = c/a_m$ per esprimere l'area del settore SP_0M mediante la formulazione, analoga a quella di Keplero, dove indico con V_T la media velocità della Terra,

$$(9) \quad \frac{a_m^2}{s_0^2} (\xi - e_m \sin \xi) = \frac{V_0}{V_T} \vartheta;$$

essendo ϑ l'anomalia vera e ξ un angolo ausiliario tra MC e P_0C , al centro dell'orbita; nella quale formulazione occorre introdurre la relazione

$$(10) \quad \frac{\sin \xi}{\sqrt{1 + e_m^2 - 2e_m \cos \xi}} = \sin \vartheta.$$

La soluzione dell'equazione trascendente (9) fornirà il *tempo* della congiunzione, a metà del disco solare; ed i parametri corrispondenti.

Più indicativa risulterà la valutazione della *durata*, in quanto prescinde da osservazioni posizionali. Se indichiamo con $v_T = V_T/s_0$; $v_M = V/r$ le due corrispondenti velocità, durante il passaggio, dei due raggi vettori, la sua durata sarà funzione delle differenze $v_T - v_M$; che risulterà nello stesso senso del missile. Sarebbe retrograda se v_T fosse minore di v_M .

La fig. 7 considera ora in proporzioni schematiche amplificate, lo spostamento della visuale della Terra dal missile lungo il disco solare. Si considera un tempo infinitesimo, dt , durante il quale la visuale si sposta da $M_1 T_1 S_1$ a $M_2 T_2 S_2$; e quindi si ha

$$\frac{T_1 T_2}{s_0} = v_T dt \quad ; \quad \frac{M_1 M_2}{r} = v_M dt.$$

Cosicché l'angolo al vertice S_2 del triangolo $T_1 S_2 M_1$ che indicheremo con $d\hat{S}_2$ risulta eguale alla differenza $(v_T - v_M) dt$.

Dal triangolo $T_1 S_2 M_1$ deduco altresì che il rapporto tra l'angolo $d\hat{S}_2$ e l'angolo al vertice M_1 , che dirò $d\hat{M}_1$ può assumersi eguale al rapporto tra il lato $M_1 T_1 = r - s_0$ ed il lato $T_1 S_1 = s_0$; sicché si avrà in definitiva:

$$(11) \quad d\hat{S}_2 = (v_T - v_M) dt = \frac{r - s_0}{s_0} d\hat{M}_1$$

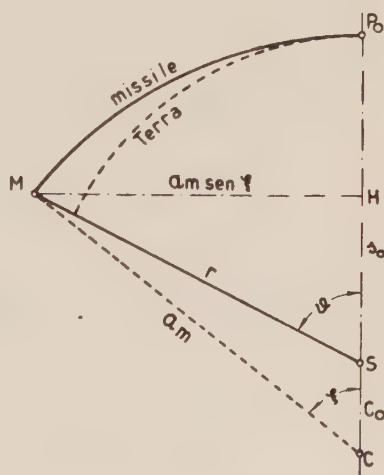


Fig. 6.

dalla quale si ricaverà l'espressione del differenziale dt ; che consente di valutare la totale durata, τ , del fenomeno. Si terranno allora presenti i due

limiti \hat{M}_e ed \hat{M}_u del contatto della Terra col disco della fotosfera, forniti dai valori di \hat{M} ottenuti valutando la grandezza apparente del semidiametro solare, visto dal missile, aumentata della grandezza apparente del semidiametro della Terra, visto dal missile; come è rappresentato in punteggiata nella figura.

Si avrà pertanto

$$(12) \quad \tau = \int_{-\hat{M}_e}^{+\hat{M}_u} \frac{r - s_0}{s_0} \frac{d\hat{M}}{v_T - v_M} .$$

Una durata approssimata si potrà ottenere ponendo i valori medi corrispondenti al passaggio sulla metà del disco solare, valutati attraverso la soluzione della (9) ed assumendo come limite un valore complessivo di \hat{M}_m di circa $29'$. Si otterrà, per $r_m/s_0 = 1,14$; $v_T - v_M = 0,336'/\text{ora}$,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{(r_m - s_0)}{s_0} \frac{\hat{M}_m}{(v_T - v_M)_m} = \\ &= \frac{0,14}{0,336} \times 29 \cong 12 \text{ ore} \end{aligned}$$

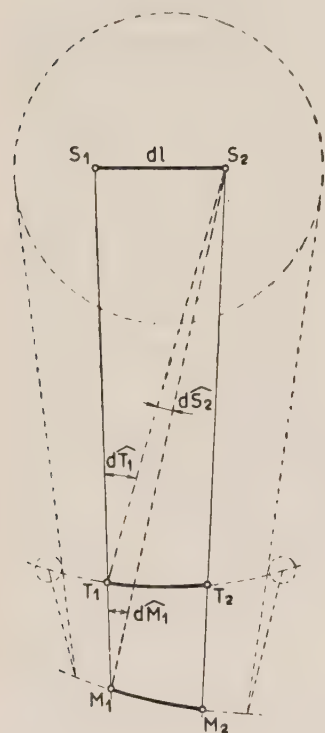


Fig. 7.

che potrà considerarsi come ordine di grandezza della durata del fenomeno nel caso delle due orbite concentriche della fig. 3.

Mi riservo di indicare successivamente alcune modalità dell'osservazione di questo fenomeno e delle correzioni cui esso potrà dar luogo.

Cosmologia. — *Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana.*

Nota II (*) del Corrisp. FRANCESCO ZAGAR.

Teoricamente la prima classe di soluzioni (I) appare incompleta, in quanto essa ammette — come si è visto — soltanto una espansione, non anche una contrazione, come dovrebbe aspettarsi. Questa classe corrisponde cioè a particolari condizioni iniziali che fanno escludere la seconda possibilità.

È necessario perciò ricercare se vi sono ulteriori classi di soluzioni, corrispondenti ad altre condizioni iniziali, che ammettano un quadro più completo di risultati, anche se questi avranno solo valore teorico, poiché per l'applicazione alle condizioni dell'Universo attuale sarebbero sufficienti i casi di espansione.

A tale scopo, ricordando che le (7) sono le relazioni fondamentali, introduciamo la nuova variabile indipendente τ , definita come segue

$$(17) \quad d\tau = \frac{dt}{X}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{X},$$

essendo X una funzione ancora da destinarsi. Avendo finora indicato con un punto le derivate rispetto al tempo t , indicheremo d'ora in avanti con un apice la derivata rispetto a τ ; la seconda delle (7) diventa con ciò

$$(18) \quad \left(\frac{u''}{u} + \frac{v''}{v} + \frac{w''}{w} \right) - \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} \right) \frac{X'}{X} = -K \frac{X^2}{uvw} \quad (K = 4\pi k^2 C).$$

Una seconda classe di soluzioni ha allora le espressioni

$$(II) \quad u = \kappa_1 \operatorname{sen}^{\nu_1} \tau, \quad v = \kappa_2 \operatorname{sen}^{\nu_2} \tau, \quad w = \kappa_3 \operatorname{sen}^{\nu_3} \tau,$$

con $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ e ν_1, ν_2, ν_3 costanti; infatti, avendosi

$$\frac{u'}{u} = \nu_1 \cotg \tau, \quad \frac{u''}{u} = \nu_1 (\nu_1 - 1) \cotg^2 \tau - \nu_1,$$

ed analoghe per v e w , posto per brevità

$$(19) \quad \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = [v], \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = [v^2], \quad \frac{[v^2]}{[v]} = n,$$

se per la funzione X si prende

$$(20) \quad X = h \operatorname{sen}^n \tau, \quad \frac{X'}{X} = n \cotg \tau,$$

la (18) diventa

$$-\frac{[v]}{\operatorname{sen}^2 \tau} = -\frac{Kh^2}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 (\operatorname{sen} \tau)^{[v] - 2n}},$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1955.

la quale è identicamente soddisfatta quando gli esponenti soddisfanno alle due condizioni

$$(21) \quad [v] - 2n = 2, \quad [v] = \frac{Kh^2}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3},$$

ossia infine le (II) formano una soluzione del problema se gli esponenti v_i soddisfanno alle condizioni (s'intende $K \neq 0$)

$$(21') \quad \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \bar{K} \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \frac{1}{2} \bar{K}^2 - \bar{K} \end{cases} \quad \begin{aligned} \bar{K} &= \frac{Kh^2}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}, \\ n &= \frac{1}{2} \bar{K} - 1. \end{aligned}$$

Per maggiori dettagli poniamo anche qui

$$v_i = \frac{1}{3} \bar{K} + \varepsilon_i,$$

nelle quali sarà, per le (21'),

$$(22) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \\ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \frac{1}{6} \bar{K}^2 - \bar{K}, \end{cases}$$

per cui intanto deve essere

$$(23) \quad \bar{K} \geq 6, \quad C \geq \frac{3 \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}{2 \pi k^2 h^2}, \quad n \geq 2,$$

mentre per i singoli ε_i si ha dalle (22) col procedimento già accennato,

$$|\varepsilon_i| < \frac{1}{3} \bar{K},$$

ciò che assicura anche qui che *gli esponenti v_i nelle (II) sono tutti positivi*.

Dalle (17) e (20) abbiamo ancora per il legame tra τ e t in termini finiti

$$(24) \quad t - t_0 = h \int_0^\tau \sin^n \tau \cdot d\tau,$$

ed essendo n per la terza delle (23) maggiore od uguale a 2, τ è certamente crescente con t finché esso rimane compreso tra 0 e π ; vedremo fra poco che τ non può oltrepassare tali limiti.

In base alle (II), essendo

$$\alpha_i = \frac{\dot{u}}{u} = \frac{u'}{u} \frac{d\tau}{dt}, \quad \dots$$

abbiamo allora per le (17) e (20)

$$(25) \quad \alpha_1 = v_1 f(\tau), \quad \alpha_2 = v_2 f(\tau), \quad \alpha_3 = v_3 f(\tau); \quad f(\tau) = \frac{1}{h} \frac{\cos \tau}{\sin^{n+1} \tau},$$

e quindi, sostituendo le v_i nella prima delle (21),

$$(26) \quad f(\tau) = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

La costante h è una costante ausiliaria che non dipende direttamente dalle osservazioni e può essere scelta ad arbitrio o nel modo più conveniente; assumeremo

$$(27) \quad h^2 = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3, \quad \bar{K} = K, \quad f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}} \frac{\cos \tau}{\sin^{n+1} \tau},$$

con che la seconda delle (21) fornisce

$$(28) \quad K = \frac{1}{f} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Se ricordiamo ora che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono i rapporti tra le componenti delle velocità v_1, v_2, v_3 e rispettivamente le tre coordinate x_1, x_2, x_3 , e quindi tre quantità osservabili ad una data epoca, si vede che con la (26), la (28) e le (25) si hanno facilmente per la predetta epoca: il valore della funzione $f(\tau)$, la costante K e i tre esponenti v_1, v_2, v_3 delle (II). Se a queste si associa la prima delle (7)

$$(29) \quad \rho = \frac{K}{4 \pi k^2 \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3} \cdot \frac{1}{\sin^K \tau},$$

e si osserva che per l'ultima delle (27) si ha

$$(30) \quad \frac{f^2}{\rho} = \frac{4 \pi k^2}{K} \cos \tau,$$

si vede che con la conoscenza della densità materiale ρ all'epoca predetta si ha la possibilità di ottenere il valore corrispondente di τ , dopo di che la terza delle (27) fornirà il prodotto $\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3$ ed infine la (24) il valore di $t - t_0$, cioè quell'intervallo di tempo che comunemente è chiamato l'età dell'Universo. Per i coefficienti della soluzione (II) risulta con ciò il solo prodotto $\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3$ per cui potremo assumere

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \sqrt[3]{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3} = \kappa, \quad h^2 = \kappa^3,$$

e quindi

$$(II') \quad u = \kappa \sin^{v_1} \tau, \quad v = \kappa \sin^{v_2} \tau, \quad w = \kappa \sin^{v_3} \tau.$$

Dovendo essere ρ positiva, si vede facilmente che u, v, w devono essere tutte e tre positive (e perciò per $0 < \tau < \pi, \kappa > 0$).

Come si è fatto nel caso della soluzione (I), si ottengono anche qui, in base alle (4), per le coordinate e le velocità di un determinato punto materiale le relazioni analoghe alle (12) e (16)

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{v_1}{\sqrt{\kappa^3}} \frac{\cos \tau}{\sin^{1/2(K)} \tau} \cdot x_1, \quad \dots \\ x_1 = c_1 u, \quad x_2 = c_2 v, \quad x_3 = c_3 w, \\ \dot{x}_1 = c'_1 \frac{\cos \tau}{\sin^{1/2(K) - v_1} \tau}, \quad \dots \quad c'_i = \frac{c_i v_i}{\sqrt{\kappa}}, \end{array} \right.$$

dove le c_i caratterizzano il punto considerato, per cui al variare di τ da 0 a π le distanze aumentano da zero ad un valore massimo $r = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ per poi diminuire nuovamente a zero, mentre le velocità vanno da valori infinitamente grandi positivi (per $\tau = 0$, $t = t_0$, cioè all'inizio dei tempi) a zero e da questo fino a valori negativi infinitamente grandi.

Questo caso ammette dunque tanto una fase di espansione quanto una successiva fase di contrazione dell'Universo. Come già si è visto nel primo caso, *il moto non è stazionario*, inquantoché in uno stesso punto dello spazio la velocità della materia varia con τ e quindi col tempo; e lungo un raggio uscente dall'origine in un determinato istante tutte le velocità crescono proporzionalmente con la distanza.

Quali casi particolari interessanti e semplici della soluzione (II) rispettivamente (II') consideriamo i seguenti:

1° $K = 6$ ($n = 2$); $v_1 = v_2 = v_3 = 2$. È il corrispondente caso isotropo $u = v = w$, già conosciuto, detto anche il caso ellittico, essendo negativa la relativa costante di integrazione. Infatti si ha

$$u = v = w = R = \kappa \operatorname{sen}^2 \tau = \frac{1}{2} \kappa (1 - \cos 2\tau),$$

$$\frac{dt}{d\tau} = X = \kappa^{3/2} \operatorname{sen}^2 \tau, \quad t - t_0 = C (2\tau - \operatorname{sen} 2\tau),$$

che con τ al posto di 2τ è la forma usualmente nota per il caso isotropo. Essendo, per le (23), $K = 6$ un valore limite per questa quantità, si vede anche qui che *il caso isotropo è un caso estremo* e non un caso medio. Avendosi ancora per le (31)

$$\dot{x}_i = c_i \cotg \tau,$$

in questo caso speciale la velocità positiva diminuisce, e quella negativa aumenta proporzionalmente alla $\cotg \tau$, mentre la densità ρ per la (29) decresce e cresce con la 6ª potenza del $\operatorname{sen} \tau$;

2° $K = 8$ ($n = 3$); con le due soluzioni a) $v_1 = 4$, $v_2 = 2$, $v_3 = 2$; e b) $v_1 = 4/3$, $v_2 = 10/3$, $v_3 = 10/3$. Si può dimostrare che si tratta delle sole soluzioni con due v uguali (espansione simmetrica in due direzioni) e con i v razionali; infatti, si hanno due v uguali secondo le (21') quando

$$v_{1,2} = \frac{1}{3} K \pm \frac{1}{6} \sqrt{K^2 - 6K},$$

e il radicale è un quadrato solo per $K = 6$ (caso precedente) e per $K = 8$.

Astrofisica. — *Sulla grande importanza delle radio-onde emesse dal pianeta Giove.* Nota (*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

1. In una Nota precedente (2), ho accennato alla scoperta compiuta da Burke e Franklin (due radio-astronomi della «Carnegie Institution» di Washington) di radio-onde emesse dal pianeta Giove. La Relazione completa su tale fatto non è ancora stata pubblicata (2); ma di essa ho ricevuto notizie, da me riportate nella Nota citata; ho inoltre esaminato un suo riassunto comparso in seguito (3). Come dicono gli stessi Autori, è la prima volta che si annunzia, con precisione di particolari, l'arrivo di radio-onde, da parte di un altro pianeta del sistema solare. Tale annunzio apparisce di grande interesse, e la sua interpretazione può avere estrema importanza, come mostrerò in questa Nota.

Dalle notizie ricevute, ricordo che le radio-onde in parola sono state raccolte mediante una grande antenna del tipo «Mills cross», sintonizzata su 22 megacicli, ossia su $\lambda = 13,5$ m, ed occupante un'area di circa 40 ettari, sita presso Seneca, Md, U.S.A. Le radio-onde furono ricevute per la prima volta, nell'agosto 1954, sulla direzione della costellazione dei «Gemelli». Ma tale direzione è successivamente mutata con tutta regolarità, in guisa da restare sempre fissa sul pianeta Giove, che veniva così ad essere individuato come la sorgente vera della detta emissione. La intensità di ricezione fu giudicata fortissima nei primi giorni di questo anno, 1955. La localizzazione di tale sorgente delle onde è stata possibile grazie alla acuta dirigibilità dell'antenna usata, corrispondente ad uno stretto fascio ellittico, conico, di solo $1^{\circ},6$ e $2^{\circ},4$, di apertura angolare. La ricezione avveniva così, quando Giove si trovava dentro tale fascio, e, in conseguenza del moto diurno di rotazione terrestre, aveva la durata giornaliera, di 6 minuti primi.

Circa la precisazione del valore della lunghezza d'onda rilevata dagli Autori in 13,5 m, è da pensare che si tratti di un'indicazione sommaria, nel senso che ad essa se ne possono aggiungere altre, più deboli e più o meno smorzate, come, del resto, i detti Autori hanno in seguito confermato. Inoltre, risulta dalle fonti citate, che si tratta di brevi, intermittenti scoppi od esplosioni o sprazzi di onde, dovuti a scariche elettriche (random short bursts of static), ai quali viene attribuita la detta λ . È inoltre accennato, come vi sia stato modo di ricevere delle onde da Giove, anche mediante un'antenna semplice, in luogo della «Mills cross». Esse avevano una $\lambda = 10$ m, circa, e certamente superiore a 7,8 m.

Da tali sommarie notizie, si deduce che le onde emesse da Giove possano avere lunghezza dell'ordine di 10–15 m; ma probabilmente ad esse se ne tro-

(*) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1955.

(1) Ved. questi «Rendiconti», vol. XVIII, p. 577, giugno 1955; ved. anche Id. vol. XVII, p. 150, novembre 1954.

(2) Comparirà negli «Atti del 92^{mo} Meeting della Astronomical American Society», che si è tenuto nell'aprile scorso a Princeton, N. J., U.S.A. e nell'«Astronomical Journal».

(3) *Radio notice in Jupiter*, «Sky and Telescope», vol. XIV, p. 324, June 1955.

vano frammiste delle altre, di diversa λ , o di valore indeterminato, perché molto smorzate, più in conformità con la denominazione di scoppii o sprazzi.

È stato anche stabilito da Burke e Franklin che la recezione delle dette onde avviene soltanto un giorno su tre, circa; oppure, come è detto nella seconda delle fonti citate, nove volte su trenta osservazioni. Queste due asserzioni appariscono, in certo modo, equivalenti; ma la prima dà una più precisa specificazione del fatto; e ad essa io mi atterrò.

Tutto ciò è stato constatato nel periodo fra l'agosto 1954 ed il marzo 1955. In tale periodo, le onde sono state più intense, come si è detto, nei primi giorni del 1955. A tal ultimo riguardo, è da rilevare che nell'epoca citata la distanza tra la Terra e Giove è stata la minima possibile, cioè di circa 600 milioni di km; ciò giustifica la maggiore intensità rilevata. Occorrerà attendere il febbraio del 1956, perché il detto massimo si riproduca.

2. Avendo riportato le principali caratteristiche delle osservate radio-onde di Giove, si deve anzitutto spiegare perché avvenga la loro limitazione ad un sol giorno su tre consecutivi. Di tale circostanza gli Autori, che giustamente reputano più importante stabilire dapprima bene i singoli fatti, non danno per ora spiegazione alcuna. Ma ritengo che questa si possa cercare, ammettendo qualche inuniformità nella struttura superficiale del pianeta Giove, come realmente risulta dalle osservazioni ottiche, astronomiche. Si sa, infatti, che tale pianeta, oltre alle striature parallele al suo equatore, presenta delle macchie rossastre, con caratteristiche lentamente variabili col tempo. La più grande, conosciuta sin dal 1878, ha un'estensione di circa 50.000×12.000 km. q., cioè una dimensione lineare massima dell'ordine di $1/10$ di un meridiano del pianeta. Se si ammette che le radio-onde emesse lo siano soltanto dalle località di Giove, corrispondenti a tale macchia, si può intravedere una spiegazione della limitazione ad un solo giorno su tre, della loro recezione. Infatti, sia T il periodo di rotazione diurna della Terra, e t l'analogo di Giove. Per opportuno valore del rapporto T/t , possono avvenire coincidenze a intervalli di tempo eguali, tra due posizioni angolari dei due pianeti, corrispondenti al trovarsi affacciate l'una all'altra, due loro particolari località superficiali. Queste possono essere la stazione «Mills cross» in America e la macchia rossa su Giove. Dicendo m un multiplo intero di T , ed n , uno di t ciò si verificherà soddisfacendo alla relazione:

$$mT = nt; \text{ da cui: } t = \frac{m}{n} T.$$

Ora, per le osservazioni di Burke e Franklin, possiamo mettere al minimo, partendo da un tempo iniziale zero per entrambi i pianeti, $m=3$, corrispondente al periodo di 3 giorni, intercedente fra due osservazioni consecutive delle radio-onde. Ammettiamo che durante questi 3 giorni terrestri, Giove abbia ruotato $n=7$ volte, sul suo asse polare; essendo $T=24^h$, si avrà:

$$t = \frac{3}{7} 24 = 10^h 20^{\min}, \text{ circa.}$$

Questo valore è alquanto superiore al vero, ma vogliamo, dapprima, da ciò prescindere. Può rappresentarsi graficamente tale risultato numerico. Ripor-tiamo i tempi di rotazione dei due pianeti, sulle due rette parallele della figura. Il tempo zero, corrispondente ai due punti superficiali di essi, affacciati, suddetti, siano rispettivamente indicati in A ed a. Per la Terra,

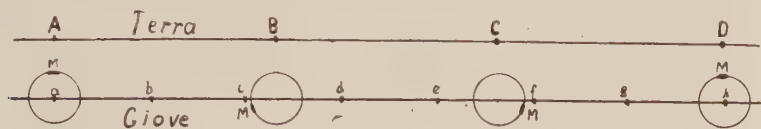


Fig. I.

i tratti $AB = BC = CD$, indicano il periodo $T = 24^h$. Per Giove, i tratti $ab = bc \dots = gh$, indicano quello ammesso più sopra. Il ciclo AD e l'altro ah , corrispondenti a tempi uguali, si suppongono ripetersi indefinitivamente, sui prolungamenti delle due rette. Si ammette, inoltre, che la stazione «Mills cross» sia affacciata alla macchia rossa di Giove, nelle posizioni Aa , Dh della figura, e seguenti. La distanza fra le due rette, piccola in figura, corrisponde a quella fra i due pianeti, nell'epoca delle osservazioni. Sulla retta che si riferisce a Giove i quattro cerchi indicano la periferia equatoriale del pianeta, nelle posizioni angolari, corrispondenti alle posizioni angolari (tutte eguali) della Terra. Ma le posizioni di Giove corrispondenti a quelle B , C , della Terra, sono angularmente diverse: il trattino più grosso indicato sulla periferia dei cerchi corrispondenti, si riferisce alla posizione della macchia rossa, in ciascun caso. Per cui, questa è visibile sulla Terra, nelle sole posizioni A e D ; per le B e C , la stessa macchia si trova sul limite, verso la Terra, dell'emisfero di Giove ad essa opposto; la macchia risulta così, invisibile o quasi. Ciò si verifica, perché essa, pur avendo notevole dimensione massima (50.000 km), è solo dell'ordine di $1/10$ dell'equatore di Giove.

Si osserva ora che, come si è detto, per poter accettare l'interpretazione da me data alla limitazione ad un giorno su tre, della recezione delle onde, occorrerebbe che, nei giorni in cui la recezione non avviene, la macchia resti invisibile. Realmente, non ho elementi per affermare, in linea di fatto, ciò. Sarà compito degli astronomi-ottici verificare l'accordo tra la mia previsione, concernente le osservazioni dei radio-astronomi. Ma anche se essa fosse inesatta, si potrebbe ammettere che la sorgente delle radio-onde sia situata su Giove in altra località, all'infuori della macchia rossa, non rilevabile con osservazioni ottiche.

Le precedenti considerazioni hanno però carattere approssimativo, avendo Giove un periodo di rotazione propria, alquanto inferiore di quello ammesso, di $10^h 20^{min}$. Esso è realmente di $9^h 50^{min}$. È facile comprendere che in conseguenza di ciò, la periodicità regolare di recezione delle onde, di un giorno su tre, ammessa, non si verifichi esattamente. Realmente è così, come dichiarano Burke e Franklin; avvengono infatti, 9 recezioni in 30 giorni, o rotazioni complete della Terra.

3. Le radio-onde emesse da Giove, così spiegate nella loro limitazione temporale, meritano ulteriore esame. Esse sono state paragonate a quelle corrispondenti ai temporali terrestri, pur supponendole di intensità molto maggiore. Ma ho già rilevato, come tale raffronto non abbia plausibili basi, perché, anzitutto, le atmosfere di Giove e della Terra hanno strutture diversissime, tanto da non lasciar affermare l'analogia, anche solo qualitativa tra le loro agitazioni e relative conseguenze. Non si hanno inoltre elementi, per stabilire come gli eventuali cambiamenti di stato nell'atmosfera di Giove (ammoniaca, passante dallo stato liquido al gassoso, o viceversa) possano dar risultati analoghi a quelli che sulla Terra avvengono per l'acqua, che mancherebbe del tutto su Giove. Ed, in considerazioni del genere, non va dimenticata la diversità della costante solare (per Giove, $1/27$ di quella terrestre), che sulla Terra rappresenta la causa prima di temporali.

Ciò posto, è opportuno indagare, quali possano essere, su Giove, le possibili cause della formazione di radio-onde, di corta lunghezza, simili a quelle che, nella moderna tecnica, si chiamano onde corte. Intanto, è da osservare, che queste mancano del tutto fra quelle generate nei temporali terrestri. In questi, alle scariche atmosferiche, non è possibile assegnare una particolare lunghezza d'onda, perché molto smorzate. Se, ad esse fossero mescolate delle particolari onde corte, (irrilevabili per la perturbazione data dalle scariche principali), dovrebbe essere possibile poterle constatare a distanza, per le riflessioni della ionosfera; e ciò non avviene. Né quel sussurro continuo che si nota sovente nella radio, chiamato perturbazione atmosferica, può venire attribuito ad onde corte, perché esso non è mai sintonizzabile con una particolare frequenza; esso produce, inoltre, minore danno nelle recezioni ad alta frequenza, e nella televisione.

Tutto ciò induce a pensare, che la recezione di radio-onde di breve lunghezza, provenienti da Giove, debba avere altra causa, all'infuori delle sue agitazioni atmosferiche. Ora, quelle usate dai nostri laboratori, sono sempre originate dalla presenza di masse conduttrici metalliche, nelle quali le cariche elettriche possono entrare in oscillazione, più o meno smorzata. Se, in Giove, si verificano oscillazioni elettriche, di tal natura, la presenza di masse metalliche conduttrici appare del tutto necessaria. Tali masse, di qualunque specie esse sieno, non possono restare sospese nell'atmosfera gioviana. Si può, al più, ammettere che esse vengano lanciate, in seguito a continua eruzione dall'interno del pianeta, nella sua atmosfera; e, dopo aver raggiunto una certa altezza, ricadano in basso, richiamate dalla locale forza di gravità che è due volte e mezza superiore a quella della Terra.

Seguendo simile concezione, le radio-onde dovrebbero esser dovute a scariche tra tali masse metalliche, preventivamente elettrizzate, ed in continua agitazione meccanica, dovuta alle condizioni interne del pianeta, che occorre possibilmente precisare.

4. A tal fine, va richiamata l'ipotesi cosmogonica da me formulata e sviluppata nelle Note precedenti citate. Feci vedere, come si debba ammet-

tere, in conseguenza di essa, che la temperatura superficiale di Giove, sia dell'ordine di 300°C . È necessario perciò, supporre ancora, che Giove abbia un notevole gradiente termico interno, analogamente a quanto avviene nella Terra. Così, la temperatura andrebbe crescendo gradatamente dalla superficie verso il centro del pianeta, dove può raggiungere un valore imprevedibile, ma che può forse ritenersi compreso fra 100.000 ed 1.000.000 di $^{\circ}\text{C}$. Viene così a cadere l'ammissione degli astronomi, di un enorme strato di ghiaccio, sotto l'atmosfera di Giove. Risulta perciò che questo debba essere costituito nell'interno del pianeta, da materia allo stato fluido o gassoso sotto alta pressione; e, fra tale massa e la superiore atmosfera, può esistere uno strato solido, di un certo spessore, forse metallico, almeno in parte, ed a temperatura alquanto superiore ai 300°C dell'alta atmosfera. Circa la natura del metallo, si può ammettere che si debba trattare di ferro, essendo questo il metallo più abbondante in natura: ciò è provato dalla costituzione della Terra, e delle meteoriti che vi cadono sopra. Tutte le precedenti ipotesi, oltre che presentare nel loro insieme carattere di attendibilità, sono d'accordo con l'osservazione della densità media, relativamente piccola, di Giove.

Stabilità, nel modo ora indicato, quale debba essere, con ogni probabilità, la costituzione interna di Giove, e tenendo conto della continua produzione interna di calore, voluta dalla mia ipotesi cosmogonica si comprende come venga confermata la ipotesi delle eruzioni continue, prevista al fine di spiegare la formazione di radio-onde; il materiale eruttato sarebbe costituito da blocchi di ferro solido. La causa della già detta elettrizzazione di tali blocchi, va ricercata nella complessa trasformazione che la materia subisce, nel portarsi dall'interno all'esterno del pianeta. Essa è sottoposta ad un ciclo, che possiamo definire *meccano-termo-elettrico*, che la porta, appena fuori dalla parte solida, ad un potenziale elettrico diverso da quello della crosta. Sicché, ricadendovi, darebbe luogo alle scariche, origine delle radio-onde.

È inoltre da ammettere che i blocchi di ferro eruttati abbiano una certa dimensione lineare, che sia dell'ordine di qualche metro, al fine di corrispondere ad $1/4$ della lunghezza media delle radio-onde osservate. Ciò corrisponde ad un volume di una decina di m. c. ed a una massa dell'ordine di molte tonnellate.

Ed infine, la eruzione di simili blocchi di ferro deve avvenire principalmente, nella località della grande macchia rossa. La colorazione di questa può corrispondere alle eruzioni stesse, che lascerebbero diffondere nell'atmosfera del pulviscolo, costituito da un composto di ferro, come un suo ossido od altro.

Come si è detto, la limitazione nel tempo dell'osservazione delle radio-onde, è con relativa precisione, determinata dalle fatte considerazioni sulla grandezza della macchia rossa e dai valori dei periodi di rotazione di Giove e della Terra. Tutto ciò rappresenta una inaspettata conferma, dell'attendibilità dell'ipotesi cosmogonica avanzata da me, già da molti anni.

5. Quanto è stato esposto sinora, si riferisce al pianeta Giove, che, a causa della sua grandezza, dà una verifica di fatto, delle ipotesi che sono state formulate. Non sembra possibile che gli altri pianeti, compresi la Terra, essendo in maggioranza molto più piccoli, possano dar luogo a dei fenomeni analoghi, od almeno della stessa entità. Tuttavia, si potrà sospettare che Saturno (la di cui massa è $1/3$ di quella di Giove) possa emettere delle radio-onde, sia pure più deboli di quelle già discusse. La « Carnegie Institution », senza conoscere le mie ipotesi, ha anche avuto una simile idea, e ne sta cercando una pratica verifica.

6. Ad ulteriore commento di tutte le precedenti considerazioni sul pianeta Giove, concernenti la sua costituzione e le sue radio-onde, si può aggiungere come una più convincente verifica di esse potrebbe aversi, qualora si avesse una qualche fiducia sull'attendibilità di una ardita ed assai problematica, futura astronautica. Ma, al riguardo, occorre premettere come appaia ben strano che, oggi, si dia credito a previsioni, di successi in tale campo, le quali, si può dire, sono seguite con grande curiosità ed interesse, da tutto il mondo. E ciò avviene mentre i risultati pratici, sinora ottenuti, siano assai scarsi, o, direi meglio, manchino del tutto. Infatti, l'esser riusciti a mandare a qualche centinaio di km di altezza speciali razzi, non può autorizzarci ad ammettere la possibilità di superare, sia pure in un lontanissimo futuro, distanze mille volte superiori, come nel caso della Luna, e molto, molto di più, in quello degli altri pianeti. E ciò è tanto più vero, in quanto le future astronavi dovrebbero garantire la vita ed il ritorno, degli osservatori.

Se le precedenti difficoltà, che oggi sembrano insuperabili, non si avessero, potrebbe pensarsi alla possibilità di portarsi nelle vicinanze di Giove (qualche migliaio di km); e non mai di potervi discendere, principalmente in causa dei gas velenosi che lo circondano. Una conquista del genere sarebbe però assai utile alla nostra conoscenza, in quanto ci permetterebbe di esaminare meglio la struttura superficiale del pianeta, la sua temperatura esterna e le radio-onde emesse. Per realizzare propositi del genere, non si possono far previsioni sul cammino da seguire, dipendendo esso dalle velocità raggiungibili, da una ipotetica astronave. D'altra parte, occorrerebbe fissare un limite minimo, inferiore, della velocità stessa, che dovrebbe consentire una durata di viaggio non superiore ad uno o due anni. Ed anche in tal caso, la velocità necessaria per raggiungere Giove, dovrebbe essere dello stesso ordine di quella della Terra intorno al Sole. Avendo già in partenza, l'astronave, la stessa velocità della Terra, la sua traiettoria non potrà essere rettilinea, ma curva o spiraliforme.

7. Per terminare queste ipotetiche considerazioni, che presentano carattere di grande attendibilità, si rileva la estrema importanza dell'argomento trattato. Esso si riferisce ad una nuova interpretazione di uno dei più importanti fenomeni naturali: il calore e la luminosità degli astri. Tale fenomeno costituisce, ovviamente, un necessario fattore della nostra vita.

Fisiologia. — *Variazione del tempo nervoso totale del riflesso patellare nell'uomo durante ipossia* ^(*). Nota di TORQUATO GUALTIEROTTI e RODOLFO MARGARIA, presentata ^(**) dal Socio R. MARGARIA.

In una Nota precedente ⁽¹⁾ sono state descritte una tecnica per lo studio del riflesso patellare nell'uomo e le caratteristiche delle risposte riflesse così registrate.

Con lo stesso metodo è stato studiato l'effetto dell'ipossia sui riflessi spinali dell'uomo. L'ipossia veniva ottenuta mediante la comune tecnica della ri-respirazione in uno spirometro della capacità di circa l 16 e la percentuale d'ossigeno della miscela nello spirometro era controllata continuamente con un ossimetro di Pauling.

I risultati qui riferiti riguardano ricerche eseguite su 10 soggetti, studenti di 20 anni, scelti a caso. I principali risultati ottenuti sono i seguenti:

a) il tempo riflesso lordo, cioè l'intervallo tra la percussione sul tendine e l'inizio della risposta muscolare elettrica a livello delle placche motrici, diminuisce significativamente;

b) la risposta elettrica muscolare aumenta generalmente di ampiezza e diventa più costante.

Il diagramma della figura 1 rappresenta una risposta tipica all'ipossia in persona assuefatta alla routine sperimentale. È riportato nella stessa figura un esperimento di controllo, che illustra cioè l'andamento del tempo riflesso lordo nello stesso soggetto nelle stesse condizioni sperimentali, ma con miscela respiratoria mantenuta a tasso costante di ossigeno al valore dell'aria atmosferica. Come si vede, tra il 16 e il 15 % di ossigeno la variabilità del tempo riflesso lordo aumenta considerevolmente rispetto al normale. Sotto al 15 % di ossigeno il tempo riflesso lordo si stabilizza ad un valore significativamente più basso: nel caso dimostrato nella figura il tempo riflesso lordo scende da msec 17 a msec 14,5. La deviazione standard che, come si vede, era notevolmente aumentata quando la percentuale di ossigeno aveva raggiunto circa il 15 %, si porta di nuovo sui valori normali.

Al ritorno subitaneo alla concentrazione atmosferica dell'O₂ (min 28 del grafico della fig. 1) si ha un effetto di rimbalzo con un aumento del tempo riflesso lordo: questo rimbalzo, per quanto lieve, appare significativo statisticamente.

È importante rilevare a questo punto che queste variazioni nel tempo riflesso lordo appaiono tanto più particolarmente significative in quanto

(*) Dal Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) T. GUALTIEROTTI e R. MARGARIA, « Rendic. Accad. Naz. Lincei », 18, fasc. 1, 16-19 (1955).

le variazioni normali nella stessa persona sono di piccola entità e almeno per il 50 % imputabili ad errore strumentale. Infatti la deviazione standard normale è in media $\pm 0,5$ msec, mentre l'errore strumentale accertato è $\pm 0,25$ msec.

Durante l'esecuzione degli esperimenti sull'ipossia è importante tener conto dei fattori psicologici: se l'individuo non è stato abituato a respirare

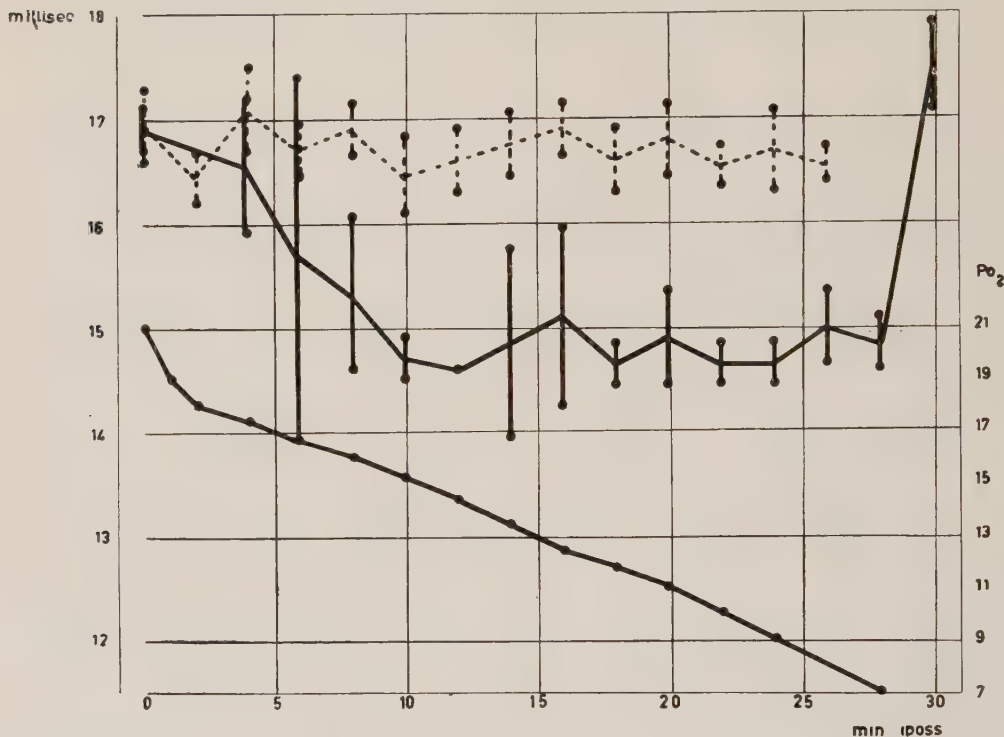


Fig. 1.

Sull'ordinata a sinistra: tempo riflesso in millisecondi.

Sull'ordinata a destra: percentuale dell'ossigeno nell'aria inspirata.

Sull'ascissa: durata dell'ipossia in minuti.

Prima curva in alto, tratteggiata: variazione del tempo nervoso totale a pressione parziale di ossigeno uguale a quella atmosferica.

Prima curva in alto, a tratto continuo: variazione del tempo riflesso totale durante diminuzione progressiva della pressione parziale di ossigeno. Questa diminuzione è espressa dall'ultima curva in basso, a tratto continuo.

I segmenti di retta paralleli all'ordinata intercalati alle due curve esprimenti la variazione del tempo riflesso totale rappresentano i valori di deviazione standard dello stesso riflesso totale.

in circolo chiuso e viene bruscamente portato da respirazione in aria libera a respirazione in circolo chiuso, si osserva una immediata variazione del tempo nervoso totale. Perciò vennero presi in considerazione soltanto i risultati ottenuti su soggetti abituati alle condizioni sperimentali.

Si è osservato che in soggetti il cui consumo di ossigeno era notevolmente alto la diminuzione del tempo riflesso totale era meno accentuata: e poiché l'elevato consumo di O_2 implica una più rapida diminuzione della concentra-

zione di O_2 nel ri-respiratore, i soggetti rimanevano esposti per un tempo più breve a deficit di ossigeno: questa può essere la causa della differenza riscontrata.

Sono in corso determinazioni eseguite, anziché col ri-respiratore, con la somministrazione di miscele ipossiche a noto contenuto in O_2 , con le quali il grado e il tempo di anossia viene ad essere eguale per tutti i soggetti e indipendente dal consumo di O_2 individuale.

L'*iperpnea* o l'*apnea volontaria* non determinano alcuna variazione apprezzabile del tempo riflesso totale. Poiché, come è noto, durante ipossia si ha iperpnea compensatoria, questo risultato dimostra che non è all'iperpnea in sé e neppure alle variazioni di CO_2 del sangue che dev'essere attribuita la variazione del tempo nervoso totale.

Circa la possibilità di una relazione fra la diminuzione del tempo riflesso e le ampiezze della risposta elettrica muscolare si può osservare che mentre un accorciamento del tempo riflesso totale si accompagna ad un aumento dell'ampiezza della risposta riflessa sotto l'azione della caffeina (op. cit.), nella fatica muscolare acuta (T. Gualtierotti e R. Margaria, in preparazione) e generalmente nell'anossia, nell'iperpnea si osserva invece un forte aumento di ampiezza senza diminuzione del tempo riflesso totale. Non esiste dunque necessariamente un legame tra diminuzione del tempo e aumento di ampiezza nella risposta elettrica muscolare.

L'accorciamento del tempo riflesso totale nelle condizioni sperimentali suddette è dovuto molto verosimilmente ad una diminuzione del ritardo sinaptico. Questo può essere a sua volta interpretato come dovuto a variazioni nella produzione o nel tempo di distribuzione dell'acetilcolina nella sinapsi, oppure alla depolarizzazione del tessuto nervoso provocata presumibilmente dalla bassa tensione di ossigeno *in loco* ⁽²⁾. Se questa depolarizzazione si verifica anche a livello della sinapsi, il passaggio dello stimolo può essere facilitato per abbassamento della soglia dell'inibizione sinaptica e per l'avvicinarsi del potenziale sinaptico tonico al potenziale critico di propagazione dell'impulso: in ambedue i casi diminuirebbe il tempo necessario per il passaggio dello stimolo attraverso la sinapsi.

In questa evenienza, una diminuzione del tempo sinaptico dovrebbe essere accompagnata da una facilitazione sinaptica, che si manifesterebbe anche con un aumento del numero di neuroni coinvolti nella risposta e quindi con un aumento del potenziale d'azione, mentre non necessariamente si dovrebbe verificare l'inverso.

Questa ricerca è stata finanziata dall'Air Force degli Stati Uniti secondo il Contratto AF (514)-637 C.

(2) A. VAN HARREVELD e J. S. STAMM, « J. Neurophysiol. », 15, 487-496 (1952).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Geometria differenziale). — *Sur un théorème de B. Segre*. Nota (*) di R. DEBEVER, presentata dal Socio B. SEGRE.

M. B. Segre a établi le théorème suivant (1):

Un espace de Riemann V_n représentable conformément sur un espace euclidien S_n de telle façon qu'aux géodésiques de V_n correspondent des courbes à première courbure constante de S_n est à courbure constante.

Je me propose de donner de ce théorème une démonstration nouvelle, elle s'inspire directement d'un travail de M. A. Fialkow (2).

I. COURBURE DE L'IMAGE CONFORME D'UNE GÉODÉSIQUE. — Soit \bar{V}_n et V_n deux espaces de Riemann conformément équivalents, les points correspondants sont supposés avoir mêmes coordonnées et soit

$$(1) \quad \bar{ds} = e^\sigma ds \quad , \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

σ est une fonction définie sur V_n .

Dans ce qui suit les lettres surlignées se rapportent à \bar{V}_n , les lettres non surlignées à V_n .

Soit \bar{C} une géodésique de \bar{V}_n et C son image pour V_n , soit ξ^i les composantes d'un vecteur unitaire tangent à C , si D désigne la différentiation covariante on a

$$(2) \quad \frac{D\xi^i}{ds} = e\sigma_m (g^{im} - e\xi^i \xi^m),$$

où

$$\sigma_m = \frac{\partial \sigma}{\partial x^m} \quad , \quad e = g_{ij} \xi^i \xi^j = \pm 1,$$

Nous supposerons dans ce qui suit $\sigma_m \xi^m \neq 0$.

Soit ξ'^i les composantes du vecteur unitaire orthogonal à ξ^i dans le plan déterminé par le vecteur ξ^i et le vecteur σ^i . \bar{C}' désignant la géodésique de \bar{V}_n tangente à la direction correspondante, \bar{C}' sera appelée la géodésique conjuguée à C ou à la direction ξ .

$g^{im} - \xi^i \xi^m$ étant le tenseur de projection pour l'espace vectoriel normal à la direction ξ^i il résulte de (2) que $\xi'(\xi)$ est le vecteur normal principal unitaire de C (C'). Si k et k' désignent les premières courbures de C et C' on a donc

$$(3) \quad \frac{D\xi^i}{ds} = e' k \xi'^i \quad , \quad \frac{D\xi'^i}{ds} = e k \xi^i.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1955.

(1) B. SEGRE, *Alcune proprietà caratteristiche della varietà a curvatura costante*. Nota IV, « Rend. dei Lincei », vol. 7, pp. 12-15 (1949).

(2) A. FIALKOW, *Conformal geodesics*, « Transac. Amer. Math. Soc. », vol. 45, pp. 443-473 (1939).

De (2) et (3) il suit

$$(4) \quad e' k \xi'^i = e \sigma_m g^{im} - \xi^i \xi^m \cdot \sigma_m,$$

soit encore

$$(5) \quad \sigma_m \xi'^m = e k;$$

et semblablement

$$(6) \quad \sigma_m \xi^m = e' k'.$$

De (4) et (6) il résulte que

$$(7) \quad e' k \sigma_i \xi'^i = e \Delta_i \sigma - k'^2, \quad \text{avec} \quad \Delta_i \sigma = g^{im} \sigma_i \sigma_m,$$

soit, grâce à (5),

$$(8) \quad e' k^2 + e k'^2 = \Delta_i \sigma.$$

Enfin par différentiation covariante de (2), compte tenu de (3) et (8), on trouve

$$(9) \quad \sigma_{mj} \xi^m \xi^j = e' \frac{dk'}{ds} - e \Delta_i \sigma, \quad \text{avec} \quad \sigma_{mj} = \sigma_{,mi} - \sigma_m \sigma_j.$$

2. RELATION DE FIALKOW ENTRE LES COURBURES DE DEUX ÉLÉMENTS PLANS. — Soit ${}_1\xi^i, {}_2\xi^j$ deux vecteurs unitaires orthogonaux, issus d'un même point, non situés dans l'élément plan déterminé par σ_i .

Les tenseurs de Riemann-Christoffel \bar{R}_{hijk} et R_{hijk} sont liés par les relations

$$(1) \quad R_{hijk} = e^{2\sigma} (R_{hijk} + g_{hk} \sigma_{ij} + g_{ij} \sigma_{hk} - g_{hj} \sigma_{ik} - g_{ik} \sigma_{hj}) + (g_{hk} g_{ij} - g_{hj} g_{ik}) \Delta_i \sigma.$$

Si R_{12} désigne la courbure riemanienne de l'élément plan déterminé par ${}_1\xi^i, {}_2\xi^j$ et \bar{R}_{12} celle déterminée par ${}_1\bar{\xi}^i, {}_2\bar{\xi}^j$ où $\bar{\xi}^i = e^{-\sigma} \xi^i$, il vient

$$(2) \quad \bar{R}_{12} = e^{-2\sigma} (R_{12} - e_2 \sigma_{hj} {}_1\xi^h {}_1\xi^j - e_2 \sigma_{ik} {}_2\xi^i {}_2\xi^k + e_1 e_2 \Delta_i \sigma)$$

et, grâce à (1.9),

$$(3) \quad \bar{R}_{12} = e^{-2\sigma} (R_{12} - e'_1 e_2 \frac{dk'_1}{ds_1} - e_1 e'_2 \frac{dk'_2}{ds_2} + e_1 e_2 \Delta_i \sigma),$$

si k'_1 et k'_2 sont les courbures des géodésiques conjuguées aux directions ${}_1\xi^i, {}_2\xi^j$ et s_1 et s_2 les longueurs d'arcs de courbes correspondantes.

3. THÉORÈME DE B. SEGREG. — Dans les hypothèses du théorème de B. Segre, l'espace \bar{V}_n est euclidien et les courbures k'_1 et k'_2 constantes, la formule (2.3) devient donc

$$\bar{R}_{12} = e^{-2\sigma} e_1 e_2 \cdot \Delta_i \sigma.$$

La courbure d'un élément plan est donc une fonction de point et, grâce au théorème de Schur, l'espace \bar{V}_n est à courbure constante.

Geometria. — *Alcune osservazioni sui sistemi canonici e pluricanonici di una varietà algebrica.* Nota (*) di FRANCESCO GHERARDELLI, presentata dal Socio B. SEGRE.

1. In questa Nota riprendo — da un diverso punto di vista — alcune considerazioni di una precedente Memoria (1), riguardanti la determinazione di varietà canoniche e pluricanoniche sopra una varietà algebrica irregolare.

Qui considero specialmente il caso delle superficie algebriche aventi irregolarità o pluriirregolarità positiva (2), intendendo con quest'ultima locuzione che la superficie possenga forme tensoriali di prima specie e dimensione uno. Tali forme tensoriali definiscono sulla superficie un sistema $\Sigma \infty^1$ di curve, avente un certo indice $r > 1$, il cui involuppo è, in generale, una curva pluricanonica della superficie.

Determino altresì le curve (anche queste pluricanoniche) dei contatti di due diversi sistemi Σ , accennando poi ad alcune estensioni alle varietà superiori, su cui conto ritornare.

Al n. 4, infine, trovo l'espressione, per invarianti noti, del genere delle curve canoniche di una V_3 irregolare; assegno così un nuovo significato geometrico ad una serie di equivalenza invariante, già studiata da B. Segre per le V_3 qualunque (3).

2. Sia F una superficie algebrica dello S_3 , dotata di singularità normali, in posizione generica rispetto agli assi coordinati e di equazione $f(x, y, z) = 0$.

Supponiamo che F possenga la forma tensoriale di prima specie, $\omega_1^{(r)}$, di dimensione uno ed ordine r :

$$(1) \quad \omega_1^{(r)} = \sum_0^r a_i (dx)^i \cdot (dy)^{r-i}$$

cioè una forma a coefficienti funzioni razionali del punto scorrente su F , che siano, su F , ovunque olomorfi, nel senso che le loro eventuali singularità si possano sempre evitare con un opportuno cambiamento delle variabili uniformizzanti locali (4).

(*) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1955.

(1) F. GHERARDELLI, *Covarianti di sistemi lineari di curve sopra una superficie algebrica*, « Ann. di Mat. », ser. IV, t. XXXVII, pp. 157-174 (1954).

(2) I due concetti di superficie di irregolarità o pluriirregolarità positiva non coincidono. Ad esempio, in una Nota in corso di stampa negli « Atti Acc. delle Scienze di Torino », ho costruito esempi di superficie regolari aventi biirregolarità positiva.

(3) B. SEGRE, *Nuovi contributi alla geometria sulle varietà algebriche*, « Mem. Acc. di Italia », vol. V, pp. 479-576 (1934). Cfr. altresì i lavori dello stesso A. citati in (6).

(4) E. KAEHLER, *Forme differenziali e loro integrali*, « Mem. Acc. d'Italia », vol. III, pp. 33-47 (1932). Secondo la notazione originale di KAEHLER, la forma tensoriale $\omega_1^{(r)}$, si scriverebbe: $\omega_1^{(r)} = \sum_1^r a_i \left(\frac{dx}{ds} \right)^i \left(\frac{dy}{ds} \right)^{r-i}$, dove s è un parametro che assolve un ufficio soltanto simbolico.

Con locuzione introdotta da A. Andreotti, diremo le $\omega_i^{(r)}$ *forme della r -irregolarità* della superficie F .

È opportuno osservare che una superficie irregolare ha anche pluri-irregolarità positiva (non viceversa). Infatti se $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ sono forme differenziali di primo grado e di prima specie (distinte o coincidenti) appartenenti ad F , il prodotto ordinario (non esterno) $(\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \dots \cdot \omega_r)$ è una forma della r -irregolarità.

Sia $\omega_i^{(r)}$ una forma del tipo (1) appartenente ad F e supponiamo che il discriminante Φ di $\omega_i^{(r)} = 0$ non sia identicamente nullo; $\omega_i^{(r)} = 0$ è un'equazione differenziale la quale definisce su F un sistema Σ di ∞^1 linee integrali, avente l'indice r . L'involuppo del sistema Σ è la curva di zero, al finito, delle funzione razionale Φ .

Nelle nostre ipotesi, se $r > 1$, l'involuppo del sistema Σ è una curva pluricanonica di F .

Detta I_r la curva involuppo di Σ , \mathfrak{D} la curva impropria della superficie F , J la curva di diramazione della funzione algebrica $z(x, y)$ definita dalla $f(x, y, z) = 0$, si ha un'equivalenza del tipo:

$$I_r + \alpha \mathfrak{D} \equiv \beta J.$$

Infatti la curva di zero della funzione razionale Φ è *a priori* costituita, oltre che dalla I_r , dalla curva impropria di F , contata un certo numero α (≥ 0) di volte; mentre la curva di infinito della funzione razionale Φ è costituita dalla curva J , contata con opportuna molteplicità. La funzione razionale Φ non può avere altra curva polare oltre la J , perché i coefficienti della forma $\omega_i^{(r)}$, di prima specie, possono divenire infiniti soltanto su quella curva.

Trasformando la superficie F mediante l'omografia

$$x_1 = \frac{1}{x}, \quad y_1 = \frac{y}{x}, \quad z_1 = \frac{z}{x},$$

che porta la curva \mathfrak{D} al finito, si trova facilmente ⁽⁵⁾:

$$\alpha = 3r(r-1);$$

analogamente, trasformando F con l'omografia:

$$x_1 = z, \quad y_1 = y, \quad z_1 = x$$

si trova:

$$\beta = r(r-1).$$

Di qui, ricordando che $J \equiv 3\mathfrak{D} + K$, ove K è una curva canonica, effettiva o virtuale, della superficie F , si ha:

$$(2) \quad I_r \equiv r(r-1)K.$$

(5) Per ulteriori particolari sul facile calcolo, che qui è sottinteso, cfr. loc. cit. in ⁽¹⁾, p. 161 e p. 164, ove viene usato lo stesso metodo in casi analoghi.

Si costruiscono facilmente esempi in cui la curva I_r non è indeterminata, anzi risulta addirittura irriducibile. Supponiamo ad esempio, che la superficie F sia di irregolarità $g \geq 3$ e siano $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ tre sue forme differenziali semplici di prima specie linearmente indipendenti e a due a due funzionalmente indipendenti. (Per esempio, F sia una generica superficie di irregolarità tre, contenuta nella propria varietà di Picard). Si verifica subito che la curva I_2 ($r = 2$), relativa alla forma

$$\omega_1^{(r)} = \lambda_1 (\omega_2 \cdot \omega_3) + \lambda_2 (\omega_3 \cdot \omega_1) + \lambda_3 (\omega_1 \cdot \omega_2) \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ costanti}),$$

per valori generici di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, è irriducibile.

Si ottengono ancora curve pluricanoniche della superficie F , considerando due forme tensoriali $\omega_1^{(l)}$ ed $\omega_1^{(m)}$ di prima specie appartenenti ad F , i sistemi di linee Σ_1 e Σ_2 da esse definiti su F e quindi la curva $T_{l,m}$ dei contatti di tali sistemi. $T_{l,m}$ è la curva di zero al finito della funzione razionale che si ottiene scrivendo il risultante delle due forme $\omega_1^{(l)}$ ed $\omega_1^{(m)}$. Anche qui avremo, usando le notazioni precedenti:

$$T_{l,m} + \alpha \mathfrak{D} \equiv \beta J;$$

col procedimento sopra illustrato, si ottiene:

$$\alpha = 3lm, \quad \beta = lm$$

e quindi:

$$(3) \quad T_{l,m} \equiv lmK.$$

Se $l = m = 1$ la (3) si riduce alla ben nota relazione di Noether.

3. Le osservazioni del numero precedente si possono ovviamente estendere - come ora indicheremo - alle varietà algebriche V_k di dimensione qualsiasi k .

Sia $f(x^1, x^2, \dots, x^k; z) = 0$ l'equazione della data V_k algebrica di S_{k+1} , che supponiamo irriducibile, dotata di singolarità ordinaria e in posizione generica rispetto agli assi coordinati, e sia:

$$(4) \quad \omega_1^{(r)} = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=r} a_{i_1\dots i_k} (dx^1)^{i_1} \dots (dx^k)^{i_k}$$

una forma tensoriale di prima specie, dimensione uno ed ordine r appartenente a V_k .

Il discriminante di tale forma è una funzione razionale del punto scorrente su V_k , la cui varietà di zero al finito (se tale funzione razionale non è identicamente nulla) è una V_{k-1} pluricanonica della V_k .

Più interessante, ma su questo intendo tornare altrove, sarà considerare le «varietà dei contatti», opportunamente definite, dei sistemi di varietà integrali di due o più equazioni differenziali ottenute eguagliando a zero forme tensoriali del tipo (4). In questo modo si potranno definire direttamente le varietà pluricanoniche delle varie dimensioni sulla varietà V_k .

4. Lo studio delle varietà canoniche e pluricanoniche sulle varietà superficialmente irregolari (o pluriirregolari), per quanto riguarda una classe molto ristretta di varietà algebriche, è ancora giustificato dalla sua semplicità e dalla possibilità di ottenere abbastanza facilmente risultati, che talora hanno validità generale.

In questo numero, limitandomi alle varietà a tre dimensioni superficialmente irregolari, determino il genere delle loro curve canoniche ⁽⁶⁾.

Sia V_3 una varietà algebrica a tre dimensioni di irregolarità $g \geq 3$ e siano u^1, u^2, u^3 , tre suoi integrali semplici di prima specie, fra loro linearmente indipendenti.

Supponiamo che la superficie jacobiana del sistema ∞^3 di superficie

$$(5) \quad \lambda_1 u^1 + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3 = \text{cost.},$$

non sia indeterminata e per questo basta supporre che la V_3 non contenga nè fasci irrazionali, nè congruenze irregolari di indice uno di curve ⁽⁷⁾.

In queste ipotesi, la superficie jacobiana del sistema (5) è una superficie canonica della V_3 ⁽⁸⁾: $X_2(V)$. Supponiamo ancora che la superficie $X_2(V)$ sia irriducibile e priva di singolarità.

Si considerino le due «reti» contenute nel sistema (5), \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 :

$$\lambda_1 u^1 + \lambda_2 u^2 = \text{cost.},$$

$$\mu_1 u^1 + \mu_2 u^3 = \text{cost.}$$

e le relative curve jacobiane X_1^1 e X_1^2 . X_1^1 e X_1^2 sono curve canoniche di V_3 ⁽⁹⁾.

Vogliamo determinare il genere π di tali curve canoniche. I punti comuni ad X_1^1 ed X_1^2 sono i punti del gruppo jacobiano del fascio $u^1 = \text{cost.}$ e gli eventuali punti per cui passano una superficie di \mathcal{R}_1 ed una di \mathcal{R}_2 , fra loro distinte, aventi ivi un punto doppio. Ma, nelle nostre ipotesi, questa seconda eventualità non può aver luogo; infatti, se così fosse, la superficie $X_2(V)$ avrebbe dei punti almeno doppi.

Pertanto, $[X_1^1 X_1^2]_{X_2} = [X_1 X_1]_{X_2}$ è uguale al numero dei punti doppi delle superficie del fascio $u^1 = \text{cost.}$ cioè è uguale ad $I - 6$, essendo I l'invariante di Zeuthen-Segre della V_3 ⁽¹⁰⁾:

$$(6) \quad [X_1 X_1]_{X_2} = I - 6.$$

(6) Per problemi di questo tipo - trattati in casi molto generali - cfr., oltre loc. cit. in (3), B. SEGRE, *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche*, « Ann. di Mat. », ser. IV, t. XXXV, pp. 1-127 (1953) e dello stesso Autore: *Dilatazioni e varietà canoniche sulle varietà algebriche*, « Ann. di Mat. », ser. IV, t. XXXVII, pp. 139-155 (1954).

(7) A. COMESSATTI, *Sulle varietà algebriche che posseggono integrali semplici funzionalmente dipendenti*, « Rend. Acc. Lincei », ser. V, vol. XXII, p. 270 e p. 361 (1913).

(8) M. ÉGER, *Les systèmes canoniques d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, (Thèse), « Ann. Ec. Norm. », ser. III, t. 60, pp. 143-172 (1943).

(9) M. ÉGER, loc. cit. in (8).

(10) J. A. TODD, *Note on the canonical series of a V_d* , « Proc. of the London Mat. Soc. », ser. 2, vol. 3, pp. 139-141 (1937).

Vale inoltre la relazione funzionale ⁽¹¹⁾:

$$(7) \quad (X_1 X_1)_{X_2} + 2 X_1 X_2 \equiv K_{X_1},$$

dove K_{X_1} è un gruppo canonico di X_1 e

$$(8) \quad [X_1 X_2] = 24 (P_a - 1),$$

essendo P_a il genere aritmetico della V_3 ⁽¹²⁾. Per le (6) ed (8), l'interpretazione numerativa della (7) ci dà:

$$(9) \quad 2\pi - 2 = 48 (P_a - 1) + (1 - 6).$$

Di più la (7) ci dice che K_{X_1} è un gruppo della serie di equivalenza \mathfrak{D} , ottenuta su una V_3 qualunque da B. Segre ⁽¹³⁾.

OSSERVAZIONE. - È opportuno verificare, in un caso concreto, che le ipotesi sotto le quali sono state dimostrate le relazioni (7) e (9), sono effettivamente realizzabili. Consideriamo, ad esempio, la generica V_3 di irregolarità quattro contenuta nella propria V_4 di Picard, che supponiamo a divisori unitari e non singolare. Sulla V_4 di Picard ogni V_3 si ottiene come varietà di zero di una funzione theta di un certo ordine l , sia $\Theta_l(u^1, u^2, u^3, u^4) = 0$. La jacobiana X_2 del sistema $\lambda_{i_1} u^{i_1} + \lambda_{i_2} u^{i_2} + \lambda_{i_3} u^{i_3} = \text{cost.}$ ($i_1 \neq i_2 \neq i_3 = 1, 2, 3, 4$) è segata sulla $\Theta_l = 0$ dalla $\frac{\partial \Theta_l}{\partial u^{i_4}} = 0$ ($i_4 \neq i_1, i_2, i_3$). Quindi

sulla $\Theta_l = 0$ il sistema canonico principale è dato da $\sum_i \mu_i \frac{\partial \Theta_l}{\partial u^i} = 0$. Tale sistema lineare non ha, in generale, punti base perché in un suo punto base sarebbe: $\frac{\partial \Theta_l}{\partial u^i} = 0$ per $i = 1, 2, 3, 4$ e la $\Theta_l = 0$ avrebbe ivi un punto almeno doppio, mentre per la generica V_3 $\Theta_l = 0$ non ha singolarità.

Su questo esempio la relazione (9) (e il suo significato funzionale dato dalla (7)) è di facile verifica. Il genere aritmetico della V_3 rappresentata dalla $\Theta_l = 0$ vale: (a) $P_a = l^4 + 1$. Tenendo poi conto che i sistemi canonici delle varie dimensioni della V_4 di Picard sono tutti equivalenti a zero, si ottiene $X_1(V_3) \equiv (V_3^{[3]})_{V_4}$, $X_0(V_3) \equiv (V_3^{[4]})_{V_4}$; da queste e dalla formula di postulazione per gli ideali principali di funzioni theta ⁽¹⁴⁾, si ha infine: (b) $1 - 6 = 24 l^4$ e (c) $2\pi - 2 = 72 l^4$. I valori (a), (b), (c), come è subito visto, verificano la (9).

(11) In generale se C giace su una superficie S contenuta in una V_3 si ha:

$$(CC)_S + CS \equiv K_C - CX_2,$$

dove K_C è un gruppo canonico di C (ved. B. SEGRE, loc. cit. in (3), p. 492).

(12) Cfr. B. SEGRE, loc. cit. in (3), p. 512.

(13) B. SEGRE, loc. cit. in (3), pp. 532-533.

(14) A. ANDREOTTI, *Recherches sur les surfaces irrégulières*, «Mem. Ac. Roy. de Belgique», t. XXVII (1952).

Meccanica. — *Geometrizzazione della dinamica dei sistemi a vincoli mobili.* Nota (*) di EMILIO CLAUSER, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

In due Note recenti mi sono occupato delle equazioni dinamiche dei sistemi soggetti a vincoli fissi e lisci.

Nella prima Nota (1), ho mostrato che le equazioni di Lagrange di un sistema olonomo coincidono con le equazioni delle autoparallele di uno spazio genericamente né riemanniano né a connessione affine, ma a metrica riemanniana; esso ha una struttura formalmente identica a quella di uno spazio di Weyl: la metrica di questo spazio è quella dello spazio delle configurazioni, mentre il vettore dal quale dipendono i coefficienti di connessione è individuato dai rapporti fra le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva ed il doppio dell'energia cinetica del sistema.

Nella seconda Nota (2), ho esteso la geometrizzazione precedente ai sistemi anolonomi, riuscendo ad identificarne le equazioni di movimento, convenientemente formulate, alle equazioni di autoparallele di uno spazio opportuno: la metrica relativa è ancora quella riemanniana dello spazio delle configurazioni; i coefficienti di connessione differiscono invece da quelli che si utilizzano per geometrizzare il movimento del corrispondente sistema olonomo per un termine posizionale che dipende dai coefficienti delle velocità lagrangiane, relativi alle equazioni di anolonomia. La connessione è quindi affine quando è affine la connessione che compete al corrispondente sistema olonomo.

In questa Nota mostro che la precedente interpretazione geometrica continua a sussistere anche per sistemi soggetti a vincoli mobili (e lisci), olonomi ed anolonomi, anziché fissi. È ancora possibile formulare le equazioni dinamiche in modo da identificarle alle equazioni di autoparallele di uno spazio non riemanniano. La metrica di questo spazio è riemanniana, perché individuata dai coefficienti della parte quadratica dell'energia cinetica; ogni coefficiente di connessione risulta somma di tre termini: un termine ha struttura formalmente identica ad un coefficiente di connessione di uno spazio di Weyl, un altro termine è proporzionale ad una velocità lagrangiana e proviene dalla mobilità dei vincoli, l'ultimo termine trae origine dall'anolonomia dei vincoli.

È interessante notare che qualunque siano i vincoli, soltanto con le autoparallele considerate si può descrivere il movimento di un sistema materiale,

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1955.

(1) *Equazioni dinamiche rappresentate da autoparallele di spazi non riemanniani*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XVIII, 1955.

(2) *Geometrizzazione della dinamica dei sistemi anolonomi*, « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXXXVIII, 1955.

se si vuole che lo spazio rappresentativo abbia metrica riemanniana ed abbia per coordinate quelle del sistema.

Quando i vincoli sono mobili, questo spazio dipende dal tempo e non è a connessione affine; quando invece i vincoli sono fissi, la metrica di questo spazio non dipende dal tempo, mentre la connessione in casi particolari diventa affine o addirittura si riduce a riemanniana.

Dalle precedenti condizioni prescinde invece Lanczos, nel suo recente trattato ⁽³⁾, quando identifica le equazioni dinamiche alle equazioni delle geodetiche di uno spazio-tempo opportuno, genericamente né riemanniano né a metrica riemanniana, che dipende, oltre che dalle coordinate, anche dalle velocità lagrangiane del sistema materiale.

L'interpretazione geometrica della dinamica che qui propongo, mi sembra più conforme alla meccanica classica di quella proposta da Lanczos: infatti la prima si avvale di uno spazio nel quale il tempo compare soltanto come parametro e non come una coordinata, spazio nel quale le autoparallele hanno significato intrinseco rispetto ai soli cambiamenti delle coordinate lagrangiane e non del tempo.

La descrizione del movimento mediante geodetiche di uno spazio-tempo, esposta da Lanczos, si accosta invece al profondo modello geometrico della dinamica, contenuto nella teoria della relatività generale.

I. LE EQUAZIONI DINAMICHE DI UN SISTEMA ANOLONOMO A VINCOLI MOBILI. - Consideriamo un sistema materiale soggetto a vincoli mobili (e lisci), olonomi ed anolonomi.

Scontiamo i vincoli olonomi introducendo n coordinate q^1, q^2, \dots, q^n , libere da questi vincoli e poi imponiamo a queste coordinate le condizioni di anolonomia.

Le equazioni di movimento si possono allora esprimere così:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T_2}{\partial q^k} = Q_k + R_k + \sum_i^s \lambda_{(i)} \alpha_{(i)k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ (2) \quad \alpha_{(i)k}(q/t) \dot{q}^k + \beta_{(i)}(q/t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s); \end{array} \right.$$

nella (1),

$$(3) \quad T_2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{h,k}^n a_{hk}(q/t) \dot{q}^h \dot{q}^k$$

è la parte quadratica dell'energia cinetica $T = T_2 + \sum_i^s a_k(q/t) \dot{q}^k + a(q/t)$,

$$(4) \quad R_k \equiv \frac{\partial a_l}{\partial q^k} \dot{q}^l + \frac{\partial a}{\partial q^k} - \frac{da_k}{dt} \equiv \left(\frac{\partial a_l}{\partial q^k} - \frac{\partial a_k}{\partial q^l} \right) \dot{q}^l + \frac{\partial a}{\partial q^k} - \frac{\partial a_k}{\partial t}$$

proviene dall'aver espresso il primo membro delle equazioni lagrangiane mediante T_2 anziché mediante tutta la T mentre Q_k è la componente lagran-

(3) *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press, 1949, cap. VIII, par. 9.

giana della sollecitazione attiva; infine $\lambda_{(h)}$ è un moltiplicatore disponibile; le (2) sono le equazioni di anolonomia ⁽⁴⁾.

Introducendo la metrica individuata da

$$(5) \quad ds^2 \equiv a_{hk}(q|t) dq^h dq^k \equiv 2 T_2 dt^2,$$

la (1) si può esprimere così:

$$(1') \quad \sigma^i \equiv \ddot{q}^i + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ hk \end{smallmatrix} \right\} \dot{q}^h \dot{q}^k = Q^i + R^i - \frac{\partial a_{hk}}{\partial t} \dot{q}^h a^{ik} + \sum_h^s \lambda_{(h)} \alpha_{(h)}^i,$$

essendo $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ hk \end{smallmatrix} \right\}$ i simboli di Christoffel di seconda specie, tratti dalla metrica precedente ⁽⁵⁾.

2. CALCOLO DEL MOLTIPLICATORE NEL CASO DI UN SOLO VINCOLO ANOLONOMO MOBILE. — Quando vi è un solo vincolo di anolonomia, il sistema di equazioni (1') e (2), diviene:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} (6) \quad \sigma^i \equiv \ddot{q}^i + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ hk \end{smallmatrix} \right\} \dot{q}^h \dot{q}^k = Q^i + R^i - \frac{\partial a_{hk}}{\partial t} \dot{q}^h a^{ik} + \lambda \alpha^i \\ (7) \quad \alpha_i(q|t) \dot{q}^i + \beta(q|t) = 0. \end{array} \right.$$

Generalizzando un'osservazione di Synge che riguarda i sistemi a vincoli fissi ⁽⁵⁾, dall'espressione (1') di σ^i segue

$$(8) \quad \frac{d}{dt} (\alpha_i \dot{q}^i) \equiv \alpha_i \sigma^i + \alpha_{h|k} \dot{q}^h \dot{q}^k + \frac{\partial \alpha_h}{\partial t} \dot{q}^h,$$

essendo $\alpha_{h|k}$ la derivata tensoriale del vettore di componenti α_h eseguita con i simboli di Christoffel tratti dalla metrica (5).

Componendo ambo i membri della (6) con α_i e tenendo conto che per la (7) è

$$(9) \quad \frac{d}{dt} (\alpha_i \dot{q}^i + \beta) \stackrel{*}{=} 0,$$

si ottiene:

$$(10) \quad \lambda = - \frac{1}{\alpha_i \alpha^i} \left(\alpha_{h|k} \dot{q}^h \dot{q}^k + \frac{\partial \alpha_h}{\partial t} \dot{q}^h + \dot{\beta} + \alpha_l Q^l + \alpha_l R^l - \frac{\partial a_{hk}}{\partial t} \dot{q}^h \alpha^k \right).$$

Sostituendo questo valore di λ nella (6) e componendo ambo i membri della (6) con α_i , ne discende per l'identità (8) l'equazione (9).

(4) Per le equazioni di moto dei sistemi anolonomi scritte con i moltiplicatori vedere ad esempio: E. T. WHITTAKER, *A treatise on the analytical dynamics*, Cambridge 1927, cap. VIII, par. 87. Le notazioni adottate nella Nota sono quelle usuali del calcolo tensoriale: in particolare sono sottintesi i simboli di sommatoria relativi ad indici tensoriali saturati, mentre gli indici entro parentesi non sono tensoriali ma ordinali. Una lettera in grassetto indica un vettore.

(5) J. L. SYNGE, *On the geometry of dynamics*, « Phil. Transactions », vol. 226, serie A, 1927, par. 3.7.

Al sistema (II) si può pertanto sostituire il sistema equivalente

$$(II') \quad \begin{cases} \ddot{q}^i + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ hk \end{smallmatrix} \right\} \dot{q}^h \dot{q}^k = Q^i + R^i - \frac{\partial a_{hk}}{\partial t} \dot{q}^h a^{ki} + \lambda \alpha^i \\ [\alpha_h(q/t) \dot{q}^h + \beta(q/t)]_{P=P_0} = 0, \end{cases}$$

con λ espresso dalla (10) ed R^i dalla (4); P_0 indica una posizione del sistema prefissata ad arbitrio, tipicamente la posizione iniziale.

3. CALCOLO DEI MOLTIPLICATORI NEL CASO DI PIÙ VINCOLI ANOLONOMI MOBILI. - Quando si hanno più vincoli di anolonomia è comodo sostituire nella (2) agli s vettori $\alpha_{(h)}$, di componenti $\alpha_{(h)k}$, altrettanti vettori $\mathbf{A}_{(h)}$ unitari e mutuamente ortogonali, che appartengono alla faccetta individuata dai vettori $\alpha_{(h)}$ nello spazio di metrica (5) ⁽⁶⁾.

Operando come si è fatto in presenza di un sol vincolo anolonomo, si può sostituire al sistema (I) il sistema equivalente

$$(III) \quad \begin{cases} (I1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T_2}{\partial q^k} = Q_k + R_k - \frac{\partial a_{hk}}{\partial t} \dot{q}^h + \Omega_k \\ (I2) \quad [A_{(v)i} \dot{q}^i + B_{(v)}]_{P=P_0} = 0 \end{cases} \quad (v = 1, 2, \dots, s)$$

con

$$(I3) \quad \Omega_k = - \sum_{v=1}^s A_{(v)k} \left[A_{(v)r/s} \dot{q}^r \dot{q}^s + \frac{\partial A_{(v)r}}{\partial t} \dot{q}^r + A_{(v)l}^i \left(Q_l + R_l - \frac{\partial a_{hl}}{\partial t} \dot{q}^h \right) \right]$$

ed R_k espresso dalla (4);

(III) caratterizza il movimento di un sistema anolonomo a vincoli mobili, sottoposto allè s equazioni di anolonomia

$$(I4) \quad A_{(v)i} (q/t) \dot{q}^i + B_{(v)} (q/t) = 0$$

con

$$A_{(v)i} A_{(\mu)}^i = 0 \quad \text{per } v \neq \mu \quad \text{e } = 1 \quad \text{per } v = \mu.$$

4. IDENTIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI DI MOTO DI UN SISTEMA A VINCOLI MOBILI ALLE EQUAZIONI DELLE AUTOPARALLELE. - Le equazioni delle autoparallele di uno spazio a connessione generica si possono esprimere così:

$$(I5) \quad \ddot{q}^i + \Gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k = \dot{q}^i \varphi \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

nella (15) Γ_{hk}^i è un coefficiente di connessione del quale interviene la sola parte simmetrica, il tempo vi funge da parametro e φ è uno scalare che individua la dipendenza dal tempo della lunghezza dell'arco di autoparallela:

$$(I6) \quad \varphi = \frac{d^2 s}{dt^2} \bigg/ \frac{ds}{dt} \quad (7).$$

La (15) e le (III) (o le (II')) sono equazioni tensoriali in due spazi genericamente differenti, che hanno però la stessa metrica (5).

(6) Loco citato in (5), par. 3.8.

(7) Vedere ad esempio, L. P. EISENHART, *Non riemannian geometry*, New York, 1927, par. 7 e par. 22.

Ciò premesso si ponga

$$(17) \quad \Gamma_{hk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ hk \end{matrix} \right\} + \gamma_{hk}^i,$$

con che γ_{hk}^i è un tensore triplo perché esprime il divario fra due connessioni ⁽⁸⁾.

Le equazioni dinamiche (11) si identificano alle equazioni (15) delle auto-parallele quando e soltanto quando è

$$(18) \quad \varphi \dot{q}^i - \gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k = Q^i + R^i + \Omega^i - \frac{\partial a_{hk}}{\partial t} \dot{q}^h a^{ki},$$

essendo, per la (16) e per la (5),

$$(19) \quad \varphi = \frac{1}{2T_2} \frac{dT_2}{dt}.$$

Ora dalla espressione (3) di T_2 risulta:

$$2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^k} \right) \dot{q}^k + \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^k} \ddot{q}^k.$$

Eliminando dalla precedente \ddot{q}^k mediante la derivata totale rispetto al tempo di T_2 , che è funzione delle q , delle \dot{q} e del tempo t , si ottiene:

$$(20) \quad \frac{dT_2}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T_2}{\partial q^k} \right) \dot{q}^k - \frac{\partial T_2}{\partial t}.$$

Grazie alla (20), risulta allora dalle equazioni (11), per la (4):

$$(21) \quad \frac{dT_2}{dt} = Q^l \dot{q}_l + \left(\frac{\partial a}{\partial q^k} - \frac{\partial a_k}{\partial t} \right) \dot{q}^k - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial t} \dot{q}^h \dot{q}^k + \Omega^l \dot{q}_l;$$

la (21) esprime il teorema dell'energia per un sistema anolonomo a vincoli mobili; esso generalizza il teorema dell'energia che si può trarre dalle equazioni di Lagrange per un sistema a vincoli fissi; grazie alla (21) il parametro φ che compare nella (18) e che è individuato dalla (19), non dipende quindi dalle accelerazioni lagrangiane.

Questa circostanza permette di procedere con il metodo illustrato nelle due Note precedenti, relative a sistemi con vincoli fissi. Si scomponga il vettore sollecitazione attiva in due vettori, uno parallelo e l'altro, \mathbf{N} , perpendicolare al vettore di componenti \dot{q}^i ; si ha:

$$(22) \quad Q^i = \mu \dot{q}^i + N^i \equiv \frac{Q^l \dot{q}_l}{2T_2} \dot{q}^i + N^i;$$

la (18), per la (19), per la (21) e per la (22), tenendo conto della metrica (5), diviene allora:

$$(18') \quad \gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k = - (N^i + R^i + \Omega^i) + \frac{\partial a_{hk}}{\partial t} \dot{q}^h a^{ki} + \\ + \frac{\dot{q}^i}{2T_2} \left[\left(\frac{\partial a}{\partial q^k} - \frac{\partial a_k}{\partial t} \right) \dot{q}^k - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{lk}}{\partial t} \dot{q}^h \dot{q}^k + \Omega^l \dot{q}_l \right].$$

(8) Loco citato in (7), par. 5.

5. DETERMINAZIONE DEI COEFFICIENTI DI CONNESSIONE. - Per risolvere le n equazioni lineari (18') nelle $n^2(n-1)/2$ incognite γ_{hk}^i conviene porre

$$(23) \quad \gamma_{hk}^i = \delta_{hk}^i + L_{hk}^i + M_{hk}^i$$

con δ_{hk}^i soluzione delle n equazioni

$$(24) \quad \delta_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k = -N^i$$

e con L_{hk}^i uguale ai termini a secondo membro della (18') che sono composti con $\dot{q}^h \dot{q}^k$; ciò perché delle γ_{hk}^i interessano soltanto quelle soluzioni particolari che recano contributo nella equazione (15) delle autoparallele. Risulta allora:

$$(25) \quad L_{hk}^i = \sum_v^s A_{(v)}^i [A_{(v)h/k} - A_{(v)l} \delta_{hk}^l] + \\ + \frac{\dot{q}^i}{2T_2} \left[\sum_v^s B_{(v)} (A_{(v)h/k} - A_{(v)l} \delta_{hk}^l) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial t} \right].$$

La soluzione della (24) che interessa, è la seguente

$$(26) \quad 2 \delta_{hk}^i = a_h^i \psi_k + a_k^i \psi_h - 2 a_{hk}^i \psi^i,$$

dove è

$$(27) \quad \psi^i = \frac{N^i}{2T_2} + \xi \dot{q}^i,$$

con ξ parametro arbitrario.

Per determinare infine M_{hk}^i poniamo, analogamente alla (26):

$$(28) \quad M_{hk}^i = a_h^i \chi_k + a_k^i \chi_h - a_{hk}^i \chi^i.$$

Scomponendo il vettore χ nel solito modo, ponendo cioè

$$(29) \quad \chi^i = A \dot{q}^i + B N^i,$$

risulta, per la (28) e per la (5):

$$M_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k = 2 A T_2 \dot{q}^i - 2 B T_2 N^i.$$

La (18') permette allora il calcolo di A e di B . Ne risulta che il tensore M_{hk}^i non dipende dal vettore ψ di componenti (27); da esso dipendono invece i tensori δ_{hk}^i ed L_{hk}^i ; tuttavia la componente arbitraria di ψ secondo \dot{q}^i , data da $\xi \dot{q}^i$, non interviene nelle equazioni delle autoparallele, come segue dal primo membro della (24), per la (26).

I coefficienti di connessione che così si ottengono, si possono semplificare osservando che le autoparallele non mutano aggiungendo ad essi l'addendo $\frac{1}{2} (a_h^i \psi_k + a_k^i \psi_h)$ ⁽⁹⁾ e che nelle equazioni (15) delle autoparallele interviene la sola parte simmetrica dei coefficienti di connessione.

(9) Loco citato in (7), par. 22.

In definitiva, la (17) si può esprimere così:

$$\begin{aligned} \Gamma_{hk}^i = & \left\{ \frac{i}{hk} \right\} + [a_h^i (\psi_k + \chi_k) + a_k^i (\psi_h + \chi_h) - a_{hk}^i (\psi^i + \chi^i)] + \\ & + \frac{\dot{q}^i}{2 T_2} \left\{ \sum_v B_{(v)} \left[\frac{1}{2} (A_{(v) h/k} + A_{(v) k/h}) - A_{(v) l} \delta_{hk}^l \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}^i}{\partial t} \right\} + \\ & + \sum_v A_{(v)}^i \left[\frac{1}{2} (A_{(v) h/k} + A_{(v) k/h}) - A_{(v) l} \delta_{hk}^l \right], \end{aligned}$$

con δ_{hk}^l individuato dalla (26), ψ^i dalla (27), χ^i dalla (29). I coefficienti di connessione risultano così somma di tre termini disposti in tre righe diverse con il significato annunciato all'inizio della Nota.

Naturalmente, se il sistema è olonomo e i vincoli sono fissi ci si riduce al primo termine con $\chi = 0$; se il sistema è anolonomo, ma a vincoli fissi, si annulla il secondo termine; se infine il sistema è olonomo ma a vincoli mobili, vien meno il terzo termine, e si semplificano notevolmente i primi due.

Chimica inorganica. — *Sui composti intermetallici* SrGa_2 e BaGa_2 . Nota di ALDO IANDELLI (*), presentata(**) dal Socio L. ROLLA.

Negli ultimi anni sempre più numerosi sono risultati i composti intermetallici, nei quali, a differenza di quel che si pensava dovesse sempre caratterizzare la valenza metallica, anziché la formazione di un reticolo con alto numero di coordinazione per le due specie atomiche, si osserva la presenza di strati o catene di atomi di una data specie. I composti SrGa_2 e BaGa_2 appartengono a questa categoria, e sono stati studiati strutturalmente durante l'esame di un gruppo più vasto di strutture del tipo rammentato, tuttora in corso.

I due composti sono stati preparati (senza la conoscenza del diagramma di stato dei sistemi corrispondenti) per riscaldamento sotto vuoto a 1100° di quantità pesate dei due metalli puri (Ga: 99,85 %, Sr e Ba 99,5 %), e lento raffreddamento fino a temperatura ambiente. Si presentano come prodotti omogenei, ben cristallizzati, fragili, e non molto ossidabili.

L'esame röntgenografico è stato eseguito col metodo delle polveri, usando la radiazione K_α del Fe e del Cu, rispettivamente per SrGa_2 e BaGa_2 ; ed è stato possibile identificare il reticolo come quello corrispondente al tipo di struttura AlB_2 , esagonale. I fotogrammi eseguiti col metodo di Straumanis, hanno fornito i seguenti valori delle costanti della cella:

$$\text{SrGa}_2: a_0 = 4,335 \text{ kX } (4,344 \text{ Å}) \quad ; \quad c = 4,722 \text{ kX } (4,732 \text{ Å})$$

$$\text{BaGa}_2: a_0 = 4,423 \text{ kX } (4,432 \text{ Å}) \quad ; \quad c = 5,053 \text{ kX } (5,064 \text{ Å}).$$

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica fisica dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1955.

Nelle tabelle I e II vengono riportate dettagliatamente le intensità delle righe, che appaiono completamente in accordo con quelle calcolate per la disposizione:

$$1 \text{ Sr(Ba) in : } 000 \quad ; \quad 2 \text{ Ga in : } \pm \frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{2} .$$

TABELLA I.

Intensità per SrGa₂.

Indici	Intensità		Indici	Intensità	
	calcolata	osservata		calcolata	osservata
001	6,5	—	300	52,4	<i>m</i>
100	1,2	—	004	19,8	<i>d</i>
101	142,2	<i>f</i> ⁺	203	53,9	<i>m</i>
002	36,9	<i>d</i>	122	1,4	—
110	96,8	<i>f</i> ⁻	301	6,0	—
102	0,9	—	104	1,0	—
111	8,5	—	302	147,2	<i>f</i> ⁺
200	0,5	—	220	84,0	<i>m</i> ⁺
201	66,0	<i>m</i> ⁺	114	231,9	<i>ff</i>
003	1,0	—	123	196,0	<i>ff</i>
112	114,5	<i>f</i>	221	12,4	—
103	48,5	<i>m</i> ⁻	310	2,0	—
202	0,7	—	204	3,7	—
120	0,6	—	222	505,8	<i>ff</i>
121	108,8	<i>f</i> ⁻	303	30,1	—
113	5,4	—	311	272,6	<i>ff</i>

Il reticolo è sostituito da strati piani esagonali di atomi Ga, come quelli della grafite, con interposti piani di atomi Sr (o Ba); e con una densità di impacchettamento in ogni piano che è, naturalmente, la metà per i secondi.

Nella tabella III sono riuniti i dati strutturali relativi ai composti intermetallici AX₂ attualmente conosciuti, del tipo AlB₂ (esclusi i boruri), compresi quelli con la struttura AlB₂ deformata (Terre rare - Cadmio); e le distanze fra atomi più vicini (colonne (5), (6), (7)). Per poter confrontare fra di loro queste ultime sono stati riportati nella colonna (8) i valori della semidistanza fra due atomi A, corrispondenti al valore del raggio atomico dell'atomo A nel reticolo; nella colonna (9) il raggio di A quale

risulta dalla differenza fra quello di X e la distanza A — X; nella (10), per confronto, i valori del raggio atomico nel reticolo dell'elemento. Nelle colonne (11) e (12), analogamente, i raggi atomici di X nei singoli composti e nei reticoli degli elementi corrispondenti.

Si possono rilevare dalla tabella alcune regolarità.

Gli elementi X capaci di formare reticoli tipo AlB₂ sembrano limitati esclusivamente ai gruppi IIB e IIIB del sistema periodico, e particolarmente agli elementi: Cd, Hg, Ga (e B). Nelle ricerche in corso non è stato infatti ancora possibile ottenere fasi dello stesso tipo con Zn, In e Tl, e nemmeno con gli elementi del IV Gruppo B.

TABELLA II.
Intensità per BaGa₂.

Indici	Intensità		Indici	Intensità	
	colcolata	osservata		calcolata	osservata
001	0,3	—	220	326,6	<i>f</i> ⁺
100	25,0	—	114		
101	367,1	<i>ff</i>	213		
002	76,5	<i>d</i>	221	0,0	—
110	191,7	<i>mf</i>	310	17,8	—
102	20,4	—	204		
111	0,0	—	311	143,2	<i>m</i>
200	8,5	—	303	0,0	—
201	150,8	<i>mf</i> [—]	005	0,0	—
003	0,0	—	222	123,6	<i>md</i>
112	224,1	<i>f</i>	105	73,4	<i>d</i>
103	112,8	<i>md</i>	312	19,4	—
202	12,0	—	400	4,8	—
210	11,0	—	214	19,4	—
211	180,8	<i>mf</i>	401	81,2	<i>d</i>
113	0,0	—	115	0,0	—
300	175,0	<i>mf</i>	304	351,9	<i>ff</i>
004			313		
203			402		
212	17,0	—	205	95,2	<i>d</i>
301	0,0	—	223	0,0	—
104	8,8	—	320	13,0	—
302	125,8	<i>m</i>	321	226,5	<i>mf</i>

TABELLA III.

Dimensioni reticolari e distanze interatomiche nei composti AX_2 , tipo AlB_2 .

Composto (1)	a in Å (2)	c in Å (3)	c/a (4)	Distanze minime			$\frac{1}{2}(\alpha)$ (8)	$(\beta) - \frac{1}{2}(\gamma)$ (9)	Raggio atomico di A (10)	$\frac{1}{2}(\gamma)$ (11)	Raggio atomico di X (12)	Biblio- grafia
				(α) A — A (5)	(β) A — X (6)	(γ) X — X (7)						
LaCd ₂	5,075	3,458	0,68	3,45	3,26 ₅	2,97	1,72 ₅	1,78	1,86	1,48 ₅	—	—
CeCd ₂	5,073	3,450	0,68	3,44	3,26	2,97	1,72	1,77 ₅	1,81 ₅	1,48 ₅	1,49	(1)
PrCd ₂	5,035	3,466	0,69	3,46	3,24 ₅	2,95	1,73	1,77	1,82	1,47 ₅	—	—
NaHg ₂	5,029	3,230	0,64	3,23	3,32	2,90	1,61 ₅	1,87	1,92	1,45	—	(2)
LaHg ₂	4,958	3,640	0,73	3,64	3,40	2,87	1,82	1,96 ₅	1,86	1,43 ₅	1,50	(3)
UHg ₂	4,99	3,226	0,65	3,23	3,31	2,88	1,61 ₅	1,87	1,48	1,44	—	(4)
ThAl ₂	4,393	4,164	0,95	4,16	3,28	2,54	2,08	2,01	1,80	1,27	1,43	(5)
CaGa ₂	4,323	4,323	1,00	4,32	3,31	2,50	2,16	2,06	1,97	1,25	—	(6)
SrGa ₂	4,344	4,732	1,09	4,34	3,46	2,51	2,17	2,20 ₅	2,15	1,25 ₅	—	—
BaGa ₂	4,432	5,064	1,14	4,43	3,61	2,56	2,21 ₅	2,33	2,17	1,28	—	—
LaGa ₂	4,329	4,405	1,02	4,33	3,34	2,50	2,16 ₅	2,09	1,86	1,25	1,35	(6)
CeGa ₂	4,312	4,316	1,00	4,31	3,30	2,49	2,15 ₅	2,05 ₅	1,81 ₅	1,24 ₅	—	(6)
PrGa ₂	4,293	4,293	1,00	4,29	3,29	2,48	2,14 ₅	2,05	1,82	1,24	—	(7)

(1) A. IANDELLI, R. FERRO, «Gazz. chim. ital.», 84, 463 (1954).

(2) J. W. NIELSEN, N. C. BAENZIGER, «Acta Crystall.», 7, 277 (1954).

(3) A. IANDELLI, R. FERRO, questi «Rendic.», VIII, XI, 85 (1951).

(4) R. E. RUNDLE, A. S. WILSON, «Acta Crystall.», 2, 148 (1949).

(5) P. B. BRAUN, J. H. N. VAN VUCHT, «Acta Crystall.», 8, 117 (1955).

(6) F. LAVES, «Naturwiss.», 31, 145 (1943).

(7) A. IANDELLI, «Gazz. chim. ital.», 79, 70 (1949).

Considerando le distanze, si vede che mentre per gli atomi A si può avere sia una contrazione che un allargamento delle distanze, per gli atomi X c'è sempre una contrazione, che, salvo il caso di ThAl₂, è abbastanza piccola e va aumentando regolarmente dai composti col Cd a quelli col Hg e col Ga. Le distanze interatomiche e la struttura complessiva è determinata perciò essenzialmente dagli atomi X. Appare quindi abbastanza ragionevole pensare che la formazione dei composti sia legata alla tendenza degli atomi X ad unirsi fra loro con legami di natura prevalentemente covalente.

Chimica inorganica. — *Composti di Pd⁰ e Pt⁰ con le fosfine aromatiche e gli esteri arilici fosforosi* ^(*). Nota ^(**) preliminare di LAMBERTO MALATESTA e MARIA ANGOLETTA, presentata dal Socio L. CAMBI.

È noto che il nicheltetracarbonile dà luogo con i derivati trivalenti del fosforo, del tipo PX₃, P(OR)₃, PR₃ (X = alogeno, R = aril o alchil) a composti di sostituzione parziale o totale, per esempio Ni(CO)₃P(C₆H₅)₃; Ni(CO)₂[P(C₆H₅)₃]₂; Ni(CO)[P(OC₆H₅)₃]₃; Ni[PCl₂(OC₆H₅)]₄ ⁽¹⁾.

Poiché l'affinità del palladio e del platino, nello stato di ossidazione + 2, con questi stessi derivati fosforati è estremamente più elevata di quella di Ni^{II}, si poteva prevedere che, analogamente a quanto avviene per il nichel, fossero stabili con questi elementi, composti in cui il metallo esplica lo stato di ossidazione formale zero, cioè per esempio del tipo Pd(PR₃)₄ e Pt(PR₃)₄.

La preparazione di questi composti appariva un tempo particolarmente difficile per il fatto che i metallocarbonili di palladio e platino, non essendo stabili, non possono essere adoperati come prodotti partenza. Recentemente, uno di noi, ha isolato i derivati del palladio zerovalente del tipo Pd⁰(CNC₆H₅)₂ ⁽²⁾. Agendo su tali composti con i fosfiti [arilici e le triarilfosfine ci riuscì di ottenere le seguenti reazioni di sostituzione e di addizione:

- 1° Pd(CNC₆H₅)₂ + 3 P(OAr)₃ = Pd(CNC₆H₅)P(OAr)₃ + CNC₆H₅
[con il tris(p-clorofenil)fosfito];
- 2° Pd(CNC₆H₅)₂ + 4 P(OAr)₃ = Pd[P(OAr)₃]₄ + 2 CNC₆H₅
(con il trifenilfosfito);
- 3° Pd(CNC₆H₅)₂ + 4 P(Ar)₃ = Pd(PAr₃)₄ + 2 CNC₆H₅
(con tutte le triarilfosfine).

In un secondo tempo i prodotti con le triarilfosfine furono ottenuti anche per questa via:



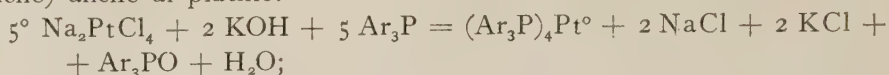
(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica generale dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1955.

(1) L. MALATESTA e A. SACCO, «Ann. Chimica», **44**, 134 (1954).

(2) L. MALATESTA, «Rend. Acc. Naz. Lincei», VIII, fasc. 3, marzo 1954.

Questa stessa reazione risultò applicabile (limitatamente alle fosfine triariliche) anche al platino.



e si prepararono così per la prima volta derivati del platino stabili all'aria, in cui il metallo esplica lo stato di ossidazione zero.

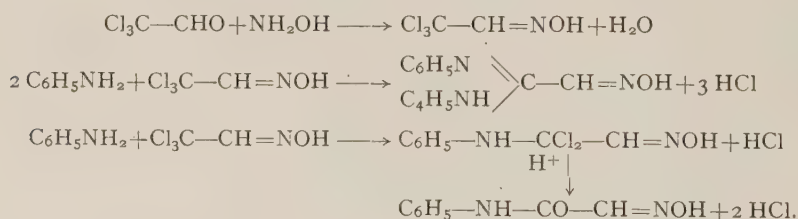
I composti $\text{Pd}^0(\text{CNC}_6\text{H}_5)_3\text{P}(\text{OAr})_3$ e $\text{Pd}^0[\text{P}(\text{OAr})_3]_4$ sono bianchi, cristallini, solubili assai nei solventi organici, meno nell'alcol da cui possono essere ricristallizzati.

I composti $\text{Pd}^0[(\text{PAr})_3]_4$ sono analoghi ai precedenti, di colore giallo chiaro. Ambedue sono stabili all'aria per alcuni giorni.

I composti $\text{Pt}^0[(\text{Ar}_3\text{P})_3]_4$ sono cristallini, di colore giallo intenso. Hanno circa la stessa solubilità e stabilità dei composti di palladio.

Chimica-fisica. — *Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer: influenza dei sostituenti all'anello benzenico sulla formazione delle isonitrosoacetanilidi* (*). Nota II di GIORGIO FAVINI e FRANCO PIOZZI, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

Sandmeyer per il primo osservò⁽¹⁾ che anilina, cloralio idrato e idrosilammina possono reagire tra loro in modo diverso a seconda che si opera in mezzo neutro tamponato oppure in soluzione acida. In un primo tempo si forma l'ossima del cloralio, che nel primo caso con due molecole di anilina dà la difenilisonitrosoacetamidina, e nel secondo caso con una molecola di anilina dà l'isonitrosoacetanilide.



La reazione di formazione delle isonitrosoacetanilidi è stata applicata da Sandmeyer stesso⁽¹⁾ e da altri autori negli anni successivi⁽²⁾ a diverse

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano e l'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) T. SANDMEYER, « Helv. », 2, 234 (1919).

(2) « Org. Synth. » 1, 327; « B. », 57, 1149 (1924); « B. », 58, 1465 (1925); « J.A.C.S. », 69, 381 (1947); « J.A.C.S. », 73, 3579 (1951); « Helv. », 7, 1030 (1924); « Helv. », 9, 578 (1926); « J. Org. Chem. », 17, 149, 157 (1952); « J. Pharm. Soc. Japan », 58, 961 (1938); 71, 710 (1951); « Compt. rend. », 172, 1234 (1921); « Bull. », 33, 637, 1297 (1923).

aniline sostituite all'anello benzenico operando in condizioni diverse e con rendimenti molto variabili. Abbiamo perciò creduto utile eseguire uno studio sistematico della reazione in modo da individuare i fattori che influenzano positivamente o negativamente l'andamento del processo e cioè: la natura del sostituito R nell'anilina di partenza, la posizione di tale sostituito nell'anello benzenico nei confronti dell'amminogruppo, l'acidità della soluzione e la presenza di sali.

Per l'interpretazione dei risultati della prima serie di prove da noi eseguite in assenza di sali e a parità di tutte le altre condizioni, abbiamo considerato l'influenza del gruppo R sulla distribuzione di carica elettronica nell'anello benzenico per effetto induttivo e per effetto di risonanza, dovendo risultare la reattività tanto maggiore quanto è minore la densità elettronica all'atomo di carbonio cui è legato l'amminogruppo perché in tal caso risulta più facilitata l'eliminazione di idrogeno come protone.

Per il nitrogruppo e il carbossile, in cui si sommano l'effetto induttivo e quello di risonanza, l'ordine di reattività dovrebbe essere: para > orto > meta > non sostituito; i risultati sperimentali seguono la stessa successione: unica eccezione apparente l'o-nitroanilina a causa della sua scarsa solubilità in acido cloridico; se infatti il rendimento viene calcolato rispetto alla nitroanilina passata in soluzione, risulta in accordo con l'ordine di reattività sopra indicato.

Se R è un alogeno per effetto induttivo si dovrebbe avere: orto > meta > para > non sostituito; per effetto di risonanza si ha invece un aumento di densità elettronica in posizione orto e para con conseguente diminuzione di reattività nei confronti della posizione meta. I risultati ottenuti sperimentalmente sono in buon accordo con queste previsioni.

Per le toluidine, poiché il gruppo metilico ha effetto induttivo —I, l'ordine di reattività dovrebbe essere: non sostituito > para > meta > orto, con differenze però molto piccole tenuto conto del debole effetto induttivo del gruppo metilico. L'ordine da noi osservato sperimentalmente è stato: para > non sostituito > meta, mentre per il derivato orto non è stata ottenuta, in queste condizioni, formazione di isonitrosoacetilderivato probabilmente per impedimento sterico del gruppo —CH₃.

Per le anisidine, intervenendo contemporaneamente l'effetto induttivo e quello di risonanza con prevalenza del secondo, l'ordine di reattività dovrebbe essere: meta > non sostituito > para > orto. I risultati sperimentali seguono invece l'ordine: para > non sostituito > orto. L'inversione para-non sostituito verificatasi negli ultimi due casi non dovrebbe infirmare la validità generale delle altre prove, trattandosi di reattività quasi uguali.

Per un confronto generale fra tutte le aniline monosostituite esaminate si sarebbero potuti confrontare i valori della densità elettronica all'atomo di carbonio cui è legato l'amminogruppo per ognuno di questi composti, calcolate con il metodo degli orbitali molecolari, nella sua approssimazione L.C.A.O. I valori ottenuti per tali densità di carica sono però da considerarsi sempre in senso relativo per le approssimazioni semplifica-

tive introdotte nei calcoli e per l'arbitrarietà nell'assegnazione dei valori ai parametri necessari per tener conto della natura chimica degli eteroatomi presenti. Di conseguenza abbiamo preferito fare riferimento all'acidità delle aniline esaminate, che, come dato sperimentale, meglio dovrebbe adattarsi all'interpretazione della maggiore o minore facilità della reazione, e che inoltre permette di comprendere nella rassegna anche le aniline N-sostituite. Come dato di confronto abbiamo perciò scelto il pK_A delle aniline studiate, ricavato dai lavori di Hall ⁽³⁾, Roberts e coll. ⁽⁴⁾ e Winklenblech e Lunden ⁽⁵⁾. Per le iodoaniline è stato da noi calcolato approssimativamente dai dati di Bennet, Brooks e Glasstone ⁽⁶⁾ (che lo hanno determinato sperimentalmente in soluzione alcolica al 30 % per l'anilina e tutte le alogeno-aniline), osser-

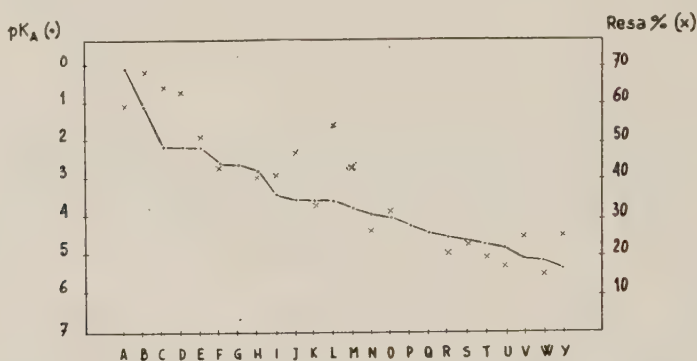


Fig. 1.

A=o-NO ₂	B=p-NO ₂	C=p-COOH	D=o-COOH	E=o-I
F=m-NO ₂	G=o-Br	H=o-Cl	I=m-COOH	J=m-I
K=m-Br	L=m-Cl	M=p-I	N=p-Br	O=p-Cl
P=m-OCH ₃	Q=o-CH ₃	R=o-OCH ₃	S=Anilina	T=m-CH ₃
U=N-metil	V=p-CH ₃	W=N-etil	Y=p-OCH ₃	

vando che la differenza del pK_A tra i due solventi (alcol al 30 % e acqua) è pressochè costante in tutti i casi. Dalla fig. 1, in cui per i diversi sostituenti R riportati in ascissa, sono indicati in ordinata i valori del pK_A e del rendimento ottenuto nella reazione, si può vedere che la proporzionalità tra reattività dell'anilina e acidità della stessa risulta verificata. Va osservato che i valori del pK_A si riferiscono a 25° mentre la reazione avviene a 100°; tuttavia è lecito ritenere che l'ordine di successione di acidità delle aniline non subisca variazioni sensibili al variare della temperatura.

Nella seconda serie di prove, eseguite su una stessa anilina, si è potuto osservare che il rendimento della reazione diminuisce aumentando l'acidità; in presenza di solfato di sodio o di potassio o di ammonio aumenta pro-

(3) N. F. HALL, « J.A.C.S. », 52, 5115 (1930).

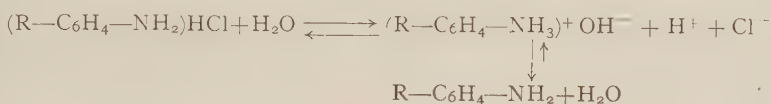
(4) J. D. ROBERTS, R. L. WEBB, E. A. MC ELHILL, « J.A.C.S. », 72, 408 (1950).

(5) WINKLENBLECH, « Zeit. phys. Chem. », 36, 546 (1901); LUNDEN, « Zeit. phys. Chem. », 54, 532 (1906).

(6) G. M. BENNET, G. L. BROOKS e S. GLASSTONE, « J.C.S. », 1825 (1935).

porzionalmente alla quantità di sale impiegato; in presenza di bisolfato di potassio invece è quasi analogo a quello in assenza di sali e in presenza di acido solforico diminuisce; in presenza di cloruro di sodio diminuisce all'aumentare della quantità di sale presente in soluzione; sciogliendo l'anilina in acido solforico il rendimento aumenta sempre per aggiunta di solfato di sodio e diminuisce per aggiunta di cloruro di sodio; infine l'aggiunta di altri sali senza ioni in comune (KBr, NaNO₃) abbassa in ogni caso il rendimento della reazione.

Considerando l'equilibrio idrolitico in soluzione acida e quello di dissociazione dell'anilina:



poichè la reazione va più facilmente quanto più è presente in soluzione anilina indissociata, si spiega facilmente come l'aumento di acidità e la presenza di un sale con un ione in comune spostino sfavorevolmente l'equilibrio.

La presenza del solfato di sodio non ha semplice effetto salante (che in egual misura dovrebbero avere anche gli altri sali senza ioni in comune) e ciò viene confermato anche dal fatto che provoca un aumento di resa anche operando in soluzione solforica oltre che in soluzione cloridrica.

Gli ioni SO₄²⁻ debbono perciò avere un intervento concreto nella reazione, come già sostennero Marvel e Hiers ⁽⁷⁾ e come è confermato anche da questa prova da noi eseguita: se dopo avvenuta la precipitazione e la separazione dell'isonitrosoacetanilide si aggiunge una forte quantità di solfato di sodio senza scaldare si ha separazione di una modesta aliquota di isonitrosoacetanilide, scaldando invece all'ebollizione per pochi minuti si ha separazione di un ulteriore abbondante quantitativo di sostanza.

In una terza serie di prove abbiamo potuto osservare quanto segue: il rendimento massimo ottenibile in ogni caso oscilla tra l'80% e il 90%; per le aniline a carattere più acido la quantità di solfato necessaria per ottenere tale rendimento è poca, mentre quantità maggiori sono richieste per le aniline a carattere più basico; un'aggiunta troppo abbondante di solfato può essere controproducente perchè le insolubilizza o facilita la formazione di prodotti resinosi che abbassano le rese; la quantità di acido più conveniente da usare è quella stechiometrica per le aniline più basiche e quella strettamente necessaria per avere a caldo soluzione completa (prima dell'aggiunta dell'idrossilammina) negli altri casi. Le considerazioni fatte per le aniline monosostituite dovrebbero estendersi ugualmente anche ai derivati polisostituiti; l'unica complicazione che abbiamo riscontrato è la difficoltà di ottenere nelle stesse condizioni completa solubilizzazione di tali aniline, il che provoca un costante abbassamento delle rese.

(7) C. S. MARVEL e G. S. HIERS, «Org. Synth.», I, 327.

PARTE SPERIMENTALE. - Sono stati usati prodotti puri per laboratorio o prodotti commerciali opportunamente purificati per distillazione o cristallizzazione.

La prima serie di prove è stata condotta su 0,026 moli di anilina con 5 cc. di HCl conc. e 65 cc. di acqua. (La quantità di HCl usata è circa il doppio del teorico per ottenere completa soluzione di tutte le aniline sperimentate). Sono stati aggiunti successivamente 4,5 gr. di cloralio idrato in 50 cc. di acqua e gr. 5,5 di $\text{NH}_2\text{OH} \cdot \text{HCl}$ in 25 cc. di acqua; portato all'ebollizione per 5 minuti. Le rese indicate sono riferite al precipitato ottenuto direttamente nella reazione, salvo alcuni casi indicati nelle tabelle in cui il prodotto, molto impuro, è stato purificato o per cristallizzazione da acqua o alcol acquoso o per soluzione in idrato sodico al 5 % e successiva precipitazione con acido cloridrico diluito. Le rese indicate sono la media di più prove.

TABELLA I.

Anilina	Resa %	p. f.	Anilina	Resa %	p. f.
Anilina	21,6	175,5	o-cloroanilina	40	151-152
N-metilanilina	16,7 (1)	183	m-cloroanilina	54	154
N-etilanilina	14,6 (1)	119	p-cloroanilina	31,6	165-166
o-toluidina	—	—	o-bronoanilina	51	160
m-toluidina	19,2	140-141	m-bromoanilina	34,5	135
p-toluidina	25,5	165-166	p-bromoanilina	26 (1)	166
o-anisidina	20,6	141	o-iodoanilina	51	151-152
m-anisidina	—	—	m-iodoanilina	47 (1)	166
p-anisidina	25,8	183-184	p-iodoanilina	43 (1)	184
o-nitroanilina	33,5	142	ac.o-amminobenzoico	61,3	208
m-nitroanilina	42,9	180-181	ac.m-amminobenzoico	41,2	228
p-nitroanilina	68,2	185 (2)	ac.p-amminobenzoico	64	310

(1) Dopo purificazione.

(2) Il p. f. trovato è in accordo con quello di RUFE e KERSTEN («*Helv.*», 9, 578 (1926)), e non con quello di BORSCHÉ (W. BORSCHÉ, H. WEUSSMANN, e A. FRITSCHÉ, «*B.*», 57, 1149 (1924)).

I risultati della seconda serie di prove eseguite sull'anilina sono raccolti nella tabella II, in cui sono riportati nell'ordine (riferiti sempre a 0,026 moli di anilina) il tipo di acido usato; la quantità in cc.; il tipo di composto aggiunto; la quantità di esso in grammi e infine la resa di reazione.

TABELLA II.

HCl	5	—	—	21,6 %	HCl	5	Na ₂ SO ₄	28,5	82 %
HCl	2,5	—	—	31,5 %	HCl	5	K ₂ SO ₄	34,5	74,7 %
HCl	10	—	—	3,3 %	HCl	5	(NH ₄) ₂ SO ₄	26,5	75,6 %
HCl	5	H ₂ SO ₄	3,8	7,8 %	HCl	5	NaCl	2,25	22,2 %
HCl	5	H ₂ SO ₄	19,7	nulla	HCl	5	NaCl	11,7	7,8 %
HCl	5	Na ₂ SO ₄	5,5	39,7 %	HCl	5	KBr	23,8	9,5 %
HCl	5	K ₂ SO ₄	6,75	26,8 %	HCl	5	NaNO ₃	17,1	nulla
HCl	5	(NH ₄) ₂ SO ₄	5,12	36,1 %	H ₂ SO ₄	3,3	Na ₂ SO ₄	28,5	69 %
HCl	5	KHSO ₄	5,3	17,1 %	H ₂ SO ₄	3,3	NaCl	11,7	15,6 %

Sulla meta-toluidina si sono avute le seguenti rese:

- 19,2 % in assenza di solfato di sodio (vedi tabella I).
 26,5 % aggiungendo gr. 5,5 di solfato di sodio all'inizio della reazione.
 40,7 % aggiungendo gr. 5,5 di solfato di sodio all'inizio della reazione e gr. 23 successivamente portando all'ebollizione.
 30,1 % aggiungendo gr. 5,5 di solfato di sodio all'inizio della reazione e gr. 23 successivamente a freddo.
 58,9 % aggiungendo gr. 28,5 di solfato di sodio all'inizio della reazione.

TABELLA III.

o-anisidina	20,6	23,4	63,7	p. f. 141
m-anisidina	—	—	75	p. f. 154-155
p-anisidina	25,8	38	82	p. f. 183-184
o-toluidina	—	—	44	p. f. 115
p-toluidina	25,5	31,4	81	p. f. 165-166

Per alcune aniline soltanto (di quelle a carattere più basico) riportiamo nella tabella III le rese rispettivamente ottenute in assenza di solfato, con gr. 5,5 e con gr. 28,5 di solfato di sodio, sempre riferite a 0,026 moli di anilina.

Geologia. — *Contributo alle conoscenze paleontologiche del Pliocene dei dintorni di Strongoli, nel Crotonese (Catanzaro)* (*). Nota di ROBERTO MALARODA, presentata (**) dal Corrisp. GB. DAL PIAZ.

Durante il corso del rilevamento geologico che ha servito di base per la sua tesi di laurea il dott. Aldo Enrico Fazia raccoglieva nel 1950-51 un certo numero di fossili nelle formazioni plioceniche dei dintorni di Strongoli⁽¹⁾. Questo materiale, in parte da lui stesso analizzato sotto la guida dello scrivente [12] è ora suddiviso fra le collezioni dei musei degli Istituti di Geologia di Padova e di Torino. Lo studio di esso è stato svolto essenzialmente in base alla bibliografia italiana e facendo continuo riferimento ai tipi delle collezioni Bellardi e Sacco, conservati nel museo dell'Istituto di Torino, con i quali quasi tutte le forme sono state confrontate.

Numerosi Autori hanno contribuito nel secolo scorso alla conoscenza paleontologica del Pliocene calabrese, da R. A. Philippi, a O. G. Costa, a D. Lovisato, a G. Seguenza [22, 23, 24, 25], a C. De Stefani [10], ad A. Neviani [15, 16], che dà un quadro riassuntivo delle faune, e ad E. Cortese [8], che riporta i dati paleontologici di G. Di Stefano. Alcuni di questi AA. si sono occupati anche in particolare della paleontologia pliocenica del Catanzarese e del Marchesato. Più recentemente, nella sua monografia sul Pliocene ed il Quaternario dell'Italia meridionale, M. Gignoux [13] presenta, accanto a decisivi contributi stratigrafici, numerose liste di fossili e segnalazioni di località fossilifere; nuovi dati paleontologici, più strettamente pertinenti alla penisola di Crotona, sono stati aggiunti infine da G. Ruggieri [19, 20].

La serie stratigrafica pliocenica dei dintorni di Strongoli è costituita da tre complessi litologicamente differenziabili: i conglomerati di base spesso poggianti sugli scisti cristallini, talora invece sulla serie gessoso-solfifera, le argille azzurre con sabbie intercalate di facies piacentiana, e le sabbie gialle con argille intercalate di facies astiana. Mentre i conglomerati sono paleontologicamente sterili, le argille, molto potenti, spesso salate e coperte da incrostazioni saline ([11], p. 40) sono ricche di fossili. Sopra di esse, con passaggio abbastanza netto, si stendono le sabbie e le arenarie calcaree dell'Astiano, che in questa parte della Calabria raggiungono la massima potenza e formano le parti più alte di tutte le colline terrazzate del Marchesato. Esse sono particolarmente ricche di Lamellibranchi, e fra questi

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Torino con l'aiuto finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) Foglio 238 (Crotona) della Carta Geologica d'Italia alla scala 1:100.000; tavola topografica IV NW (Strongoli) alla scala 1:25.000.

di Ostreidi e Pettinidi ([8], p. 171), ma anche di Gasteropodi e Brachio-podi e in qualche punto cedono il posto a vere e proprie lumachelle compatte ([13], p. 124; [11], p. 41).

I fossili in esame provengono in parte dalle argille azzurre inferiori ed in parte dalle sabbie gialle. I primi sono stati raccolti nei dintorni immediati di Strongoli (località Timpa Biso, Cordarelle, Pizzuno, Molarelle). Si tratta delle forme elencate qui di seguito, alcune delle quali sono nuove per il Pliocene in facies piacentiana del Crotonese e vanno ad aggiungersi a quelle già segnalate dal Philippi, dal Neviani, e dallo Gignoux ed a quelle più recentemente determinate dal Ruggieri.

Arca (Anadara) diluvii (Lam.): Due valve. CZ (pp, as); ST (as) ⁽²⁾.

Limopsis (Limopsis) aurita (Brocchi): Nei numerosi esemplari (15 valve sinistre ed 8 destre) è rappresentata tutta la gamma di variabilità già descritta dal Sacco ([2], 26, pp. 39, 40, t. 9, ff. 23-32). C (p, pp); CZ (pp, as).

Limopsis (Pectunculina) minuta Phil.: Un esemplare di valva destra, con ornamentazione radiale rada ben visibile su tutta la superficie. Corrisponde perfettamente, anche per questo carattere, ad alcuni esemplari delle collezioni di Torino. C (pp); CR (pm).

Dentalium (Dentalium) passerinianum Cocc.: Un piccolo esemplare. CR (pm) [20].

Dentalium (Dentalium) sexangulum Schröt.: Numerosi frammenti, appartenenti ad almeno otto individui. Nella parte inferiore alcuni esemplari manifestano una tendenza ad acquisire l'ornamentazione tipica della var. *striolatissima* Sacco. CZ (pp, as); CR (pi); ST (as).

Dentalium (Entalis) cfr. badensis (Partsch) (t. 1, ff. 3 e 4): Due frammenti di parte posteriore della conchiglia sembrano corrispondere bene ad esemplari provenienti dal bacin o di Vienna e dai Colli Torinesi, conservati nelle collezioni del museo di Torino. La vicina *E. miocenica* (Micht.) presenta invece sempre sulle coste delle minute granulazioni che qui mancano completamente. C (p).

Dentalium (Entalis) rectum (L.) (t. 1, ff. 7 e 8): Due frammenti di notevole sviluppo, a sezione sempre circolare, conchiglia subrettilinea, e numerose coste in prevalenza robuste. L'ornamentazione è particolarmente vicina a quella della var. *dertonensis* Sacco. Diam. max.: mm 12. CR (pp, pm).

Architectonica simplex (Bronn): Un esemplare con le seguenti dimensioni: alt.: mm 11 (r.) ⁽³⁾; diam.: mm 20 (r.). Forma segnalata in Calabria solo nel Tortonian.

(2) Sono state usate, per indicare le precedenti segnalazioni nel Pliocene calabrese, le seguenti abbreviazioni : C = Calabria in generale, esclusa la provincia di Catanzaro; CZ = Catanzarese, esclusa la penisola di Crotone; CR = Crotonese, esclusi i dintorni di Strongoli; ST = dintorni di Strongoli; p = Pliocene in genere; pp = argille della facies piacentiana; as = sabbie della facies astiana; pi, pm = Pliocene inferiore e Pliocene medio [19, 20].

(3) (r.) = dimensioni ricostruite su esemplari incompleti.

Turritella (Zaria) subangulata (Brocchi): Diversi individui che rientrano in gran parte nella var. *spirata* Brocchi (9 esemplari), mentre meno rappresentate sono forme corrispondenti alla var. *depressocarinata* Sacco (3 es.) e alla var. *pseudorotundula* Sacco (2 es.). C (p); Cz (pp, as); Cr (pp, pi); ST (as).

Turritella (Haustator) tornata (Brocchi): Numerosi frammenti, appartenenti ad almeno nove individui, in maggioranza con i caratteri della var. *peraequicincta* Sacco, salvo due che hanno il caratteristico profilo della var. *imbricatarioides* Sacco. CZ (p); ST (as).

Vermetus (Lemantina) arenarius L.: Due esemplari di notevoli dimensioni (diam. max. del tubo: mm 15), con ornamentazione uniforme o subuniforme, come nel tipo. CZ (as).

Vermetus (Petalochonchus) intortus (Lam.): Numerosi frammenti (di almeno 3 individui), sia della parte spirale ornata e a sezione angolosa, sia di quella libera con sole strie di accrescimento e sezione circolare. Notevoli, rispetto alle forme del bacino ligure-piemontese, le rilevanti dimensioni (diam. max. tubi adulti: mm 7,5; spessore pareti tubi adulti: mm 1,25). Per la corrispondenza delle proporzioni tra le parti aggrovigliate e quelle diritte, lisce, sembra che anche queste ultime appartengano al *V. intortus* (Lam.) anzichè al *V. semisurrectus* Biv. ([4], 1912, p. 156, t. 23, ff. 87-90, t. 24, ff. 1-10); la massima lunghezza raggiunta da questi pezzi diritti è di mm 48. C (as).

Chenopus uttingerianus (Risso): Nonostante l'incompletezza dei numerosi (19) esemplari, quasi tutti mancanti del labbro esterno della bocca, l'ornamentazione e la misura dell'angolo apicale permettono una determinazione sicura e, in particolare, un avvicinamento alle varietà più ornate del *Ch. uttingerianus* (var. *ornatissima* Sacco: [2], 30, p. 115, t. 24, ff. 60-61; [27]). C (p); CZ (pp, as).

Polynices (Lunatia) helycinus (Brocchi): Dopo la pubblicazione dell'olotipo ([18], p. 161), la caratterizzazione di questa specie, e soprattutto la sua differenziazione dal *P. fuscus* Blainv., quali erano state date dal Cerulli-Irelli ([4], 1914, pp. 216 e 217, t. 19, ff. 20-28 e t. 20, ff. 1-4) non sembrano più accettabili. Comunque, i cinque esemplari in esame corrispondono perfettamente a quelli determinati come *N. catena helicina* dal Sacco, provenienti dal bacino ligure-piemontese. Come questi, in più punti, essi presentano traccia dell'originaria colorazione caffè-latte. Le dimensioni, prese su un esemplare piccolo, sono le seguenti: alt.: mm 13,5; largh.: mm 13. Molte delle forme citate da varie località italiane come *P. fuscus* Blainv. seguono probabilmente la definizione del Cerulli-Irelli e vanno quindi considerate sinonime. Il *P. helycinus* è noto dall'Elveziano al Calabriano di molte località italiane mentre nel Pliocene della Calabria è stata segnalata ripetutamente la *N. catena*, citata anche per l'Astiano di Strongoli.

Tritonium (Sassia) apenninicum (Sassi): Due esemplari di piccole dimensioni (alt. max.: mm 20 (r.); largh. max.: mm 12 (r.)), nettamente minori di quelle medie comuni nel Piacenziano ligure-piemontese. C (as).

Typhis (Cyphonochilus) fistulosus (Brocchi): Un unico esemplare. CR (pi).

Macrurella cf. *nassoides* (Grat.): Tre esemplari frammentari. CZ (pp).

Nassa (Telasco) italica (May.): Ventidue esemplari molto tipici e di dimensioni medie (massimo: alt.: mm 15; largh.: mm 8). C (pp); CZ (pp); CR (pp, pi).

Nassa (Hinia) musiva Brocchi: Un piccolo esemplare (alt.: mm 10 (r.); largh.: mm 5 (r.)). C (p, pp); CZ (as).

Nassa (Amycla) semistriata (Brocchi): Due esemplari di piccole dimensioni (massimo: alt.: mm 11; largh.: mm 6) ben corrispondenti, come ornamentazione, al tipo del Brocchi ([3], 2, p. 651, t. 15, f. 15) e del Bellardi ([2], 3, p. 145, t. 9, f. 14) salvo un appena percettibile accenno ad ornamentazione trasversale nella parte giovanile. C (p, pp); CZ (pp); CR (pi); ST (as).

Fusus lamellosus Bors. (t. 1, ff. 1 e 2): Tre esemplari dei quali quello più adulto (alt.: mm 28 (r.); largh.: mm 9,5 (r.)) presenta una minor accentuazione dell'ornamentazione trasversale degli ultimi anfratti. CZ (pp).

Turricula (Uromitra) cupressina (Brocchi) *reticulomarginata* Sacco: Un unico esemplare, che differisce da quelli del bacino ligure-piemontese descritti dal Bellardi ([2], 5, II parte, p. 27, t. 5, f. 26; 30, p. 85) unicamente per il fatto che l'accentuazione dell'ornamentazione trasversale è già subeguale a quella dell'ornamentazione longitudinale fin dai primissimi anfratti. C (as); CZ (pp); CR (pp).

Turricula (Uromitra) pyramidella (Brocchi) (t. 1, f. 10): Un esemplare molto caratteristico. Per quanto riguarda la forma esso corrisponde al tipo della specie ([2], 5, II parte, p. 46, t. 5, f. 51) mentre per l'ornamentazione riunisce la discontinuità di quella trasversale (nel bacino ligure-piemontese caratteristica del tipo e della varietà *inaequicostata* Sacco ([2], 5, II parte, p. 47, t. 5, f. 52; 30, p. 85)) con la presenza, sulla parte superiore di tutti gli anfratti, della fine ornamentazione longitudinale che caratterizza nel bacino ligure-piemontese la sola varietà *miostriata* Sacco ([2], 5, II parte, p. 47; 30, p. 85, t. 19, f. 13). Dimensioni: alt.: mm 25; largh.: mm 8 (r.). C (as).

Sveltia lyrata (Brocchi) *spinulosa* (Brocchi): Due esemplari. C (p); CZ (as).

Conus (Conospira) antediluvianus Brug.: Quattro esemplari a spira mediamente elevata e rampa suturale poco inclinata. Si avvicinano pertanto specialmente alle forme figurate dall'Hörnes ([14], 3, p. 38, t. 5, f. 2) e alla varietà *dertonensis* Sacco ([2], 13, p. 41, t. 4, f. 29) rispetto alla quale hanno granulosità carenali meno nettamente trasversali e solchi longitudinali limitati solo all'estremo inferiore dell'ultimo anfratto. Simile per profilo, ma quasi priva dei solchi ora nominati anche all'estremo inferiore della conchiglia, è la varietà *scalata* Grat. ([9], 6, p. 16, t. 1, ff. 21-22). ST (as).

Raphitoma harpula (Brocchi): Un esemplare di dimensioni medie (alt.: mm 22 (r.); largh.: mm 16,5). C (as); CZ (pp); CR (pp).

Raphitoma hispidula (Jan) (t. 1, f. 5): Un esemplare di piccole dimensioni, perfettamente corrispondente alla forma tipo ([2], 2, p. 304, t. 9, f. 18). Dimensioni: alt.: mm 9,5; largh.: mm 4,5 (r.). C (as).

Drillia allionii Bell.: Otto esemplari. Le dimensioni sono sempre inferiori a quelle degli individui adulti del bacino ligure-piemontese (alt. max.: mm 25; largh. max.: mm 9 (r.)). Per numero e forma delle coste trasversali e per una certa tendenza a profili meno slanciati si avvicina, più che al tipo, alla varietà *pliosubaspirata* Sacco ([2], 2, p. 92; 30, p. 44, t. 12, ff. 10 e 11), che mi pare corrisponda perfettamente alla varietà *altavillensis* Cipolla ([7], p. 118, t. 12, f. 6).

Drillia crispata (Jan) (t. 1, f. 6): Due esemplari con spirale un po' più tozza di quanto non sia normalmente nelle forme piemontesi ([2], 2, p. 131, t. 4, f. 21; [1], p. 597, t. 4, f. 2) e del bacino di Vienna ([14], 3, p. 367, t. 39, f. 13). Dimensioni: I: alt.: mm 13 (r.), largh.: mm 5,5 (r.); II: alt.: mm 12,5, largh.: mm 5 (r.). CZ (pp); CR (pm).

Drillia sigmoidea (Bronn): Tre esemplari. Rispetto a quelli del bacino ligure-piemontese presentano dimensioni un po' superiori alle medie ([2], 2, p. 144, t. 5, f. 4); rispetto a quello di M. Mario ([4], 1910, p. 50, t. 4, ff. 53 e 54) hanno forse un più rapido e netto restringimento nella parte inferiore dell'ultimo anfratto; infine rispetto alle forme di Altavilla ([7], p. 124, t. 12, f. 14) li caratterizza un profilo leggermente meno slanciato. Dimensioni massime: alt.: mm 14; largh.: mm 5 (r.). CZ (pp); CR (pp, pi).

Pleurotoma rotata Brocchi: Sei esemplari di cui quattro ben corrispondenti al tipo mentre i due rimanenti si avvicinano notevolmente, per la presenza di una carena con denti bifidi e più numerosi, nonché per la maggior accentuazione del filetto longitudinale sottosuturale che perlopiù è subgranuloso, alla varietà *parvula* Sacco ([2], 2, p. 15, t. 1, f. 4; 30, p. 40). C (as).

Pleurotoma turricula Brocchi: Quattro esemplari nei quali già si nota la caratteristica variabilità ([2], 2, pp. 40-41). Dimensioni massime: alt.: mm 25; largh.: mm 8,5. CZ (as).

Surcula brugnonei Seg. (t. 1, f. 9): Un esemplare perfettamente corrispondente a due altri, provenienti dal Pliocene di Altavilla e conservati nel museo dell'Istituto di Geologia di Torino ([2], 2, pp. 66-67; [24], 1875, p. 204; [7], p. 129, t. 12, f. 21).

Surcula dimidiata (Brocchi) (t. 1, ff. 11-14): Quattordici esemplari, tutti molto giovani; il loro scarso sviluppo è ancora inferiore a quello segnalato come caratteristico per il giacimento di Altavilla dal Cipolla. Gli esemplari presentano una notevole variabilità che li fa avvicinare più o meno al tipo, alle tre varietà distinte dal Sacco per il bacino ligure-piemontese ([2], 30, p. 43, t. 11, ff. 53-57) ed alle due segnalate dal Cipolla per Altavilla ([7], pp. 130-131, t. 12, ff. 22-24). I caratteri maggiormente variabili sono: l'accentuazione dei filetti longitudinali, l'accentuazione della carena che può essere più o meno nodulosa, i nodi della carena variabili

di numero e di forma, la posizione della carena più o meno avvicinata alla sutura inferiore, il diverso angolo della spira. Particolarmente comune sembra, per la sua forma slanciata, la *S. dimidiata mioperstriata* Sacco. Dimensioni massime: alt.: mm 22; largh.: mm 7. C (p); CZ (pp, as); CR (pp, pi); ST (as).

Ringiculella auriculata (Mén.) (t. 1, f. 15): Cinque esemplari. Appartengono ad una forma con tre sole pieghe columellari, piuttosto inflata, ed a superficie perfettamente liscia o, talora, con solo qualche leggerissimo accenno a strie di accrescimento trasversali o, nella parte inferiore dell'ultimo anfratto, a filetti longitudinali. Corrisponde perciò bene al tipo della specie nel senso del Sacco ([2], 12, pp. 17-31), mentre, secondo l'interpretazione che dà di queste forme il Cerulli-Irelli ([4], 1910, pp. 42-43, t. 4, ff. 27-32), i nostri esemplari avrebbero caratteri intermedi tra quelli del tipo e quelli della varietà *buccinea* Brocchi. C (p); CZ (pp); CR (pm).

I fossili del Pliocene in facies astiana sono stati raccolti nelle sabbie gialle alte della collina su cui è costruito l'abitato di Strongoli e in quelle de «le Murgie», qualche km ad W di Strongoli. Sulla paleontologia dell'Astiano crotonese dà un semplice accenno il Cortese ([8], p. 171), mentre allo Gignoux va il merito della segnalazione del giacimento di Strongoli ([13], p. 122); questo A. ([13], p. 642) elenca 33 forme della località, fra le quali solo 2 coincidono con quelle esaminate nel presente studio e qui di seguito elencate.

Terebratula cf. *scillae* Seg. (t. 1, f. 17): Quattro esemplari, di cui due quasi completi, sono attribuibili alla *T. scillae* o alla *T. ampulla* (Brocchi). I due più completi sono in particolare maggiormente vicini, almeno per quanto riguarda i caratteri esterni, alla forma del Seguenza ([22], t. 3, ff. 1-5 e t. 4, f. 1; [21], p. 11, t. 2, ff. 1-3; [23], pp. 61-72, t. 3, ff. 1-11). Dimensioni: lungh.: mm 52; largh.: mm 42; spess.: mm 26. C (p).

Terebratula sinuosa Brocchi (t. 1, f. 16): Un esemplare (lungh.: mm 40; largh.: mm 34; spess.: mm 24). La forma *T. ampulla* (Brocchi) *pseudosinuosa* Sacco ([21], p. 14, t. 3, ff. 1 e 2) dell'Astiano piemontese sembra, almeno per caratteri esterni, non separabile dalla *T. sinuosa*. Peraltro i tipi del Sacco sono andati interamente distrutti durante la seconda guerra mondiale e non si è potuto procedere ad un confronto diretto con essi. C (as); CZ (as).

Ostrea edulis L. *lamellosa* Brocchi: Una valva sinistra e due destre, di medie dimensioni. C (p, as); CZ (pp, as); CR (pp).

Isognomodon maxillatum (Lam.) *soldanii* (Desh.): Frammenti e modelli di almeno due esemplari. Gli *Isognomodon* sono particolarmente frequenti nella collina de «le Murgie» mentre non si trovano in quella di Strongoli ([11], p. 42). C (p); CZ (as).

Pecten cf. *jacobaeus* (L.): Due esemplari di valve sinistre di medio sviluppo, attribuibili a questa specie o al *P. rhegiensis* (Seg.) ([2], 24, p. 59, t. 18, ff. 11-4). C (p, as); CZ (pp, as).

Chlamys (Aequipecten) scabrella (Lam.): Sette valve. C (p, as); CZ (as); ST (as).

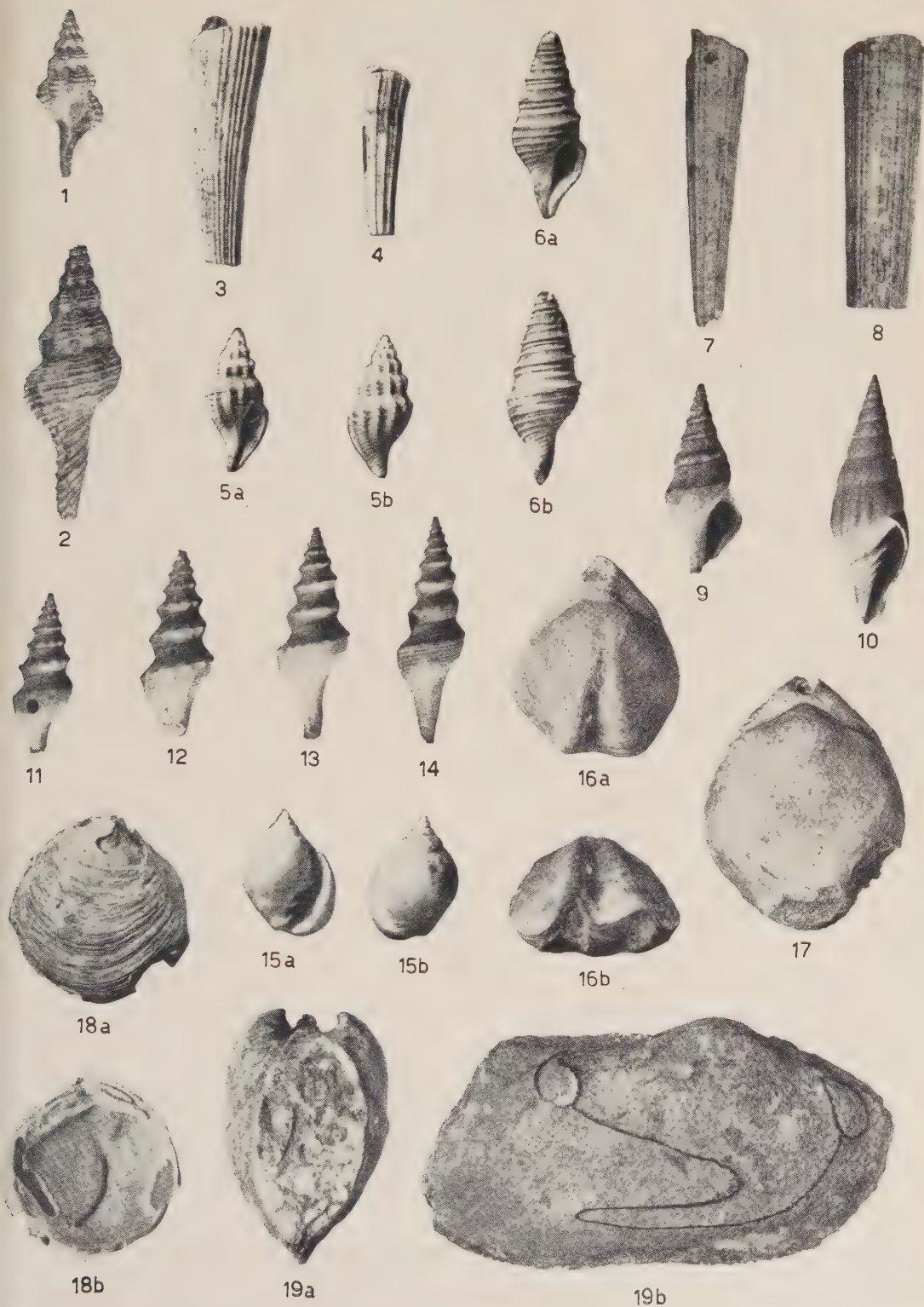
Miltha (Megaxinus) elliptica (Bors.) *gibba* Sacco (t. 1, f. 18): Due valve di notevoli dimensioni, nettamente incrassate, e ricche del tipico deposito concrezionato all'interno; come forma sono molto vicine a quella della varietà piacentiana del Sacco ([2], 29, p. 72, t. 17, f. 10). Dimensioni: diam. c.-v.: mm 36; diam. a.-p.: mm 35; emispass.: mm 11. ST (as).

Tapes cf. *eremita* (Brocchi): Quattro esemplari la cui determinazione sembra sicura nonostante si tratti di modelli interni. La forma, le caratteristiche del cardine, delle impronte muscolari, della linea palleale e quelle, che si intravedono in pochi punti, dell'ornamentazione esterna, corrispondono bene specialmente alle varietà *subedulis* Sacco e *submaior* Sacco ([2], 28, p. 55, t. 12, ff. 18 e 19), varietà che però Cerulli-Irelli vorrebbe unire a *T. rhomboides* Penn.

Panopea cf. *menardi* (Desh.) (t. 1, f. 19): Un modello ben conservato, corrispondente per forma e proporzioni alla specie di Deshayes. Dagli esemplari piemontesi di essa si stacca però per la particolare accentuazione del seno della linea palleale; questo è ancora più marcato che nell'esemplare del Burdigaliano d'Aquitania figurato dal Cossmann & Peyrot ([9], 1, t. 3, ff. 40-41), superando di un mezzo centimetro circa l'allineamento degli apici. Dimensioni del modello: diam. c.-v.: 54 mm; diam. a.-p.: 98 mm; spess.: 36 mm. In Italia questa specie non risulta segnalata nel Pliocene; è invece nota per diverse località dall'Oligocene al Tortoniano [26], ed anche per l'Aquitano calabrese.

Schizechinus serialis Pomel: Due esemplari con la parte inferiore ben conservata, mentre quella superiore risulta deformata per schiacciamento e mancante. La corrispondenza con le descrizioni del Pomel ([17], 2, p. 303, tavola serie C, 4, ff. 1-7) e del Checchia-Rispoli ([5], p. 16, t. 1, ff. 2-4 e t. 2, ff. 1-3) è perfetta; si osserva solo una minor profondità degli intagli peristomali che qui raggiungono, al massimo, 2 o 3 mm di lunghezza. Dimensioni: I: diametri: mm 83×75 , peristomio: mm 25×21 ; II: diametri: mm 72×66 , peristomio: 24×19 . Questa forma del Pliocene d'Algeria è stata descritta in Italia nel Pliocene di Anzio, di Matera e di Lentini ([6], p. 384).

I fossili elencati nel presente lavoro non furono raccolti con l'intendimento di utilizzarli per deduzioni stratigrafiche di dettaglio sul Pliocene locale e non sarebbe prudente quindi tentare in base ad essi delle conclusioni in questo campo. Meritano invece cenno le particolari condizioni di sviluppo presentate da alcune delle forme provenienti dalle argille di facies piacentiana; confrontate con l'abbondante materiale ligure-piemontese del museo di Torino esse sono talora di dimensioni costantemente minori (*Tritonium apenninicum* (Sassi); *Drillia allionii* Bell., *Surcula dimidiata* (Brocchi)), o perlomeno non superiori a quelle medie (*Nassa italica* (May.)) ad eccezione degli esemplari di *Vermetus intortus* (Lam.) che, al contrario, presentano tutti uno sviluppo notevolmente superiore.



OPERE CITATE

- [1] BELLARDI L., *Monografia delle Pleurotome fossili del Piemonte*, «Mem. Acc. Sc. Torino», Cl. sc. fis. mat. nat., ser. 2^a, 9, 531-650 (1845), tt. 1-4.
- [2] BELLARDI L. & SACCO F., *I molluschi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria*. 30 parti. Torino 1872-1904.
- [3] BROCCHI G., *Conchiologia fossile subappennina*, Milano 1814, 2 vv., 712 pp., 16 tt.
- [4] CERULLI-IRELLI S., *Fauna malacologica mariana*, «Pal. It.», 13, 1907 (I)-22, 1916 (VIII).
- [5] CHECCHIA-RISPOLI G., *Gli Echinidi del Pliocene di Anzio*, «Mem. p. serv. alla descr. d. Carta Geol. It.», 9, 1923, 24 pp., 5 tt.
- [6] CHECCHIA-RISPOLI G., *Su di una Echinofauna pliocenica dei dintorni di Lentini (provincia di Siracusa)*, «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», Cl. sc. fis. mat. nat., ser. 6^a, 23, 383-386 (1936).
- [7] CIPOLLA F., *Le Pleurotomidi del Pliocene di Altavilla (Palermo)*, «Pal. It.», 20, 105-181, (1914), tt. 12-14.
- [8] CORTESE E., *Descrizione geologica della Calabria*, «Mem. descr. Carta Geol. It.», 9, 1895, XXVIII + 310 pp., 4 tt., 24 ff. e 5 tt. n. t., 1 carta geol. alla scala 1:500.000.
- [9] COSSMANN M. & PEYROT A., *Conchologie néogénique de l'Aquitaine*, «Act. Soc. Linn. Bordeaux», 63, 1909, 84, 1932 (6 voll.).
- [10] DE STEFANI C., *Escursione scientifica nella Calabria (1877-78). Jejo, Montalto e Capo Vaticano*, «Atti R. Acc. Lincei», Mem. Cl. sc. fis. mat. nat., ser. 3^a, 18, 1882-83 (1883), 1-290, tt. 1 e 2, 7 ff. n. t.
- [11] FAZIA A. E., *Studi geologico-minerari nel Crotonese con particolare riferimento ai giacimenti di zolfo*. Tesi di laurea. Università di Padova, 1950-51 (datt.).
- [12] FAZIA A. E., *Macrofauna del Pliocene medio e superiore di Strongoli (Catanzaro) e dintorni*. Tesina di laurea. Università di Padova, 1950-51 (datt.).
- [13] GIGNOUX M., *Les formations marines pliocènes et quaternaires de l'Italie du Sud et de la Sicile*, «Ann. Univ. Lyon», n. s., 1, 36, 1913, 693 pp., 21 tt., 42 ff. n. t.
- [14] HÖRNES M., *Die fossilen Mollusken des Tertiär-Beckens von Wien*, «Abh. k. k. geol. Reichsanst.», 3, 1856, 736 pp., 52 tt.; 4, 1870, 479 pp., 85 tt.
- [15] NEVIANI A., *Contribuzione alla paleontologia della provincia di Catanzaro*, «Boll. Soc. Geol. It.», 6, 1887, 63-69.
- [16] NEVIANI A., *Contribuzioni alla geologia del Catanzarese*, «Boll. Soc. Geol. It.», 6, 1887-8, 1889.
- [17] POMEL A., *Paléontologie de l'Algérie*, vol. 2, Echinodermes. Alger, Jourdan 1885, 344 pp., tt. 16 + 49 + 12 + 3.
- [18] ROSSI-RONCETTI C., *I tipi della «Conchiologia fossile subappennina» di G. Brocchi*, Fuori testo della «Riv. It. Pal. Strat.», 1951.
- [19] RUGGIERI G., *Il terrazzo marino presiciliano della penisola di Crotone*, «Giorn. Geol.», ser. 2^a, 20, 39-62 (1948).
- [20] RUGGIERI G., *Una nuova Pajenbrichella del Pliocene della Calabria*, «Giorn. Geol.», ser. 2^a, 21, 59-63 (1949), 1 f.
- [21] SACCO F., *I Brachiopodi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria*. Torino 1902, 39 pp., 6 tt.
- [22] SEGUENZA G., *Paleontologia malacologica dei terreni terziari del distretto di Messina*, «Mem. Soc. It. Sc. Nat.», 1, 1865, 88 pp., 8 tt.
- [23] SEGUENZA G., *Studi paleontologici sui Brachiopodi terziari dell'Italia meridionale*, «Bull. Malac. It.», 4, Pisa 1871, 9-16, 33-72, 124-153.
- [24] SEGUENZA G., *Studi stratigrafici sulla formazione pliocenica dell'Italia meridionale*, «Boll. Com. Geol. It.», 1873-1877.
- [25] SEGUENZA G., *Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio (Calabria)*, «Atti R. Acc. Lincei», Mem. Cl. sc. fis. mat. nat., ser. 3^a, 6, 1879-80, 445 pp., 17 tt.

- [26] TAVANI G., *Fossili del macigno di Calafuria (Livorno)*, «Atti Soc. Tosc. Sc. Nat.», 61, 16-25 (1954), 1 t., 2 ff. n. t.
- [27] VINASSA DE REGNY P. E., *Il Chenopus uttingerianus Risso e il Chenopus paspelecanti L. del Pliocene italiano*, «Bull. Soc. Malac. It.», 20, 21-44 (1895), t. 3.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I

Figg. 1 e 2: *Fusus lamellosus* BORS., Piacenziano ($\times 1,5$); figg. 3 e 4: *Dentalium* cfr. *badensis* (PARTSCH), Piacenziano ($\times 2$); fig. 5: *Raphitoma hispidula* (JAN), Piacenziano ($\times 2,5$); fig. 6: *Drillia crispata* (JAN), Piacenziano ($\times 2,25$); figg. 7 e 8: *Dentalium rectum* (L.), Piacenziano ($\times 1$); fig. 9: *Surcula brugnonesi* SEG., Piacenziano ($\times 1,5$); fig. 10: *Turricula pyramidella* (BROCCHI), Piacenziano ($\times 1,5$); figg. 11-14: *Surcula dimidiata* (BROCCHI), Piacenziano ($\times 1,5$); fig. 15: *Ringiculella auriculata* (MÉN.), Piacenziano ($\times 2,5$); fig. 16: *Terebratula sinuosa* BROCCHI, Astiano ($\times 0,75$); fig. 17: *Terebratula* cfr. *scillae* SEG., Astiano ($\times 0,75$); fig. 18: *Miltha elliptica* (BORS.) gibba SACCO, Astiano ($\times 0,75$); fig. 19: *Panopea* cfr. *menardi* (DESH.), Astiano ($\times 0,75$).

Mineralogia. — *Sulla identità della hartite con la bombiccite. Determinazione della cella elementare e del gruppo spaziale.* Nota I (*) di RENATO PELLIZZER, presentata dal Corrisp. C. ANDREATTA.

In una Memoria letta all'Accademia delle Scienze di Bologna L. Bombicci⁽¹⁾ comunicava i risultati di un suo studio sulla bombiccite di Castelnuovo nel Valdarno. Riferendosi ai dati di un'analisi chimica eseguita dal prof. E. Bechi ed ai dati relativi alla solubilità, al punto di fusione, nonché ai caratteri d'aspetto, di giacitura e di genesi, Bombicci intravedeva la possibilità di una rassomiglianza con la dinite, la branchite e la fichtelite. In particolare poneva il quesito se la bombiccite non dovesse potersi considerare «una fichtelite mono-idrata». Le sue ricerche in tal senso non portarono a risultati decisivi. Comunque, indipendentemente da tale possibilità, Bombicci riteneva l'insieme dei dati sufficienti per poter considerare una specie distinta l'idrocarburo oggetto delle sue ricerche ed accettare il nome di «bombiccite» proposto dal prof. E. Bechi che per primo ne eseguì l'analisi chimica. Le ricerche cristallografiche del Bombicci non portarono a risultati sufficienti per definire il sistema di cristallizzazione.

In una Nota del 1921 G. Boeris⁽²⁾ affermava che la bombiccite, in base alle sue ricerche ed a quelle del prof. R. Ciusa⁽³⁾, potrebbe essere ritenuta identica colla hartite, e così pure l'hofmannite e la branchite, e vi assegnava la formula $C_{20}H_{34}$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1955.

(1) L. BOMBICCI, *La bombiccite di Valdarno superiore in Toscana*, «Mem. Acc. Sc. Bologna», serie II, tomo IX (1869).

(2) G. BOERIS, *Sulla composizione della hofmannite*, «Rend. R. Acc. Scienze Bologna», vol. XXV (1920-21).

(3) CIUSA E CROCE, «Gazzetta Chim. It.», 51 (1921):

Considerando anche l'utilità di precisare definitivamente tale identità, ho intrapreso, su consiglio del Prof. C. Andreatta, ricerche roentgenografiche su campioni di bombiccite e di hartite con lo scopo di determinare le costanti della cella elementare ed il gruppo spaziale, partendo dai risultati di uno studio morfologico, eseguito sulla hartite da Machatschki ⁽⁴⁾, dal quale risulta che la hartite appartiene alla classe pediale del sistema triclinico.

I campioni da me utilizzati fanno parte del Museo di Mineralogia dell'Università di Bologna e sono ligniti di Castelnuovo di Valdarno con incrostazioni di bombiccite e ligniti di Köflach con incrostazioni di hartite. Da tali incrostazioni ho potuto isolare alcuni cristallini e scegliere fra questi i più adatti allo scopo. La scelta presentò non lievi difficoltà per l'estrema

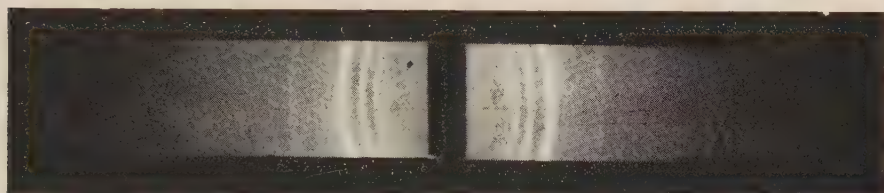


Fig. 1 a. - Spettro di polvere di bombiccite naturale
Ant. Cu R = mm. 95.

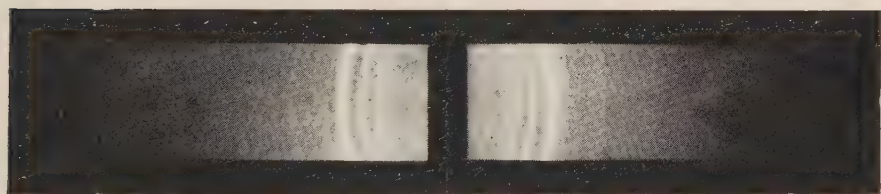


Fig. 1 b. - Spettro di polvere di hartite naturale
Ant. Cu R = mm. 95.

fragilità dei cristallini, presenti sulle superfici incrostate, che sono prevalentemente lamellari quasi sempre in associazione parallela e con notevoli impurezze di resine che impartiscono loro una debole colorazione gialla.

Per poter inoltre disporre di individui nelle condizioni più adatte alle ricerche propostemi, ho preparato cristalli per evaporazione spontanea di soluzioni diverse utilizzando come solventi alcool etilico, alcool metilico ed etere, riuscendo anche ad effettuare una purificazione per ripetute cristallizzazioni eliminando di volta in volta le acque madri. I cristalli migliori si sono ottenuti da soluzioni alcooliche poco concentrate; in particolare, da soluzioni in alcool etilico, si sono formati, dopo alcuni giorni di evaporazione spontanea, bei cristalli perfettamente limpidi ad abito tabulare molto allungato; due sole facce, quelle appunto secondo le quali sono appiattiti, hanno grande estensione rispetto a quelle del contorno che sono ridotte a sottili listerelle.

(4) MACHATSCHKI, «Zeit. Kryst.», 60 (1924).

Per assicurarmi che i prodotti così ottenuti erano uguali a quelli naturali, ho eseguito degli spettrogrammi Debye. L'identità degli spettri ottenuti ha risolto ogni dubbio.



Fig. 2. - Polanyi di bombycite naturale intorno a $[010]$
Ant. Cu R = mm. 28, 65. Grand. nat.

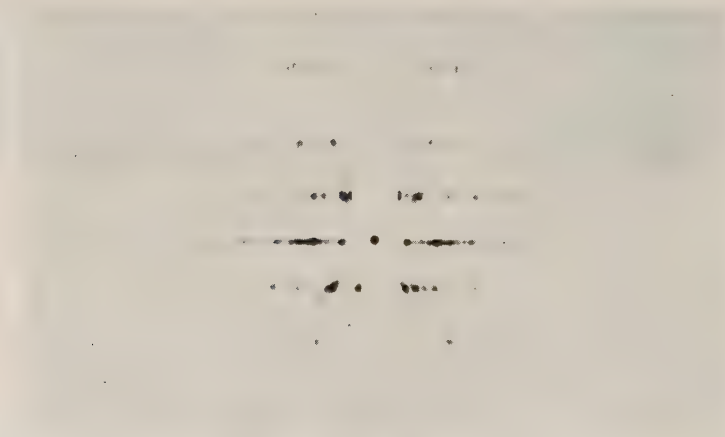


Fig. 3. - Polanyi di bombycite artificiale intorno a $[001]$
Ant. Cu R = mm. 28,65. Grand. nat.

Tutte le suddette esperienze sono state eseguite sia su campioni di hartite, sia su campioni di bombycite. Dagli spettrogrammi ottenuti (ved. fig. 1) viene così confermata anche l'identità fra bombycite ed hartite supposta dal Boeris. Ciò nonostante, ho condotto ulteriori ricerche per la determinazione della cella elementare e del gruppo spaziale tanto su campioni di hartite quanto su campioni di bombycite e sia su cristalli naturali, sia su cristalli artificiali ottenuti nel modo sopra indicato.

TABELLA I.

Bombiccite.

Asse di rotaz.	λ	n	2γ in mm.	sen v	$t[u, v, w]$	media (3)
[010] (1)	K_{α}	1	7,70	0,13318	11,555	11,54
	»	2	15,90	0,26738	11,512	
	»	3	25,00	0,39992	11,544	
	»	4	36,25	0,53465	11,514	
	»	5	51,00	0,66484	11,574	
[001] (1)	K_{α}	1	12,00	0,20495	7,509	7,50
	»	2	25,75	0,40988	7,509	
	»	3	44,75	0,61559	7,500	
	K_{β}	1	10,50	0,18023	7,706	
	»	2	23,15	0,37459	7,416	
	»	3	38,50	0,55768	7,472	
[001] (2)	K_{α}	1	12,00	0,20495	7,509	7,51
	»	2	25,60	0,40796	7,544	
	»	3	45,00	0,61779	7,473	
	K_{β}	1	10,50	0,18023	7,706	
	»	2	23,00	0,37252	7,458	
	»	3	38,50	0,55768	7,472	

(1) Bombiccite naturale. (2) Bombiccite artificiale. (3) Ottenuta dai valori più probabili.

Sono stati eseguiti i seguenti spettrogrammi:

a) Spettrogrammi di Polanyi:

A) *Bombiccite naturale*

1° asse di rotazione [001].

2° asse di rotazione [010].

B) *Bombiccite artificiale*

1° asse di rotazione [001].

C) *Hartite artificiale*

1° asse di rotazione [001].

D) *Hartite naturale*

1° asse di rotazione [001].

b) Spettrogrammi di Weissenberg:

A) *Bombiccite naturale*

1° asse di rotazione [001] strato equatoriale ed equinclinati di ordine 1, 2, 3.

2° asse di rotazione [010] strato equatoriale ed equinclinati di ordine 1, 2, 3.

B) *Bombiccite artificiale*

1° asse di rotazione [001] strato equatoriale.

C) *Hartite artificiale*

1° asse di rotazione [001] strato equatoriale.

D) *Hartite naturale*

1° asse di rotazione [001] strato equatoriale ed equinclinati di ordine 1, 2, 3.

TABELLA II.

Hartite

Asse di rotaz.	λ	n	$2y$ in mm.	sen. v	$t[u, v, w]$	media (3)
[001] (1)	K_{α}	1	11,90	0,20333	7,568	7,50
	»	2	25,75	0,40938	7,518	
	»	3	45,00	0,61779	7,473	
	K_{β}	1	10,50	0,18023	7,706	
	»	2	22,80	0,36970	7,514	
	»	3	38,75	0,56022	7,438	
[001] (2)	K_{α}	1	12,00	0,20495	7,509	7,50
	»	2	25,75	0,40938	7,518	
	»	3	45,00	0,61779	7,473	
	K_{β}	1	10,50	0,18023	7,706	
	»	2	23,00	0,37245	7,458	
	»	3	38,75	0,56022	7,438	

(1) Hartite naturale.

(2) Hartite artificiale.

(3) Ottenuta dai valori più probabili.

Tutti gli spettri sono stati effettuati con anticatodo di rame senza filtro usando una camera del diametro di mm. 57,3. I risultati ottenuti sono riportati nelle tabelle I e II per gli spettrogrammi di Polanyi, III e IV per gli spettrogrammi di Weissenberg.

Cristallografia fisica. — *Deux hypothèses sur les causes de la formation de la bifeuille de Popoff.* Nota I di MATTHIAS MATSCHINSKI, presentata (*) dal Socio E. ONORATO.

1. L'existence des groupements cristallins à symétries sphérique et cylindrique (ou si l'on veut, l'existence des formes cristallines de ces symétries) est connue, en principe, de longue date. Toutefois, les formes connues de ces groupements étaient si peu nombreuses que ces formations n'étaient guère considérées comme une espèce spéciale de symétrie. C'est seulement la découverte de la « bifeuille » de Popoff et des formes analogues qui montra qu'il ne s'agissait pas, en l'occurrence, de curieuses exceptions fortuites, mais de tout un domaine de phénomènes extrêmement caractéristiques.

La première question à résoudre était la création d'un système approprié de classification, comprenant la cristallographie géométrique de toutes ces formes. L'auteur a cherché à le faire dans son article (1), où il construit un ensemble complet des symétries correspondantes constitué par dix systèmes cristallographiques (et de formes y correspondantes) auxquels on peut ajouter en outre deux systèmes asymétriques. On trouvera un exposé plus court du même sujet, accompagné, toutefois, de remarques sur la place d'une telle classification parmi la classification ordinaire et celle de Weissenberg dans (2).

Or, les questions de la systématique, tout en étant très importantes ne sont pas les seules que pose l'étude de ce groupe de phénomènes. Il est encore plus intéressant et plus important d'élucider les causes physiques de l'origine des formes dont il s'agit. Pour rendre notre exposé plus concret, examinons le mode de formation (— la genèse) d'une seule de ces formes, la plus intéressante entre toutes: la bifeuille. Dans les paragraphes suivants l'auteur discutera, en conséquence, deux hypothèses possibles sur les causes physiques créant cette dernière forme.

2. On sait que la bifeuille de Popoff est une forme cristalline naissant lors d'une cristallisation simultanée de deux modifications d'une même substance. Dans le cas d'une cristallisation dans l'espace cette forme rappelle à peu près deux bulbes placés l'un après l'autre de manière à se toucher par leurs racines, autrement dit, c'est une figure de révolution (autour de l'axe AB) de la ligne représentée sur la figure 1. Dans le cas d'une cristallisation dans le champ de vision d'un microscope, entre deux lamelles de verre, le phénomène ne se produit que dans deux dimensions et l'on obtient des

(*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) M. MATSCHINSKI, « *Experientia* », n. 5, p. 165 (1952).

(2) M. MATSCHINSKI, « *Bull. Soc. Franç. Minér. Cristall.* », nn. 1-3, p. 161 (1952).

bifeuilles au sens littéral du terme, aussi que le montre la fig. 2 empruntée à un travail de Popoff⁽³⁾.

Nous ne nous arrêtons ici ni sur le côté expérimental, ni sur le côté minéralogique-chimique (substances pouvant cristalliser en cette forme, etc.) de la question, renvoyant le lecteur, pour tous ces problèmes, aux travaux de Popoff, notamment à son travail fondamental que nous venons de citer, ainsi qu'à de nombreux autres dont on peut trouver les listes dans⁽⁴⁾⁽⁵⁾, voir aussi § 10. Ici, répétons-le, nous examinerons uniquement les causes ayant pour effet la naissance de cette forme de bifeuille.

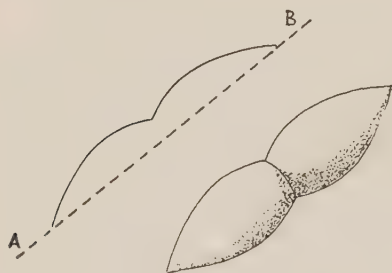


Fig. 1.

3. Le savant même qui a découvert ce phénomène a formulé la supposition très plausible d'après laquelle l'origine d'une pareille forme serait en relation avec la différence des vitesses de cristallisation des deux modifications, voir la fig. 3. Pour simplifier notre exposé, nous n'examinerons plus loin que formation dans un plan (voir § 2), tous les raisonnements pouvant très facilement être étendus aussi bien à la formation dans l'espace. Nous désignerons, également pour simplifier, la modification remplissant l'intérieur de la bifeuille comme modification 1 et celle cristallisant à l'entour comme modification 2.

La figure 3 montre que l'intérieur du cercle (de la sphère) est rempli par la première modification, dont la cristallisation croît en directions radiales à partir du point O. Aux points A et A' naît la deuxième modification qui ensuite croît dans toutes les directions libres. Soient les vitesses de croissance respectivement c_1 et c_2 . Les points de l'espace (par exemple B) qui seront plus vite atteints par la première modification seront, bien entendu, remplis par elle, de même que la deuxième modification remplira les points (par exemple C) qu'elle atteindra la première. La ligne déterminant la forme de la bifeuille sera, en conséquence, constituée par les



Fig. 2.

(3) B. A. POPOFF, « Latv. farm. Zurn. », Riga 1934.

(4) M. MATSCHINSKI, « Experientia », n. 6, p. 242 (1952).

(5) O. MELLIS, « Bull. Soc. Franç. Minér. Cristall. », nn. 7-9, p. 385 (1952).

lieux géométriques des points qui seront atteints par les deux modifications en même temps, aussi que le montre la figure 3

$$(I) \quad \frac{OA}{c_1} + \frac{AEGF}{c_2} = \frac{OG}{c_1} + \frac{GF}{c_2} = \frac{OF}{c_1} = \text{const.}$$

Telle est l'idée générale de Popoff, très plausible comme une des explications possibles, bien que lui-même n'y ait pas attribué une importance particulière.

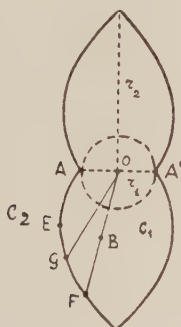


Fig. 3.

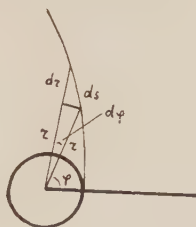


Fig. 4.

Par contre, Choubnikov ⁽⁶⁾ essaya de prêter à ce facteur l'importance d'un facteur morphogénétique unique et d'en tirer, par des transformations mathématiques, la forme de la bifeuille. Ce ne pas difficile. Il ressort notamment de la fig. 4 qu'en désignations différentielles la condition (I) prend la forme:

$$(2) \quad \frac{ds}{dr} = k > 1, \quad \left(k = \frac{c_2}{c_1} \right).$$

D'autre part, du fait que ABC est un triangle rectangulaire ressort

$$(3) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

ce qui, avec les formules précédentes, donne l'équation différentielle

$$(4) \quad dr^2 + r^2 d\varphi^2 = k^2 dr^2.$$

C'est cette équation qui d'après Choubnikov détermine mathématiquement la forme de la bifeuille, donnant l'angle φ en fonction de la distance r :

$$(5) \quad \varphi = \pm C \ln \frac{r}{a}, \quad \text{où } C = \sqrt{\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1}.$$

Les courbes théoriques obtenues (5) sont effectivement assez semblables aux formes expérimentales des bifeuilles ⁽⁷⁾.

(6) A. CHOUBNIKOV, «Trav. Inst. Lomonossov Ac. Sc. URSS», VIII (1936).

(7) M. MOHNSAME, *In Memoriam B.A. Popoff*. Edit. «Cahiers Géologiques de Thoiry», p. 152 (1953).

4. Toutefois, sous la forme mathématique qui lui a été donnée par Choubnikov, l'hypothèse attribuant une influence prépondérante à la différence des vitesses de cristallisation se heurte à certaines difficultés qui contraignent à la rejeter. Notamment, les spirales logarithmiques (5) sont telles qu'elles ne peuvent circonscrire une bifeuille, à partir du point d'origine O , même si on en emploie quatre. On est obligé de supposer, hypothèse au plus haut point artificielle, que ces courbes ne commencent qu'aux points A et A' , en contradiction avec les bases logiques de la conception tout entière. En effet, la forme d'une bifeuille ne s'obtient qu'à condition d'une parfaite constance de température (les expériences de Popoff sont à cet égard extrêmement précises); lors d'un changement de température on obtient, comme l'indique ce même auteur, des formes beaucoup plus complexes; formes en cloche, etc. En outre, tout l'intérêt et toute l'importance du phénomène résident précisément dans la condition d'une température constante: si l'on admet une température variable, il est inutile de proposer des explications quelles qu'elles soient: la courbe géométrique décrivant la bifeuille constituera dans ce cas simplement une interprétation de l'allure de la variation de température.

D'autre part, en se plaçant au point de vue de Popoff (partagé également par l'auteur), d'après lequel on aurait ici un phénomène intervenant à température constante, il sera, du point de vue de la thermodynamique, absolument incompréhensible pourquoi la deuxième phase prend naissance aux points A et A' et non n'importe où ailleurs. Attribuer ce fait à un simple hasard est d'autant plus difficile que dans les conditions d'une expérience exactement conduite une différence entre les distances AO et AO' ne peut être due qu'à des influences ou à des causes extérieures, fortuites ou volontaires. L'apparition retardée de la deuxième phase (aux points A et A' , différents du point O) est précisément une propriété typique de la bifeuille qu'il s'agit d'expliquer. Ainsi il est nécessaire de construire une hypothèse convenable à expliquer ces faits.

5. Dans cet ordre d'idées examinons d'abord la question des remplissages possibles de l'espace par des formes élémentaires dans les cas des symétries cylindrique et sphérique.

On sait qu'il existe une infinité de modes de remplir l'espace par des figures formant une couche plate ou, ce qui revient au même, une infinité de modes de remplir un plan par des figures formant une bande droite. En effet, il suffit de placer en nombre suffisant ces couches ou ces bandes immédiatement les unes après les autres pour remplir un espace ou un plan. On sait que c'est précisément sur cette propriété que repose l'idée de l'élément du réseau atomique. Il ne peut, par contre, exister rien de pareil pour des parties de sphères (symétrie sphérique) ou de cercles (symétrie cylindrique). Ni les couches d'une sphère, ni les bandes concentriques dans un cercle ne peuvent – ayant un rayon commun de courbure, bien entendu – comme cela est universellement connu, se suivre *immédiatement*: on obtient nécessairement soit des lacunes, soit des renflements. C'est en raison de ce fait, paraît-il, que les formes sphériques et cylindriques n'ont pas été acceptées

comme formes cristallographiques indépendantes. Or, c'est précisément cette difficulté apparente qui pourrait expliquer le phénomène qui nous occupe. Le traitement de ce dernier est tellement semblable pour la symétrie sphérique et la symétrie cylindrique que nous bornerons notre examen, comme il a été dit ci-dessus, uniquement à cette dernière.

La figure 5 montre que si l'élément de surface $abcd$ choisi par nous est tel qu'il remplit exactement une bande de cercle d'un rayon r_0 , la région à l'intérieur de cette bande pourra être remplie librement (avec des fentes ou des éléments distendus), tandis que la région à l'extérieur de la bande ne pourra l'être que forcément (par des éléments comprimés ou subissant une pression tangentielle). Tout cela est exact, bien entendu, uniquement dans le cas (que nous examinons) où la croissance commence au centre O. Par contre, dans le cas où la croissance commence à partir d'une certaine sphère en direction de l'intérieur (cas *non* examiné dans l'exposé qui suit) les régions de compression et de distension sont interverties. Ainsi la région de compression se trouvera alors à l'intérieur de la bande (sphère) de rayon r_0 , et la région de distension à l'extérieur de cette bande, mais, bien entendu, à l'intérieur de la sphère initiale.

Telles sont les considérations générales et qualitatives qui correspondent à la deuxième hypothèse. Dans la Note suivante nous essayerons de formuler cette deuxième hypothèse en langage mathématique.

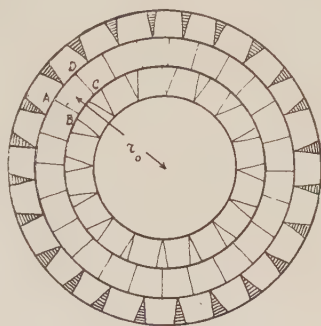


Fig. 5.

Farmacologia. — *Azione dei farmaci simpatolitici sulla circolazione cerebrale: ergotamina, diidroergotamina e derivati dell'amminometilbenzodiossano* (*). Nota (**) di DANIEL BOVET, GIAN LUIGI GATTI e MICHELE VIRNO, presentata dal Corrisp. D. MAROTTA.

Lo studio farmacologico della vasomotricità cerebrale ha dato luogo per l'interesse fisiologico, fisiopatologico e clinico che esso riveste a molte ricerche che, per le difficoltà stesse teoriche e pratiche incontrate, hanno portato a risultati spesso divergenti.

In particolare, per quanto riguarda i farmaci simpatolitici, il loro studio è stato sfavorevolmente influenzato, per quanto concerne l'azione sulla ipertensione provocata dall'adrenalina, dalla complessità degli effetti che questa sostanza esercita sulla motricità cerebrale.

(*) Lavoro eseguito nei Laboratori di Chimica terapeutica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1955.

Per quanto concerne il sistema arterioso cefalico, la carotide^(1,2), la carotide interna^(3,4), le arterie vertebrali⁽⁵⁾, le ricerche fin qui condotte col mezzo della registrazione della temperatura del sangue (Thermostromuhr), hanno messo in evidenza che sotto l'azione dell'adrenalina vi è un aumento della velocità di circolazione del sangue che viene interpretata come la conseguenza di una dilatazione passiva dei vasi, consecutiva all'ipertensione. Una vasocostrizione attiva è stata d'altra parte messa in evidenza nel cane iniettando l'adrenalina per via endocarotidea⁽³⁾ dopo la legatura della carotide esterna^(3,4) o dopo narcosi cloralosica⁽⁵⁾.

Considerando l'opportunità di sostituire metodi meno traumatizzanti alle ricerche che comportano lunghi interventi operatori (ricerche sui vasi isolati, misura dei vasi, registrazione della temperatura in superficie del cervello), ci siamo orientati verso lo studio della pressione venosa cerebrale.

Abbiamo scelto il cane come animale di esperimento perché in questa specie la maggior parte del sangue defluisce dall'endocranio passando attraverso la giugulare esterna e perché le ricerche di Keller⁽³⁾ e di Taeschler, Cerletti e Rothlin⁽⁵⁾ hanno dimostrato che esso è particolarmente sensibile all'azione dei farmaci vasocostrittori.

I valori della pressione venosa sono stati registrati con manometri ad acqua utilizzando il sistema fotografico del politensiografo di Condorelli⁽⁶⁾.

In questo modo si è messo in evidenza come, nel cane cloralosato, la pressione venosa misurata nella v. mascellare interna, nella sua porzione temporale, o nella giugulare esterna, generalmente cade in seguito ad una iniezione endovenosa di adrenalina⁽⁷⁾.

Noi riferiamo qui di seguito i risultati ottenuti somministrando all'animale farmaci simpatolitici, registrando l'azione propria e le modificazioni che essi provocano sugli effetti dell'adrenalina nella circolazione cerebrale del cane cloralosato.

I dati raccolti riguardano quindici esperimenti eseguiti studiando l'ergotamina, la diidroergotamina e due derivati sintetici dell'amminometilbenzodiossano: il 883 F. e il 1205 I. S.

a) *Ergotamina.*

L'ergotamina iniettata nelle condizioni descritte per via endovenosa nel cane cloralosato, provoca regolarmente una caduta della pressione venosa cefalica tanto maggiore quanto più la pressione venosa è elevata all'ini-

(1) H. REIN, « Zeitschr. für Biologie », 89, 307 (1929).

(2) H. A. DITMAN, K. MECHELKE e E. NUSSER, « Arch. exper. Path. », 223, 756 (1954).

(3) C. KELLER, « Arch. exper. Path. », 154, 357 (1930).

(4) M. SCHNEIDER e D. SCHNEIDER, « Arch. exper. Path. », 175, 606 (1934).

(5) M. TAESCHLER, A. CERLETTI e E. ROTHLIN, « Helv. Physiol. Acta », 10, 120 (1952).

(6) L. CONDORELLI, *Fisiologia del sistema venoso*, A.P.E., Catania (1946).

(7) D. BOVET, G. L. GATTI e M. VIRNO, « Helv. Physiol. Acta », 13 (1955), in corso di stampa.

zio dell'esperimento. La caduta della pressione venosa (6-10 cm. di acqua) che coincide all'inizio con una ipertensione arteriosa, è particolarmente duratura e si prolunga al di là degli effetti dell'ipertensione arteriosa. Questo effetto corrisponde alla vasocostrizione periferica che rappresenta l'azione più caratteristica dell'alcaloide.

Nei confronti dell'adrenalina, l'ergotamina esercita un antagonismo che si manifesta sulla pressione venosa cefalica in modo rapido e intenso. Mentre le dosi che provocano nel cane la tipica inversione dell'ipertensione arteriosa dell'adrenalina sono di 0,2-0,5 mg/kg, l'iniezione di una dose di 0,05 mg/kg di ergotamina è sufficiente per abolire la vasocostrizione cerebrale dell'adrenalina. In questo caso l'ipotensione venosa provocata dalla adrenalina, è sostituita da una ipertensione che deve essere interpretata come dovuta ad un aumento della circolazione cerebrale legato passivamente all'ipertensione arteriosa.

b) *Derivati dell'amminometilbenzodiossano.* (883 F. e 1205 I. S.).

Contrariamente a ciò che avviene per l'ergotamina, due derivati dell'amminometilbenzodiossano, il Proympal o 883 F. (dietilammino-metilbenzodiossano) e il 1205 I. S. (N-(2-metil-1,4-benzodiossano)-N'-metil-β-alaninammide) ⁽⁸⁾ impiegati alla dose di 0,1-0,5 mg/kg provocano un aumento della pressione venosa cerebrale che corrisponde ad una leggera ipotensione arteriosa e con una vasodilatazione periferica dei vasi cerebrali ⁽⁹⁾.

L'azione adrenolitica dei diossani si manifesta sulla pressione venosa con effetti che variano secondo le dosi. Infatti: 1° sotto l'azione di una debole dose di farmaco che deprime senza invertire l'ipertensione arteriosa adrenalinica registrata alla femorale, si ha generalmente un aumento della pressione venosa in luogo di una caduta, fenomeno che si può interpretare come una vasodilatazione attiva; 2° con una dose che provoca una netta inversione dell'ipertensione adrenalinica, e quindi una ipotensione arteriosa, la pressione venosa scende, seguendo passivamente la pressione arteriosa.

c) *Diidroergotamina.*

La diidroergotamina, alla dose di 0,1 mg/kg, ha una azione vasocostrittrice propria sui vasi cerebrali meno marcata e soprattutto meno durevole di quella dell'ergotamina. Essa esercita, nei confronti dell'adrenalina, un'azione analoga a quella del Prosympal provocando una vasodilatazione con conseguente caduta della pressione arteriosa e una parallela caduta della pressione venosa.

DISCUSSIONE. — Le ricerche eseguite sulla pressione venosa cefalica dimostrano che la misurazione della pressione venosa nella giugulare esterna

(8) G. L. GATTI, e D. BOVET, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 14, 645 (1953).

(9) J. BOUKAERT e F. JOURDAN, « Arch. int. Pharmacodyn. et Ther. », 54, 168 (1936).

del cane rappresenta un metodo preciso di registrazione per quanto concerne gli effetti dei farmaci vasodilatatori e vasocostrittori sulla circolazione cerebrale.

In linea generale il sistema vasale cerebrale che si manifesta molto sensibile agli effetti vasomotori di piccole dosi di adrenalina, reagisce anche alla somministrazione dei simpatolitici. La registrazione della pressione venosa consente di seguire l'inversione dell'azione tipicamente vasocostrittrice dell'adrenalina nell'animale normale e l'azione vasodilatatrice attiva delle stesse dosi di adrenalina nell'animale a cui sia stato somministrato preventivamente un farmaco simpatolitico. Tale registrazione permette inoltre di mettere in evidenza l'azione propria dell'ergotamina e l'inversione degli effetti vasomotori dell'adrenalina anche impiegando dosi inattive sulla pressione arteriosa.

Questi risultati concordano con quelli ottenuti da Boukaert e Jourdan impiegando la tecnica della preparazione dell'endocranio perfuso e isolato del cane per lo studio dei due derivati del diossano: il dietilammino-metil-benzodiossano (Prosypal o 883 F.) e il piperidinometil-3-benzodiossano (933 F.)⁽⁹⁾, e con quelli riferiti da Taeschler, Cerletti e Rothlin studiando l'azione dell'idergina, miscuglio di alcaloidi idrogenati della segale cornuta, col metodo della registrazione della pressione arteriosa, venosa e del liquor nel cane, associata alla Thermostromuhr⁽⁵⁾.

Per quanto concerne l'azione dell'ergotamina, gli effetti vasocostrittori sono stati osservati, dopo il primo lavoro di Cow nel 1911 sulle arterie isolate⁽¹⁰⁾, recentemente da Schmidt e Hendrix col metodo della termocoppia⁽¹¹⁾ e da Pool e Nason colla misurazione del calibro dei vasi piali⁽¹²⁾. Ad analoghe conclusioni sono giunti anche Cannavà e Musumeci studiando le variazioni della pressione venosa cerebrale nel cane in narcosi cloralosica⁽¹³⁾.

La messa in evidenza dell'attività di dosi minime ergotamina negli animali da laboratorio mostra poi tutto il suo interesse allorché si raffrontino i risultati ottenuti colle osservazioni fatte da Wolff sull'uomo. In particolare Tunis e Wolff⁽¹⁴⁾ come pure Greppi⁽¹⁵⁾ seguendo le oscillazioni della pressione dell'arteria temporale dell'uomo hanno riferito l'azione di piccole dosi di ergotamina sul tono delle arterie cefaliche e hanno messo in rapporto questa azione coll'attività terapeutica che il farmaco esercita nella cefalea emicranica.

(10) D. COW, « J. Physiol. », 42, 125 (1911).

(11) C. F. SCHMIDT e P. HENDRIX, « Proc. Ass for Res. Nerv. Ment. Disease », 18, 229 (1937).

(12) I. L. POOL e G. I. NASON, « Arch. of Neurol. and Psych. », 33, 276 (1935)

(13) A. CANNAVÀ e S. MUSUMECI, « Arch. farmacol. sperim. e scien. aff. », 69, 73, (1940).

(14) M. M. TUNIS e H. G. WOLFF, « A.M.G. Arch. Neurol. Psych. », 71, 425 (1954).

(15) E. GREPPI, « Sintesi sulle cefalee mediche », Ed. « La settimana medica », Firenze (1954).

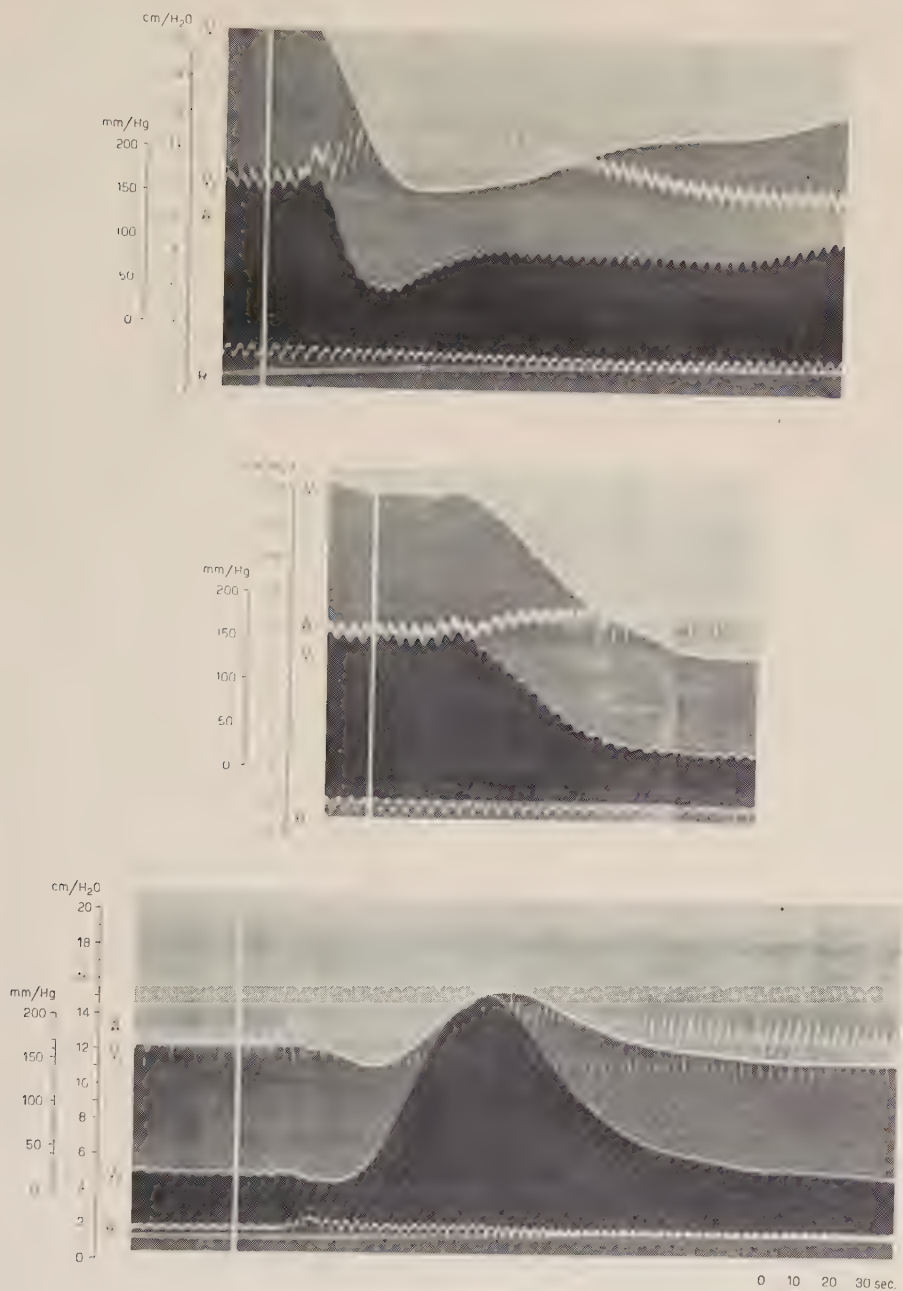


Fig. 1. - Azione di una dose minima di ergotamina. Cane ♂ kg 21.

Dall'alto in basso: 1° la somministrazione di una dose di 0,002 mg/kg di adrenalina provoca una ipertensione arteriosa e una ipotensione venosa; 2° una dose di 0,010 mg/kg di ergotamina iniettata successivamente fa innalzare leggermente la pressione arteriosa e abbassare la pressione venosa; 3° una nuova dose di 0,002 mg/kg di adrenalina provoca una ipertensione arteriosa pari alla prima e al contrario una salita della pressione venosa particolarmente intensa nella vena mascellare interna.

A = p. arteriosa registrata alla femorale; V₁ = p. venosa mascellare; V₂ = p. venosa facciale; R = respiro.

Embriologia. — *Azione del cianuro di potassio sullo sviluppo di « Physa rivularis Ph. »* (*). Nota (**) di VINCENZO MANCUSO, presentata dal Socio G. COTRONEI.

In corrispondenza del bordo del mantello e della conchiglia degli embrioni di *Physa* vi è una sostanza nadi positiva. Essa fa la sua prima comparsa nello sviluppo in uno stadio relativamente tardivo e precisamente allo stadio di trocofora avanzata (Mancuso 1953) ⁽¹⁾; probabilmente si tratta di una M-nadi ossidasi; essa è sensibile al cianuro di potassio (Mancuso 1955) ⁽²⁾.

Ci si è domandato se la localizzazione presentata da tale enzima avesse un significato.

La ghiandola della conchiglia inizia il suo sviluppo come una piccola introflessione dell'ectoderma posto nella parte opposta del blastoporo. Tale ectoderma viene a contatto, internamente, col fondo dell'intestino: sembra che tale contatto sia necessario per la formazione della ghiandola (cfr. per la *Limnaea*, Raven 1952 ⁽³⁾, 1954 ⁽⁴⁾). Successivamente la ghiandola della conchiglia si estroflette e comincia a secer-

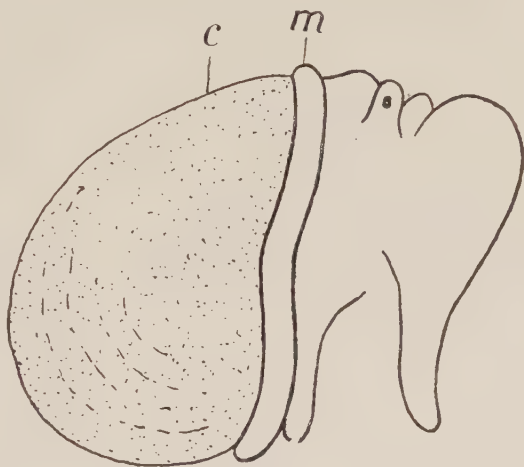


Fig. 1. — Embrione normale visto dal fianco destro.

nere la conchiglia. Man mano che procede lo sviluppo la ghiandola della conchiglia e la conchiglia si accrescono venendo ben presto a ricoprire tutto il sacco viscerale: si costituisce in tal modo il mantello.

Un mezzo per affrontare il problema qui postoci ci è offerto dalla possibilità di inibire l'enzima con il cianuro di potassio.

Lo stadio prescelto è quello di trocofora giovane cioè quello immediatamente precedente alla comparsa della Nadi-reazione.

Le uova si allevano in acqua di fonte normale fino a tale stadio. L'ulteriore sviluppo è fatto in presenza di cianuro di potassio 0,005 % in

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Palermo.

(**) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1955.

(1) V. MANCUSO, *Ricerche di topografia chimica nell'uovo di Gasteropodi polmonati*, « Rend. Ist. Sup. Sanità », vol. 16, p. 367 (1953).

(2) V. MANCUSO, *Sostanze nadi positive nello sviluppo di « Physa rivularis Ph. »*, « Ricerca Scientifica » in corso di pubblicazione.

(3) P. CHR. RAVEN, *Morphogenesis in Limnaea stagnalis and its disturbance by lithium*, « J. Exp. Zool. », vol. 121, p. 1 (1952).

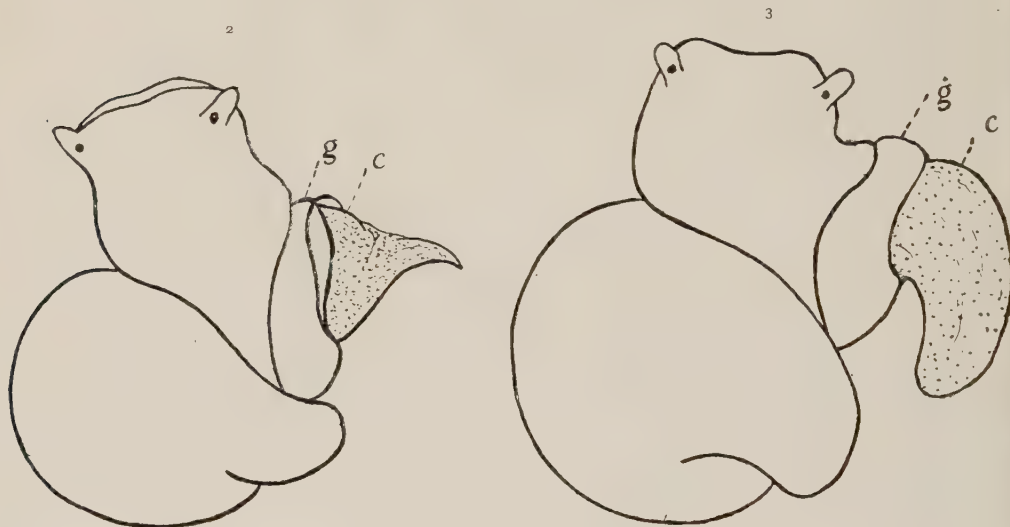
(4) P. CHR. RAVEN, *La détermination des ébauches dans les oeufs dits « à mosaïque »*, « J. Méd. Bordeaux », vol. 131, p. 1 (1954).

acqua di fonte. A tale concentrazione il KCN inibisce totalmente la nadi reazione.

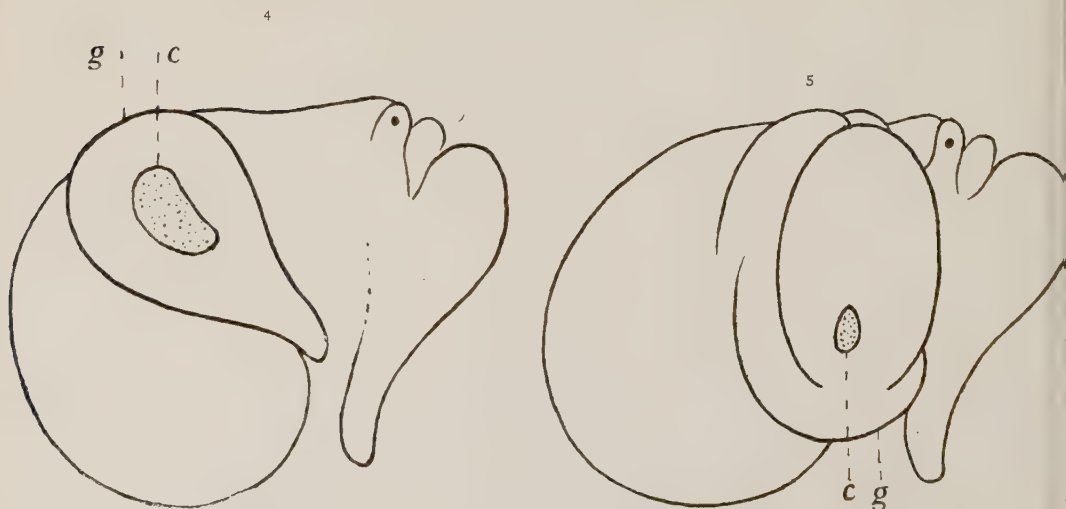
Si ottengono embrioni con anomalie a carico del sistema ghiandola della conchiglia-conchiglia. I disegni riproducono alcune di tali anomalie.

La fig. 1 mostra un embrione normale. Sono indicati il bordo del mantello (*m*) e la conchiglia (*c*) che ricopre il sacco viscerale.

Le figg. 2, 3, rappresentano degli embrioni in cui il sacco viscerale è completamente nudo; mancano infatti il mantello e la conchiglia che lo rivestono. Una conchiglia (*c*) molto rudimentale è presente sul fianco destro dell'embrione. Essa ha una forma laminare molto irregolare ed è impiantata su una massa cellulare data dalla ghiandola della conchiglia (*g*).



Figg. 2 e 3. - Embrioni trattati visti dalla parte dorsale.



Figg. 4 e 5. - Embrioni trattati visti dal fianco destro.

Nelle figg. 4, 5, la conchiglia è molto più rudimentale che nei casi sopra riportati. Essa lascia nudo il sacco viscerale. Assente è il mantello. Anche in questi casi il rudimento della conchiglia (*c*) è impiantato sulla ghiandola della conchiglia (*g*) costituita da una massa cellulare avente una forma piuttosto irregolare posta sul fianco destro dell'embrione.

Nell'embrione rappresentato dalla fig. 6 è possibile vedere una piccola conchiglia esterna (*c*) mentre un altro frammento di conchiglia (*i*) è posto dentro lo spessore della massa cellulare della ghiandola della conchiglia (*g*) anche in questo caso posta sul fianco destro dell'embrione. È assente il mantello.

In una terza categoria di embrioni, la ghiandola della conchiglia assume un aspetto vescicolare ed è ripiena di un liquido trasparente che fuoriesce non appena è punta con un ago. In questi embrioni la conchiglia, piuttosto anomala e rudimentale, può essersi formata; in alcuni embrioni però, può essersi distaccata dalla ghiandola ed essere caduta dentro le capsule che avvolgono l'uovo.

Gli esperimenti qui riportati mostrano che il cianuro di potassio colpisce il sistema ghiandola della conchiglia-conchiglia: nessun altro

sistema, almeno dall'esame in toto degli embrioni, sembra venga colpito.

La conchiglia presenta gravi anomalie, può essere molto ridotta e rudimentale; a volte è del tutto assente.

Una ghiandola della conchiglia, piuttosto anomala e in posizione non regolare, si forma; non si forma invece il mantello, che, come precedentemente ricordato, deriva dall'ulteriore sviluppo di tale ghiandola.

Il cianuro di potassio, alla concentrazione qui adoperata, inibisce completamente la nadi reazione del bordo della ghiandola della conchiglia e del mantello. Ora è molto suggestivo il fatto che è proprio l'organo in cui è localizzato l'enzima KCN-sensibile che viene ad essere disturbato dall'azione del cianuro di potassio.

Un altro fatto che va sottolineato è la posizione non regolare che occupa in questi embrioni la ghiandola della conchiglia: sempre sul fianco destro invece che nella parte posteriore. Tale anomalia, molto probabilmente, si deve all'accrescimento asimmetrico della massa viscerale, accrescimento che determina l'avvolgimento sinistrorso caratteristico di questo gasteropodo.

Come è chiaramente visibile nelle figg. 2, 3, la massa viscerale, pur essendo completamente nuda, conserva infatti tale avvolgimento.

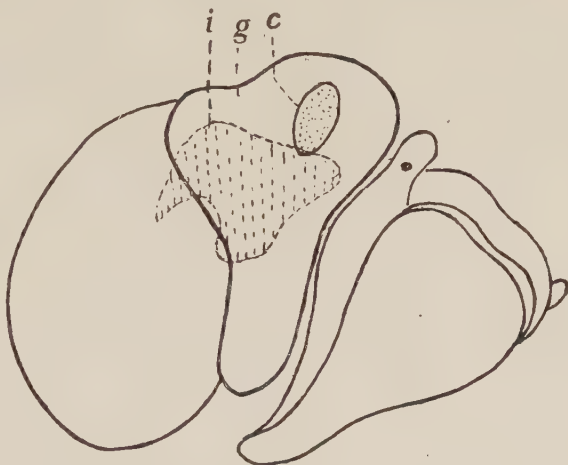


Fig. 6. — Embrione trattato visto dal fianco destro su cui è impiantata la ghiandola della conchiglia (*g*) con una conchiglia esterna (*c*) ed un frammento di conchiglia interno (*i*).

Biometria. — *Contributo statistico ad un tentativo di discriminazione biometrica di popolazioni o razze geografiche di teleostei del genere «Bregmaceros»*.^(*) Nota ^(**) di BERNARDO COLOMBO, presentata dal Corrisp. U. D'ANCONA.

La disponibilità di una vasta collezione di esemplari del genere *Bregmaceros* giacente presso l'Istituto di Zoologia ed Anatomia Comparata dell'Università di Padova per uno studio biologico ha offerto lo spunto per un tentativo di discriminazione biometrica di popolazioni o razze geografiche in questo genere così poco conosciuto.

I materiali disponibili provengono dalle raccolte fatte nelle crociere del «Dana» in quasi tutte le parti del mondo, ma soprattutto in alcune zone che hanno costituito la base della differenziazione geografica adottata. Tutta la preparazione dei dati è stata fatta all'Istituto predetto.

Sono stati distinti tre gruppi di pesci, catturati in altrettante zone praticamente tra di loro separate: gruppo I, pesci del Mar Caraibico e dell'Oceano Atlantico Centrale, da 40° 07' N a 11° 00' S e da 7° 36' W a 80° 00' W; gruppo II, pesci dell'Oceano Indiano, da 6° 05' N a 35° 49' S e da 23° 09' E a 99° 48' E; gruppo III, pesci dei Mari dell'Arcipelago Malese e del Mar della Cina, da 19° N a 7° S e da 105° E a 139° E. I *Bregmaceros* del primo gruppo sono stati pescati a profondità comprese fra 50 e 1000 m, quelli del secondo fra 300 e 3.500 m e quelli del terzo fra 250 e 4.000 m.

Avendo mancato allo scopo ogni diverso criterio tassonomico, rimaneva la possibilità di affrontare il problema di una classificazione geografica attraverso misure biometriche o conteggi meristici. Questi ultimi, nel nostro caso,

(*) (Papers from the «Dana» Oceanographical Collections, Nr. 46).

La Nota è stata preparata su materiali appartenenti al Marinbiologisk Laboratorium di Charlottenlund, messi gentilmente a disposizione da parte del prof. A. Vedel Tåning, direttore del medesimo. Si tratta di materiali raccolti nelle crociere del «Dana» dirette da J. Schmidt in anni fra il 1920 ed il 1931 per gli esemplari assegnati nel testo al primo gruppo, nel 1929-30 per quelli del secondo e nel 1929 per quelli del terzo.

Tutte le misure corporee sui pesci sono state prese dal dott. P. Geminiano Cavinato, dell'Istituto di Zoologia ed Anatomia Comparata dell'Università di Padova. Solo alcune misure nel caso degli esemplari più grandi sono state prese col compasso. In tutti gli altri casi è stato usato il microscopio, e quindi è stata effettuata la riduzione in mm. Il grado di precisione delle misure può essere ritenuto approssimativamente uniforme per le diverse variabili.

I calcoli di base, logaritmi dei valori osservati, quadrati e prodotti incrociati di valori e di logaritmi, e rispettive somme, sono stati svolti e controllati presso l'Istituto di Statistica dell'Università di Padova. L'A. desidera esprimere il suo vivo ringraziamento al dott. Gaetano Panizzon, assistente in detto Istituto, per il prezioso aiuto generosamente prestato in ogni fase delle elaborazioni.

(**) Pervenuta il 19 agosto 1955.

si presentavano assai difficoltosi o avrebbero imposto, per le vertebre, il ricorso a radiografie o sacrificio di materiale. Si è pertanto deciso di svolgere una ricerca a carattere esplorativo fondandosi sulla rilevazione di alcune misure biometriche giudicate più notevoli ed atte a costituire la base di una differenziazione.

Per evitare che la diversa tecnica di conservazione potesse inficiare i confronti per divergenti alterazioni nella forma dei pesci, si sono presi in considerazione solo esemplari conservati in formalina. Inoltre sono stati esclusi tutti i casi di lunghezza totale inferiore ai 2 cm; al di sopra di questa dimensione si ha a che fare con pesci che hanno raggiunto l'abito adulto. Assicurata l'omogeneità del materiale in riferimento alle condizioni di cattura e conservazione, da ogni gruppo sono stati estratti a caso 60 esemplari, su ciascuno dei quali sono state prese le seguenti otto misure:

1° lunghezza del corpo sino alla base della codale;

2° diametro dell'occhio;

3° lunghezza del capo;

4° lunghezza della pinna ventrale;

5° altezza;

6° distanza preorbitale;

7° distanza fra apice del muso ed inserzione della pinna dorsale (distanza predorsale);

8° distanza fra apice del muso ed inserzione della pinna anale (distanza preanale).

Le otto variabili, espresse in mm, hanno fornito nei tre gruppi i valori medi e gli scarti quadratici medi riportati nella tabella I. Tutte le variabili, in ogni gruppo, presentano una distribuzione marcatamente asimmetrica (obliqua sinistra); confrontate tra loro a coppie in tabelle di correlazione, mettono in evidenza distribuzioni in qualche caso sensibilmente eteroscedastiche e relazioni di regressione quasi sempre perfettamente lineari.

Date queste circostanze, *tutte le elaborazioni che verranno in seguito descritte sono state svolte sui logaritmi delle misure rilevate*: la trasformazione logaritmica, conservando praticamente o anche migliorando la linearità delle regressioni, riducendo fortemente l'asimmetria e realizzando distribuzioni soddisfacentemente omoscedastiche, riportava i dati in una forma accettabile per le applicazioni di test di ipotesi validi rigorosamente per distribuzioni normali ad una o più dimensioni, ma che ammettono anche moderate deviazioni dalla condizione ideale. Le medie e gli scarti quadratici medi dei logaritmi dei valori osservati sono pure riportati nella tabella I.

Il confronto a coppie col testo z di Fisher per le varianze e col testo t di Student per le medie non rivela, per alcun carattere, differenze significative fra i vari gruppi, comunque presi. Non si hanno, con ciò, altrettante conferme di omogeneità delle popolazioni dalle quali i singoli campioni sono stati estratti, perché i risultati di questi confronti non sono tra loro indipendenti. Fra i vari caratteri sussiste infatti una forte correlazione positiva: considerando, ad esempio, le sole sette relazioni che valgono fra la lunghezza sino

alla codale e ciascuna delle altre variabili, si ha in ogni caso un coefficiente di correlazione r superiore a 0,96, fuorché per la distanza preorbitale che presenta un r minimo pari a 0,78 nel I gruppo.

TABELLA I.

Medie aritmetiche e scarti quadratici medi dei valori osservati nei tre gruppi di pesci e dei loro logaritmi.

Carattere	Sui valori osservati (in mm)						Sui logaritmi dei valori					
	Media aritmetica			Scarto quadratico medio			Media arit. $\times 10^4$			Scarto quad. med. $\times 10^5$		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
1	27,72	28,14	29,14	9,817	9,933	12,710	14195	14288	14363	13880	12728	14631
2	1,04	1,15	1,16	0,353	0,428	0,456	— 41	372	417	12663	13137	13322
3	4,71	5,02	5,24	1,406	1,554	2,008	6554	6841	6976	11704	11565	12986
4	3,57	3,59	3,72	1,602	1,683	2,123	5166	5215	5269	16994	16020	17772
5	13,39	14,10	15,24	6,059	6,208	8,331	10914	11192	11425	16901	15283	17238
6	1,08	1,05	1,06	0,366	0,303	0,321	148	56	92	12162	11087	11625
7	10,51	11,01	11,13	3,445	3,761	4,764	10025	10231	10201	12782	12070	14091
8	10,17	10,30	10,65	3,173	3,368	4,516	9888	9957	10012	12335	11563	14040

È il caso di notare come il valore medio (dei logaritmi) cresce dal I al II gruppo e da questo al III eccetto che per la distanza preorbitale (dal I al II e dal I al III) e per la distanza dall'inserzione della dorsale (dal II al III). Dato il grado elevato di correlazione esistente fra i caratteri considerati, si pone il problema di analizzare se questa prevalente concomitanza di variazioni venga o meno spiegata dalla regressione vigente fra le variabili. È questo un problema di analisi della covarianza (vedi, ad esempio, il testo dello Snedecor).

Consideriamo, ad esempio, l'aumento della lunghezza del capo dal I al II gruppo, e da questo al III, in relazione alle variazioni corrispondenti nella lunghezza sino alla codale, assunta come variabile indipendente. La devianza residua rispetto alla regressione del complesso dei dati (somma dei quadrati degli scarti fra valori dati e valori teorici dedotti dalla retta di regressione interpolata sulle 180 osservazioni) risulta pari a 0,09615. Analizzando questo valore nelle sue principali componenti si ha: la somma delle devianze residue entro i gruppi rispetto alla regressione di ciascuno è uguale a 0,06904; la devianza residua del complesso rispetto alla regressione media entro i gruppi

(retta il cui coefficiente angolare è ottenuto dal rapporto fra somma di covarianze e somma di varianze interne ai gruppi e che rappresenta una sorta di media delle regressioni vigenti in ciascuno) è 0,07157. I gradi di libertà sono 178 per la prima, 174 per la seconda e 176 per la terza delle devianze indicate. La differenza $0,07157 - 0,06904 = 0,00253$, con 2 gr. di l. dà una varianza 0,001275, la quale va posta a confronto colla varianza $0,06904 : 174 = 0,00040$ per vedere se le tre regressioni entro i gruppi differiscono fra loro. Il confronto fornisce un rapporto delle varianze $F = 3,19$ che con 2 e 174 gradi di libertà risulta significativo al livello del 5 %. Come è noto, la relazione di allometria fra due misure corporee viene oggi espressa preferibilmente con un trattamento simmetrico delle due variabili (vedi, ad esempio, Teissier, 1948). Quando però una di queste sia la dimensione totale del corpo dell'animale, essa può venire ragionevolmente assunta nella relazione come variabile indipendente, considerando l'altra come variabile dipendente. È noto pure che in biometria viene assegnato un significato discriminatorio alle divergenze riscontrate fra le costanti di una relazione allometrica ottenute da varie popolazioni poste a confronto. In altra sede tratteremo più a fondo questo argomento. Qui basti osservare che il risultato sopra raggiunto, di una divergenza significativa fra i coefficienti angolari delle rette di regressione dei tre gruppi, parla a favore di una eterogeneità fra le nostre tre popolazioni.

Ma vi è anche altro. La differenza $0,09615 - 0,07157 = 0,02458$, cui competono 2 gr. di l., fornisce una varianza pari a 0,01229, la quale va posta a confronto colla varianza $0,07157 : 176 = 0,00041$ per vedere se le medie aggiustate della variabile dipendente nei tre gruppi (le medie aggiustate, cioè, in base alla regressione media entro i gruppi, a un valore fisso della variabile indipendente e pari al suo valor medio nei 180 casi) differiscono fra di loro. Si ottiene un rapporto $F = 0,02458 : 0,00041 = 29,98$, che con 2 e 176 gradi di libertà è significativo al livello dell'1 %. Le medie aggiustate di (\log_{10}) lunghezza capo risultano 0,6630 nel I, 0,6835 nel secondo e 0,6906 nel III gruppo. Esse appaiono più ravvicinate fra loro di quanto avviene fra i corrispondenti valori osservati che si leggono nella tabella I. Ma l'elevato rapporto delle varianze ora visto ci dice che, scontato l'effetto della regressione fra lunghezza del capo e lunghezza sino alla codale, la prima denuncia variazioni significative da gruppo a gruppo. In sostanza, nel II, e ancor più nel III, a pari lunghezza sino alla codale, il capo è più lungo che non nel I gruppo.

Sei altre analisi di questo tipo sono state svolte per le rimanenti variabili sempre in riferimento al carattere più importante, la lunghezza sino alla codale. Le sette analisi sono state ripetute in altrettanti confronti prendendo i distinti gruppi a due a due nei tre modi possibili. La tabella II presenta i risultati più notevoli, cioè i valori significativi dei rapporti delle varianze validi rispettivamente per il confronto delle medie aggiustate e per quello dei coefficienti di regressione entro i singoli gruppi. Con un asterisco, secondo un uso frequente, si indica significatività al livello del 5 %, e con due al livello dell'1 %. I due puntini stanno per un rapporto non significativo.

TABELLA II.

Valori significativi del rapporto delle varianze ottenuti dall'analisi della covarianza fra i diversi gruppi.

Caratteri posti in relazione	Fra le medie aggiustate				Fra i coefficienti di regressione			
	I e II	I e III	II e III	I-II e III	I e II	I e III	II e III	I-II e III
I con 2	31,84**	33,68**	..	22,53**	8,80**	..	9,84**	5,90**
I » 3	26,66**	63,94**	4,03*	29,98**	4,31*	4,77*	..	3,19*
I » 4	..	4,20*
I » 5	8,63**	33,07**	7,36**	15,39**
I » 6
I » 7	11,04**	7,03**	..	4,88*
I » 8	14,15**	8,04**	6,93**

Da questa tabella si vede come, eliminato l'effetto della regressione colla lunghezza del capo, compaiano eterogeneità fra le medie di (\log_{10}) diametro dell'occhio (non però fra II e III gruppo), lunghezza del capo (soprattutto fra il primo e gli altri due), lunghezza della pinna ventrale e distanza dall'inserzione della dorsale (in particolare fra II e III). A parità di lunghezza sino alla codale il diametro dell'occhio è notevolmente maggiore nel II e III gruppo che nel I, la ventrale cresce in lunghezza dal I al II e da questo al III, la distanza dalla dorsale è maggiore nel II che negli altri due gruppi. Della lunghezza del capo si è detto. Vale la pena di rilevare che fra i caratteri del capo, la distanza preorbitale non assume un potere discriminatorio: in parte questo può essere imputabile alla sua elevata variabilità relativa.

Le sette analisi i cui risultati sono sintetizzati nella tabella II danno risposte interessanti, ma anche divergenti, al nostro problema. D'altro canto esse rappresentano soltanto una frazione delle 56 analisi di questo genere che si possono fare accoppiando i caratteri in tutti i modi possibili e considerando uno stesso carattere una volta come variabile indipendente ed un'altra come dipendente. Non a tutte queste analisi si vorrebbe attribuire uguale significato interpretativo di un divario fra i gruppi, e d'altro canto i risultati possono fornire risposte contrastanti, segnalando eterogeneità in alcuni casi ed omogeneità in altri, e di difficile sintesi. Di più: le divergenze accertate fra medie aggiustate possono suscitare qualche perplessità, quando - come nell'esempio fatto per la lunghezza del capo rispetto a quella del corpo - si abbia differenza significativa fra le regressioni dei vari gruppi e la regressione media entro i gruppi non assuma il significato chiaro di una sintesi di regressioni omogenee.

Ancora, invece che limitarsi a mettere in relazione un dato carattere con un altro, si può pensare all'opportunità di studio della relazione di quel carattere con altri due o più, moltiplicando così le analisi necessarie e il numero delle risposte da interpretare.

Conviene pertanto affrontare la soluzione del nostro problema per altre vie, le quali consentano una risposta sintetica e chiaramente interpretabile, utilizzando tutte le informazioni fornite dai rilievi simultanei di più variabili correlate su ciascun soggetto.

Seguiremo ora alcune delle strade, variamente approfondite dalla teoria, che sono state aperte per questo scopo. Dobbiamo dire subito che l'indagine verrà ristretta ora a soli cinque caratteri, abbandonando quelli che l'analisi precedente ha mostrato di scarso potere differenziatore o che, come l'altezza, sembrano più soggetti all'influenza di condizioni puramente accidentali.

Prenderemo in considerazione i soli caratteri seguenti: 1° lunghezza sino alla codale, 2° diametro dell'occhio, 3° lunghezza del capo, 5° lunghezza della ventrale e 7° distanza dall'inserzione della dorsale. Nella tabella III presentiamo le covarianze che, colle varianze e le differenze fra le medie deducibili dalla tabella I, servono per le rimanenti elaborazioni.

TABELLA III.

Prospetto delle covarianze usate per la determinazione delle «distanze» fra i gruppi e per l'analisi discriminatoria.

Gruppi posti in relazione	covarianza fra i caratteri $\times 10^5$									
	1 e 2	1 e 3	1 e 5	1 e 7	2 e 3	2 e 5	2 e 7	3 e 5	3 e 7	5 e 7
I e II . . .	1665	1521	2100	1632	1454	1998	1546	1840	1404	1934
I e III . . .	1807	1742	2398	1901	1560	2149	1696	2071	1634	2243
II e III . . .	1775	1666	2198	1784	1597	2089	1692	1968	1583	2089
I-II e III . .	1749	1643	2232	1772	1537	2079	1645	1960	1540	2089

Indichiamo con $(\alpha_{ij})_p$ la matrice delle varianze e covarianze stimate relativa a p caratteri ($i, j = 1, 2, \dots, p$) e con (α_p^{ij}) la sua reciproca. Queste varianze e covarianze sono dedotte dall'osservazione conglobando le somme ed i prodotti degli scarti fra valori dati e medie entro i gruppi. Se i gruppi sono k , N_r è il numero di soggetti nel gruppo r -mo e x_{irt} è il (\log_{10} del) valore rilevato della variabile i -ma nel soggetto t -mo del gruppo r -mo, si ha, cioè:

$$\left(\sum_{r=1}^k N_r - k \right) \alpha_{ij} = \sum_{r=1}^k \sum_{t=1}^{N_r} (x_{irt} - \bar{x}_{ir}) (x_{jrt} - \bar{x}_{jr})$$

ove \bar{x}_{vr} indica il valore medio del carattere v -mo nel gruppo r -mo.

La statistica

$$V_{pk} = \sum_{i,j=1}^p \sum_{r=1}^k \alpha_p^{ij} N_r (\bar{x}_{ir} - \bar{x}_i) (\bar{x}_{jr} - \bar{x}_j)$$

ove α_p^{ij} è l'elemento generico dell'inversa di $(\alpha_{ij})_p$, stima della comune matrice delle varianze e covarianze delle r popolazioni, $\bar{x}_i = (\sum_r \bar{x}_{ir}) / (\sum_r N_r)$ e gli altri simboli hanno il significato noto, costituisce una estensione al caso di più campioni del concetto di « distanza » generalizzata, che tosto vedremo, formulato da Mahalanobis (1936) per il confronto tra due.

Questa statistica può essere usata come un χ^2 con $p(k-1)$ gradi di libertà per verificare l'ipotesi che i valori medi delle p variabili sono i medesimi nelle k popolazioni dalle quali provengono i campioni esaminati (Rao, 1945 e 1952).

Nel caso nostro, $k=3$, $N_r=60$ in ogni campione. Considerando tutti i cinque caratteri menzionati si è ottenuto $V_{53} = 97,0147$, che con 10 gradi di libertà risulta significativo al livello dell'1 %.

Sulla base dei soli primi due e dei soli primi tre caratteri si è ottenuto $V_{23} = 45,7764$ e $V_{33} = 80,2333$, valori, i quali, con 4 e 6 gr. di l., rispettivamente, denunciano significatività al livello dell'1 %. Accertata con V_{23} la eterogeneità fra i tre gruppi sulla base dei soli primi due caratteri, è il caso di vedere se l'aggiunta della lunghezza del capo, ed ai primi tre degli ultimi due caratteri forniscano informazione indipendente e significativa ai fini della discriminazione fra le tre popolazioni. La differenza $V_{(p+q)k} - V_{pk}$, ove q indica il numero dei caratteri aggiunti ai primitivi p , può essere usata come un χ^2 con $q(k-1)$ gr. di l. per giudicare della significatività della maggiore informazione apportata dai caratteri suppletivi (Rao). Coi valori sopra indicati si ottiene: $V_{33} - V_{23} = 34,4569$, che con 2 gr. di l. è significativo al livello dell'1 %, e anche $V_{53} - V_{33} = 16,7814$, pure significativo, con 4 gr. di l., al livello dell'1 %. In sostanza, la lunghezza sino alla codale ed il diametro dell'occhio, congiuntamente, già indicano eterogeneità fra le tre popolazioni, ma l'aggiunta della lunghezza del capo migliora sensibilmente il giudizio, ed anche quella dei due caratteri successivi, anche se meno vantaggiosa complessivamente, riesce utile ad approfondire ulteriormente la discriminazione.

Passando al confronto a due a due dei gruppi tra loro, la « distanza » generalizzata D_p^2 fra le due popolazioni stimata sulla base dei due campioni è data dall'espressione

$$D_p^2 = \sum_{i,j=1}^p \sum_{r=1}^k \alpha_p^{ij} (\bar{x}_{i1} - \bar{x}_{i2}) (\bar{x}_{j1} - \bar{x}_{j2}),$$

in cui i simboli hanno il significato noto.

Questa statistica, atta ad una generalizzazione della classica analisi della varianza ad una dimensione, è funzione monotona decrescente di un rapporto, che a numeratore ha una funzione dei valori osservati che corrisponde alla varianza entro i gruppi (*within*) ed a denominatore una funzione assimilabile alla varianza fra i gruppi (*between*) della analisi della varianza.

Il valore $K_p CD_p^2$, ove $K_p = (N_1 + N_2 - p - 1)/p$, $C = N_1 N_2 / (N_1 + N_2)(N_1 + N_2 - 2)$, N_1 e N_2 sono il numero di elementi nel primo e nel secondo campione, può essere usato come un rapporto delle varianze con p e $(N_1 + N_2 - p - 1)$ gr. di l. per verificare l'ipotesi che le medie dei p caratteri sono le medesime nelle due popolazioni (Bose e Roy, 1938; Rao, 1952).

Se D_p^2 e D_{p+q}^2 sono due misure della distanza ottenute considerando rispettivamente p e $(p + q)$ caratteri, la statistica $H_{pq} (R_{pq} - 1)$, ove $H_{pq} = (N_1 + N_2 - p - q - 1)/q$, $R_{pq} = (1 + CD_{p+q}^2)/(1 + CD_p^2)$ e $C = N_1 N_2 / (N_1 + N_2)(N_1 + N_2 - 2)$, può essere usata come un rapporto delle varianze con q e $(N_1 + N_2 - p - q - 1)$ gr. di l. per vedere se i q caratteri aggiuntivi apportano un aumento significativo all'informazione.

È facile dimostrare anche la relazione $D_p^2 = \sum_{i=1}^p l_i d_i$, ove d_i è la differenza fra le medie nei due gruppi del carattere i -mo, ed i coefficienti l sono i coefficienti della funzione $L_p = \sum_{i=1}^p l_i x_i$ (x_i = valore osservato del carattere i -mo), proposta dal Fisher (1936) per l'analisi discriminatoria fra due gruppi. Questi coefficienti vengono determinati (a meno di un fattore di proporzionalità) in modo che la L_p assume il significato di migliore funzione discriminante fra due popolazioni, nel senso che essa, rispetto ad ogni altra funzione lineare dei dati, rende massima la differenza tra il suo valor medio nel primo e nel secondo gruppo, a condizione che la sua varianza sia costante.

Una particolare applicazione del metodo del perno, nell'elaborazione di Aitken (1933; per dettagli vedi Rao, 1952), consente di ottenere con relativa rapidità successivi valori di D_p^2 e dei coefficienti di L_p , aumentando mano mano il numero dei caratteri presi in considerazione. Abbiamo seguito questa via per ottenere i risultati esposti nei prospetti seguenti ove, per ragioni di spazio, presentiamo i valori dei coefficienti di L_p per il solo caso $p = 5$.

Caratteri considerati	Valori di D_p^2 fra i gruppi			Valori dei coeff. di L_5 fra i gruppi		
	I-II	I-III	II-III	I-II	I-III	II-III
I	0,004984	0,014042	0,002992	-61,610650	-41,099607	8,795308
I-2	1,044921	1,146393	0,012692	22,417176	28,441065	-8,832674
I-3	1,401423	2,710875	0,232777	28,987604	69,704641	18,789845
I-3 e 5 . . .	1,402401	2,986585	0,387709	-0,465783	17,364932	15,611870
I-3, 5 e 7 .	1,538213	4,464090	0,756902	18,222494	-67,950000	-36,841912

Calcolando le statistiche sopra definite, si sono ottenuti i valori indicati nei prospetti seguenti, nei quali, secondo la convenzione adottata, il livello di significatività, coi voluti gradi di libertà, è precisato dagli asterischi.

Fra le varie osservazioni che i risultati raggiunti suggeriscono, possiamo qui sottolinearne alcune. La « distanza » appare sempre massima fra I e III gruppo e minima fra II e III, aumentando il numero di caratteri nell'ordine indicato. I soli due caratteri 1° e 2° bastano a distinguere il I dagli altri due gruppi, ma aggiungendo il terzo migliorano significativamente le possibilità di differenziazione. Per distinguere fra II e III gruppo occorrono almeno quattro caratteri. La differenziazione fra il III gruppo e gli altri due si avvantaggia per ogni carattere suppletivo, nell'ordine dato.

Caratteri considerati	Valori di $K_p CD_p^2$ nel confronto fra i gruppi			Caratteri considerati	Valori di $H_{pq} (R_{pq} - 1)$ nel confronto fra i gruppi		
	I-II	I-III	II-III		I-II	I-III	II-III
I	0,15	0,42	0,09	3 oltre I-2 . .	8,31**	35,73**	6,47*
I-2	15,54**	17,05**	0,19	5 » I-3 . .	0,02	4,77*	4,28*
I-3	13,78**	26,65**	2,29	7 » I-3 e 5	2,90	24,34**	9,74**
I-3 e 5 . .	10,25**	21,83**	2,83*	3,5,7 » I-2 . .	3,76	24,82**	7,17**
I-3, 5 e 7 .	8,92**	25,88**	4,39**	5,7 » I-3 . .	1,46	15,04**	7,17**

Prendendo il caso dei gruppi più ravvicinati, il II e il III, il valor medio di L_5 è 4,872139 [= 1,4288 × 8,795308 + . . . + 1,0231 × (− 36,841912)] nel II e 5,626301 nel III gruppo. Un nuovo esemplare le cui cinque misure (logaritmiche) introdotte nella L_5 , diano, ad esempio, un valore superiore a 5,24922 (semisomma delle medie) potrà venir assegnato al III gruppo, e in caso diverso al II. Naturalmente un criterio discriminatorio di questo genere non va usato meccanicamente, ma deve essere integrato, nell'applicazione, da ogni altra informazione disponibile nel caso concreto.

BIBLIOGRAFIA.

(La bibliografia si riferisce solo ai lavori citati nel testo).

SNEDECOR G. W., *Statistical Methods*. Ames (Iowa), 1946 (IV ed.).

TEISSIER G., *La Relation d'Allométrie: sa Signification Statistique et Biologique*, « Biometrics », vol. IV, p. 14 (1948).

MAHALANOBIS P. C., *On the generalized distance in statistics*, « Proc. Nat. Inst. Sci. (India) », vol. XII, p. 49 (1936).

RAO C. R., *Generalization of Markoff's theorem and tests of linear hypothesis*, « Sankhyā », vol. VII, p. 9 (1945).

ID., *Advanced statistical methods in biometric research*. New York, 1952.

BOSE R. C. e ROY S. N., *The distribution of the studentized D^2 statistics*, « Sankhyā », vol. IV, p. 19 (1938).

FISHER R. A., *The use of multiple measurements in taxonomic problems*, « Ann. Eugen. London », vol. VII, p. 179 (1936).

Biologia. — *Effetti dell'azide sodico sulle uova di «Bithynia codiella»*^(*). Nota ^(**) di CARMELA ATTARDO, presentata dal Socio G. COTRONEI.

L'azide sodico è considerato come un inibitore specifico della citocromo-ossidasi: questa, nell'uovo di *Bithynia codiella* è localizzata fin dai primi momenti dello sviluppo nella metà animale, da cui hanno origine, per segregazioni successive, i diversi quartetti di micromeri, che rappresentano il territorio di origine dell'ectoderma e di alcuni organi cefalici.

In tale situazione meritavano di essere analizzate dal punto di vista organo genetico le conseguenze del blocco della citocromo-ossidasi con l'azide sodico.

Le uova, nei nidamenti, allo stadio indiviso e fino allo stadio XII, vennero trattate per 3 o 4 ore a concentrazioni diverse di azide sodico. Dopo abbondante lavaggio, furono poste a svilupparsi in acqua di fonte.

Alle concentrazioni qui sotto indicate, le uova in azide cessano di dividersi: lo sviluppo riprende quando le uova vengono poste in acqua di fonte.

A) Con concentrazioni 0,1 M di NaN_3 per ore 3, si ha un certo numero di exogastrule, ma specialmente le uova vengono bloccate a stadi precoci; il 60% delle uova riesce a completare lo sviluppo; di queste l'8% presentano malformazioni cefaliche.

B) Con concentrazioni 0,1 M di NaN_3 per 4 ore si ha: alta percentuale di uova bloccate alle prime segmentazioni o alla gastrulazione: solo il 15% riesce a completare lo sviluppo, ma tutti gli individui presentano anomalie a carico del mantello e della ghiandola della conchiglia (fig. 1).

C) Con concentrazioni 0,07 M di NaN_3 per 4 ore si hanno: poche exogastrule, il 67% di individui normali e il 9% di individui con malformazioni cefaliche (fig. 2).

Le malformazioni cefaliche ottenute, sia con la concentrazione 0,1 M per 3 ore, che con quella 0,07 M per 4 ore, sono dello stesso tipo e cioè:

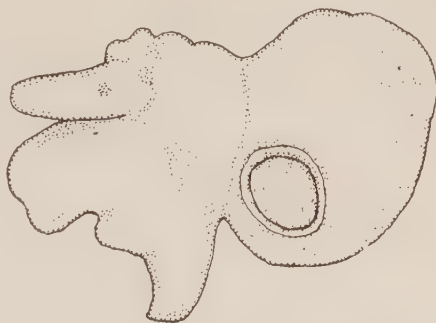


Fig. 1. — Individuo anomalo con conchiglia rudimentale e mantello che non ricopre la massa viscerale.

(*) Ringrazio il prof. G. Reverberi per aver diretto la presente ricerca e per la concessione di una borsa di studio presso il Centro di Citofisiologia del C.N.R. in Palermo.

(**) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1955.

- a) mancanza di un occhio e riduzione del tentacolo corrispondente; piede più piccolo;
- b) mancanza di un occhio o di un tentacolo;
- c) assenza di un occhio e tentacoli ridotti;
- d) assenza di tutti e due gli occhi.

Le anomalie a carico del mantello e della ghiandola della conchiglia, che si ottengono col trattamento 0,01 M per 4 ore consistono in uno scarso differenziamento e sviluppo del mantello, che non riesce a ricoprire la massa viscerale. La conchiglia è rudimentale.

Da quanto è stato esposto risulta che il trattamento degli individui di *Bithynia* con l'azide sodico produce malformazioni a carico dei derivati ectodermici cefalici, del mantello e della conchiglia.

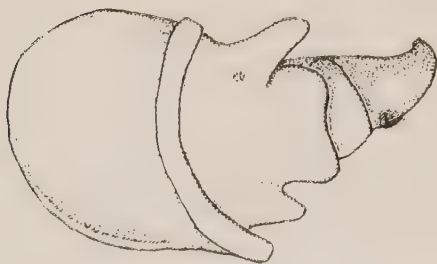


Fig. 2. - Individuo anomalo privo di un occhio e tentacolo corrispondente ridotto.

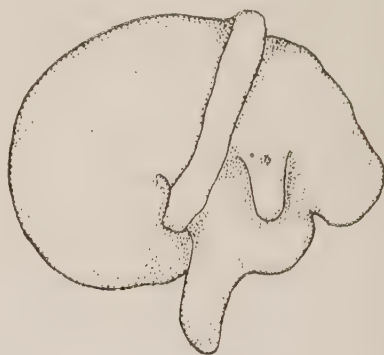


Fig. 3. - Controllo.

Poiché gli organi cefalici derivano dai blastomeri, nei quali precocemente è segregata la citocromo-ossidasi, si può ammettere che le anomalie in questione siano conseguenti alla inibizione della citocromo-ossidasi per opera dell'azide sodico.

CONCLUSIONI. - Sono state trattate le uova di *Bithynia codiella* con le seguenti concentrazioni: 0,1 M e 0,07 M di NaN_3 . Il periodo di esposizione è stato di 3 o 4 ore:

- 1° la concentrazione 0,1 M per 3 ore dà malformazioni cefaliche;
- 2° la concentrazione 0,1 M per 4 ore dà malformazioni a carico del mantello e della ghiandola della conchiglia;
- 3° la concentrazione 0,07 M per 4 ore dà malformazioni cefaliche;
- 4° poiché il NaN_3 inibisce specificamente la citocromo-ossidasi; e poiché questa, nell'uovo in sviluppo di *Bithynia* è localizzata nei micro-quartetti animali, territorio presuntivo dei derivati ectodermici, si ritiene che responsabile delle anomalie sia il blocco parziale della citocromo-ossidasi.

Biologia. — *L'azione del γ -dinitrofenolo sulle uova di « Tubifex rivulorum »* (*). Nota (**) di FRANCESCA CARRANO, presentata dal Socio G. COTRONEI.

L'azione del dinitrofenolo è stata studiata su uova di Anfibi (Cutting e Tainter, 1935 ⁽¹⁾; Dawson 1938 ⁽²⁾; Andreassi, 1942 ⁽³⁾; Steinert, 1953 ⁽⁴⁾) e di Echinodermi (Tamini, 1941 ⁽⁵⁾; Pease, 1941 ⁽⁶⁾; Motomura, 1947 ⁽⁷⁾; Hörstadius, 1953 ⁽⁸⁾; Ishikawa, 1954 ⁽⁹⁾); un'analisi di questi lavori in rapporto con i miei risultati verrà fatto in un'ulteriore pubblicazione.

Nella presente Nota riferisco i risultati ottenuti trattando le uova di *Tubifex rivulorum* con il γ -dinitrofenolo.

Dell'uovo di *Tubifex* si conosce la localizzazione della indofenol-ossidasi (Lehmann 1941 ⁽¹⁰⁾, 1948 ⁽¹¹⁾) o citocromo-ossidasi (Carrano e Palazzo 1955 ⁽¹²⁾), della succino-deidrogenasi e della benzidin-perossidasi (Carrano e Palazzo 1955 ⁽¹²⁾): i primi due enzimi sono localizzati nel « polplasma », ritenuto sostanza organo-formativa, che durante la morfogenesi si raccoglie nel primo

(*) Lavoro eseguito nel Centro di studio per la Citofisiologia sperimentale presso l'Istituto di Zoologia dell'Università di Palermo.

(**) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1955.

Ringrazio il prof. G. Reverberi per aver consigliato e diretto le presenti ricerche e per la concessione di una borsa di studio del C.N.R.

(1) W. C. CUTTING & M. L. TAINTER, *Dinitrophenol on metamorphosis of Amphibians*, « Proc. Soc. Exp. Biol. Med. », 31, 97 (1933).

(2) A. DAWSON, *Effects of 2,4 dinitrophenol on the early development of the frog, « Rana pipiens »*, « J. Exp. Zool. », 78, 101 (1938).

(3) G. ANDREASSI, *Lo sviluppo delle uova e delle larve di Anfibi nelle soluzioni di alfa-dinitrofenolo*, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 17, 61 (1942).

(4) M. STEINERT, *Metabolisme de l'acide ribonucleique dans l'oeuf d'Amphibien traité au dinitrophenol*, « Bioch. Biophys. Acta », 103, 427 (1953).

(5) E. TAMINI, *Ricerche sull'animalizzazione nello sviluppo dei Ricci di mare*, « Monitore Zoologico Ital. », 52, 81, (1941).

(6) D. C. PEASE, *Echinoderm bilateral determination in chemical concentration gradients. I. The effects of cyanide, ferricyanide, iodoacetate, picrate, dinitrophenol, urethane, iodine, malonate, etc.*, « J. Exp. Zool. », 86, 381 (1941).

(7) I. MOTOMURA, *Corrective of dinitrophenol on the lithium larva of the sea urchin*, « Science Reports of Tohoku University », 18, 80 (1947).

(8) S. HÖRSTADIUS, *Vegetalization of the sea urchin egg by dinitrophenol and animalization by trypsin and ficin*, « J. Embr. and. Exp. Morph. », 1, 327 (1953).

(9) M. ISHIKAWA, *The activation of sea urchin eggs by means of phenols*, « Embryologia », 2, 51 (1954).

(10) E. F. LEHMANN, *Die Indophenolreaktion der Polplasmen von « Tubifex »*, « Naturwiss. », 29, 101 (1941).

(11) F. E. LEHMANN, *Zur Entwicklungsphysiologie des Polplasmen des Eies von « Tubifex »*, « Rev. Suisse Zool. », 55, 1 (1948).

(12) F. CARRANO & F. PALAZZO, *Localizzazione precoce di alcuni enzimi nello sviluppo dell'uovo di « Tubifex rivulorum »*, « Riv. Biol. », 47, (1955).

e nel secondo somatoblasto (2 *d* e 4 *d*), territori di origine del sistema nervoso, della muscolatura e in genere del mesoderma. Questi due enzimi sono ritenuti mitocondriali; di fatto la più fitta popolazione di mitocondri si rinviene nel polplasma e quindi nella 2 *d* e nella 4 *d* (Lehmann 1954⁽¹³⁾).

In base a questi dati ho trattato le uova di *Tubifex rivulorum* in sviluppo, con il γ -dinitrofenolo, che, come tutti i fenoli, (Hartman 1950⁽¹⁴⁾ e Hunter 1951⁽¹⁵⁾), agirebbe appunto sui mitocondri.

Ho sottoposto a trattamento continuo, ovvero per 3 ore le uova, a vari stadi di sviluppo e a diverse concentrazioni (γ -dinitrofenol di Merck, Darmstadt). Ho ottenuto le diverse concentrazioni diluendo con acqua di fonte la soluzione molare in acqua distillata.

I. TRATTAMENTO CONTINUO. - Le uova a tutti gli stadi di sviluppo nei kocons, furono lasciate soggiornare, fino al differenziamento dei piccoli vermi, nelle concentrazioni seguenti: 3×10^{-6} M; $4,5 \times 10^{-6}$ M; 5×10^{-6} M; 6×10^{-6} M; 7×10^{-6} M di γ -dinitrofenolo.

RISULTATI: - a) le uova, dallo stadio indiviso allo stadio Myr-Myl, trattate con la concentrazione 3×10^{-6} M, procedono nella segmentazione e nello sviluppo con un ritmo più rapido dei controlli. I piccoli vermi escono dai kocons con un anticipo di parecchi giorni; il loro aspetto è normale sia dal punto di vista morfologico che funzionale;

b) alle concentrazioni $4,5 \times 10^{-6}$ M e 5×10^{-6} M la segmentazione è ritardata; i vermi escono dai loro kocons con un ritardo di 15-20 e più giorni e presentano anomalie come descritto qui sotto. Le uova degli stadi precoci (indiviso - 2-4-8-10) danno l'80 % di vermi anomali mentre le uova degli stadi più avanzati (24-Myr-Myl) ne danno il 50 %;

c) le uova a stadi precoci (indiviso - 2-4-8-10), poste nelle concentrazioni 6×10^{-6} M e 7×10^{-6} M, compiono le prime divisioni, a ritmo lentissimo, e poi si arrestano. Le uova invece, a stadi avanzati (24-Myr-Myl) procedono lentamente nello sviluppo, con un ritardo di 20 e più giorni rispetto ai controlli. Gli individui anomali, che si ottengono, sono l'80 %;

d) lo studio *in vivo* delle anomalie ci permette di unire i vermi malformati in due gruppi:

1° la percentuale più alta di essi ha il corpo più corto, circa la metà del normale (fig. 2); ciò non è dovuto a un minor numero di metameri ma ad uno scarso sviluppo di essi, specie degli ultimi. Le setole sono più corte. La cavità celomatica è molto ampia specialmente dal secondo al decimo segmento. L'intestino è ridotto in diametro; la circolazione è poco visibile

(13) F. E. LEHMAN, *Recent advances in animal morphogenesis*, «Nature», 173, 517 (1954).

(14) F. J. HARTMAN, *Studies on Mitochondria - II. The structure of Mitochondria in relation to Enzymatic Activity*, «Exp. Cell. Research», 1, 394 (1950, b).

(15) E. F. HUNTER, *Oxidative Phosphorylation during electron transport*, «Phosphorus metabolism», 1, 297 (1951).

e a volte non si scorge né il vaso dorsale né quello ventrale. Il sacco muscolo-cutaneo è sviluppato, ma poco funzionale sicché l'animale non compie bene i movimenti locomotori;



Fig. 1 e Fig. 2. - Individui trattati.

2° la percentuale più bassa è data da vermi con anomalie più gravi (fig. 1). Il corpo ha un numero ridotto di metameri; la cavità celomatica è più ampia del normale per quasi tutta la lunghezza del corpo; le setole sono ridotte in numero e in lunghezza; l'intestino è arretrato nello sviluppo; i nefridi sono più grossi e più turgidi. I movimenti sono lentissimi e disordinati.

2. TRATTAMENTO PER 3 ORE: - Le uova, dallo stadio insegmentato allo stadio di Myr-Myl, sono state trattate per 3 ore con le seguenti concentrazioni: 5×10^{-6} M; 2×10^{-6} M; 1×10^{-5} M. Dopo il trattamento, le uova, lavate più volte, furono lasciate sviluppare in acqua di fonte. Ho notato che lungo il trattamento, la segmentazione era ritardata; tuttavia si ottennero vermi normali.



Fig. 3 - Controllo.

I risultati totali sono sintetizzati nella seguente tabella:

Stadio	Durata del trattamento	Concentrazioni	Risultati
da indiviso a Myr-Myl	3 ore	da 5×10^{-6} M a 1×10^{-5} M	larve normali
ind.-2-4-8-10 24-Myr-Myl	continuo	3×10^{-6}	sviluppo accelerato
ind.-2-4-8-10 24-Myr-Myl	continuo	$4,5 \times 10^{-6}$ M e 5×10^{-6} M	larve anomale 80 % larve anomale 50 %
ind.-2-4-8-10 24-Myr-Myl	continuo	6×10^{-6} M e 7×10^{-6} M	arrestati larve anomale 80 %

DISCUSSIONE.

1° Nel caso in cui le uova sono fatte sviluppare in γ -dinitrofenolo i risultati variano secondo lo stadio e la concentrazione:

a) l'accelerazione dello sviluppo, riscontrata con la concentrazione $3 \times 10^{-6} M$, è un effetto ben conosciuto del dinitrofenolo ed è stato riscontrato da molti Autori su materiale diverso;

b) gli stadi precoci sono molto sensibili agli effetti del γ -dinitrofenolo. Infatti mentre con le concentrazioni $4,5 \times 10^{-6} M$ e $5 \times 10^{-6} M$ essi danno 80 % di malformazioni, con le concentrazioni $6 \times 10^{-6} M$ e $7 \times 10^{-6} M$ sono più colpiti e si arrestano nello sviluppo.

Gli stadi avanzati sono più resistenti tanto da dare 50 % di malformazioni con le concentrazioni $4,5 \times 10^{-6} M$ e $5 \times 10^{-6} M$ e 80 % con le concentrazioni più forti: $6 \times 10^{-6} M$ e $7 \times 10^{-6} M$;

c) le anomalie sono a carico degli apparati digerente e circolatorio e del sistema muscolare.

Sono esse da attribuirsi all'azione del γ -dinitrofenolo? Purtroppo non conosciamo ancora bene il meccanismo di azione dei fenoli (vedi Simon 1953⁽¹⁶⁾); sappiamo che producono modificazioni nella superficie mitocondriale (Hartman 1950⁽¹⁴⁾ e Hunter 1951⁽¹⁵⁾) e che alterano il metabolismo respiratorio. Poiché alcune delle anomalie ottenute sono a carico di quei sistemi che derivano dalla 2^a e dalla 4^a, ove esiste il maggior numero di mitocondri (Lehmann 1954⁽¹³⁾), sembra lecito ritenere che esse possano essere una conseguenza delle alterazioni mitocondriali prodotte dal γ -dinitrofenolo.

2° I germi, trattati per 3 ore sono normali. Ciò può spiegarsi ammettendo che l'azione del γ -dinitrofenolo sia reversibile.

CONCLUSIONE. - Sono stati esposti i risultati ottenuti trattando le uova di *Tubifex rivulorum*, dallo stadio insegmentato allo stadio Myr-Myl, con diverse concentrazioni di γ -dinitrofenolo.

1° Trattamento continuo:

a) la concentrazione $3 \times 10^{-6} M$ dà accelerazione di sviluppo;

b) le concentrazioni $4,5 \times 10^{-6} M$ e $5 \times 10^{-6} M$ danno vermi malformati. Gli stadi precoci (indiviso - 2-4-8-10) sono molto sensibili;

c) alle concentrazioni $6 \times 10^{-6} M$ e $7 \times 10^{-6} M$ le uova dopo poche divisioni, arrestano lo sviluppo. Dalle uova a stadi avanzati si hanno vermi malformati;

d) le malformazioni sono a carico degli apparati circolatorio e digerente. Il sistema muscolare è difettoso funzionalmente.

2° Trattamento per 3 ore.

Le uova, a tutti gli stadi, poste per tre ore nelle concentrazioni $5 \times 10^{-6} M$; $2 \times 10^{-6} M$; $1 \times 10^{-5} M$ di γ -dinitrofenolo danno vermi normali.

(16) E. W. SIMON, *Mechanisms of dinitrophenol toxicity*, « Biol. Reviews », 28, 453 (1953).

Biologia. — *Le attività enzimatiche nello sviluppo embrionale e larvale degli Anfibi. Considerazioni su Anuri ed Urodeli* (*). Nota (**) di ENRICO URBANI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

I problemi del differenziamento e della realizzazione della forma nelle specie zoologiche hanno la base nella costituzione chimica dell'uovo fecondato, costituzione che con lo sviluppo subisce modifiche e trasformazioni caratterizzate dalla scomparsa di alcuni composti e dalla apparizione di altri.

Indubbiamente in questi fenomeni, che nel loro insieme determinano la specificità biochimica e zoologica, una importanza predominante spetta alle proteine cellulari ed i vari stadi dello sviluppo embrionale come le diverse fasi dei cicli biologici possono trovare una corrispondenza nell'atteggiamento biochimico del nucleo e del citoplasma.

Ogni trasformazione della sostanza vivente è operata da sistemi enzimatici e poiché i fermenti hanno una costituzione proteica (qualche rara eccezione è possibile secondo alcuni autori), vi è la tendenza ad ammettere (Duspiva, 1955) [6] che gli enzimi non soltanto condizionano il metabolismo cellulare ma rappresentano anche la maggior quantità delle proteine protoplasmatiche.

Questo suggestivo argomento dei rapporti tra proteine ed enzimi nei fenomeni biologici è stato oggetto di una serie di ricerche che i miei Collaboratori ed io abbiamo eseguite in questo Istituto. Esaminando l'atteggiamento delle proteasi in svariati materiali (Urbani, 1954 [12], 1955 [13]) abbiamo riconosciuto che questi enzimi presentano molte volte, in condizioni normali e sperimentali, un comportamento somigliante a quello dell'acido ribonucleico: ciò è interessante dati i rapporti generalmente riconosciuti tra acidi pentosenucleici e metabolismo delle proteine.

Una parte delle nostre ricerche ha avuto come oggetto lo sviluppo embrionale e larvale degli Anfibi con lo scopo di analizzare il ruolo delle proteasi nella trasformazione delle proteine vitelline in quelle cellulari [4, 12, 14, 15, 16]. Tra l'altro si è potuto mettere in evidenza un parallelismo di comportamento tra acido ribonucleico ed enzimi proteolitici, confermando nello sviluppo embriologico quanto già visto su altri materiali. Altro risultato che riguarda il significato dei differenti stadi di sviluppo è che questi sono caratterizzati da un preciso comportamento degli enzimi proteolitici e dell'RNA: l'atteggiamento del corredo biochimico dà perciò una indicazione del valore dei cicli biologici.

Questo studio condotto sugli Anfibi anuri (*Rana esculenta*, *Bufo vulgaris*) con l'esame delle dipeptidasi, proteinasi, acido ribonucleico, azoto totale

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 30 agosto 1955.

è stato esteso alle amilasi [18], lipasi [19] e fosfatasi [5] per stabilire confronti tra il metabolismo dei protidi e quello dei carboidrati, dei lipidi e degli esteri fosforici anche per i rapporti che probabilmente vi sono tra fosfatasi ed acidi nucleici.

Mentre si rimanda ai singoli lavori per l'esame dettagliato dei risultati ricordiamo che essi sono stati oggetto di una valutazione critica coordinata in una Memoria (Urbani, 1955) [14] nella quale tra le varie considerazioni viene affrontato il problema di una comparazione dei fenomeni metabolici negli Anuri e negli Urodeli.

Indubbiamente per la ricerca zoologica non solo le differenze ma anche le analogie possono avere un significato positivo nella interpretazione generale dei problemi dello sviluppo. Così se si esamina il comportamento dell'acqua durante l'accrescimento embrionale [14] si vede che esso segue le stesse leggi negli Anuri e negli Urodeli.

Per quanto riguarda gli enzimi proteolitici il lavoro di De Cesaris Coromaldi (1954) [4] in *Rana*, preceduto nella pubblicazione da quello di Løvtrup su *Amblystoma* (1953) [9] indica che l'andamento delle dipeptidasi è strettamente somigliante negli Anuri e negli Urodeli.

Quando i nostri lavori, indicati nella bibliografia della presente Nota, erano già comparsi è stato pubblicato uno studio di Løvtrup (1955) [10] che ha per oggetto l'analisi, condotta prevalentemente sugli Urodeli, della fosfatasi acida ed alcalina, della α -amilasi, delle catepsine (proteinasi) delle tripeptidasi, della tripsina, del DNA e dell'RNA.

Poiché gli argomenti sono gli stessi, in massima parte, di quelli delle nostre ricerche, la opportunità di questa Nota aggiuntiva alla Memoria già pubblicata [14] è suggerita dalla necessità di qualche parola di commento agli interessanti risultati dell'Autore danese e dalla possibilità di poter estendere quella comparazione tra le attività metaboliche degli Anuri e degli Urodeli già iniziata nella Memoria suddetta.

Si può subito dire che la corrispondenza dei nostri dati con quelli di Løvtrup è molto stretta come lo stesso Autore specifica in un Addendum al suo lavoro: « After the present paper was sent to the press, the following three papers have appeared: L. de Cesaris Coromaldi, *Studio delle dipeptidasi durante lo sviluppo embrionale di « Rana esculenta »*, « Ric. Scient. » 24, 319-325 (1954)); E. Urbani e L. de Cesaris Coromaldi, *Dipeptidasi e acidi nucleici nello sviluppo embrionale e larvale di « Bufo vulgaris »*, Ibid., 24, 1275-1284 (1954); Id., *Studio delle proteinasi nello sviluppo embrionale e larvale di « Rana esculenta »*, Ibid., 24, 2364-2374 (1954). Apart from minor details there is excellent agreement between the results in the present work and those reported in these papers, to which the reader may refer for comparison ».

Ciò è molto soddisfacente se si tiene conto della delicatezza delle tecniche del Carlsberg Laboratorium impiegate prevalentemente nelle nostre ricerche.

Passando brevemente in rassegna lo studio di Løvtrup (1955) [10] appare che oltre le dipeptidasi, come si è detto precedentemente, anche le catepsine

(proteinasì) hanno eguale comportamento negli Anuri e negli Urodeli. Fanno eccezione le tripeptidasi (da noi non studiate) che durante lo sviluppo di *Amblystoma mexicanum* e di *Rana platyrrhinus* mostrano differenti curve di attività il cui significato è, secondo Løvtrup, legato a differenze di specie animale.

L'acido ribonucleico, determinato da questo Autore con dosaggi del fosforo nucleico e del ribosio, mostra un aumento di sei volte dalla fecondazione alla fine del periodo embrionale di *Amblystoma mexicanum*. I nostri dosaggi delle basi azotate in luce ultravioletta indicano in *Bufo vulgaris*, per lo stesso periodo di sviluppo, un aumento di RNA da 10 γ a 60 γ circa per embrione [15, 17]: vi è perciò un soddisfacente accordo con i risultati ottenuti sugli Urodeli.

Løvtrup riscontra un parallelismo di comportamento tra enzimi proteolitici ed RNA nello sviluppo embrionale, argomento sul quale abbiamo ripetutamente richiamata l'attenzione [12, 13, 14, 15, 17] e che anche secondo questo Autore potrebbe avere il significato di una correlazione tra catepsine e acido ribonucleico nella sintesi delle proteine cellulari.

Le fosfatasi acida ed alcalina hanno andamento molto somigliante negli Anuri (De Cesaris Coromaldi, 1955 [5] e negli Urodeli (Løvtrup, 1955) [10] ed ambedue questi Autori hanno rilevato che a seconda si usi come substrato il glicerofosfato o il fenilfosfato si hanno differenti risultati nella entità della idrolisi enzimatica come se effettivamente esistessero nell'embrione degli Anfibi una glicerofosfatasi acida ed alcalina ed una fenilfosfatasi acida ed alcalina.

Lo studio delle amilasi da noi eseguito [18, 14] su *Bufo* e su *Rana* ha dato dei risultati un po' diversi da quelli di Løvtrup su *Amblystoma*: ciò potrebbe essere spiegato con una differenza di specie (similmente a quanto si è visto per le tripeptidasi) oppure, più verosimilmente, dovuto al fatto che Løvtrup ha determinato le α -amilasi (destrinizzanti) mentre noi abbiamo studiato l'idrolisi dell'amido e del glicogeno da parte delle β -amilasi (saccarificanti). Una risposta precisa alla questione potrà essere data dalla analisi della α -amilasi negli Anuri.

Le lipasi non sono state determinate da Løvtrup e perciò non si hanno dati da confrontare con i nostri. Se si presume che questi enzimi abbiano un comportamento somigliante alle esterasi ci si può riferire alla ricerca di Sawyer (1943) [11] su *Amblystoma* e si vede che tra Anuri e Urodeli non vi sono forti differenze. Ci ripromettiamo comunque lo studio delle lipasi anche negli Urodeli.

In conclusione da questa breve comparazione dei risultati appare che per quanto riguarda le proteinasi, le dipeptidasi, le fosfatasi acide e alcaline e l'acido ribonucleico tutti questi enzimi e composti mostrano un comportamento somigliante nei due ordini di Anfibi. A questo va aggiunto che il comportamento dell'acqua, della attività respiratoria e dell'azoto totale ha anche eguale andamento generale.

Una particolare menzione sul significato biochimico dei cicli di sviluppo merita lo stadio di *fine vitello* sul valore del quale abbiamo più volte insistito.

Cotronei (1922 [1], 1930 [2], 1932 [3]) ha dimostrato che con la fine del riassorbimento del tuorlo cambiano le correlazioni metaboliche ed umorali dell'embrione che è divenuto larva. I composti chimici studiati hanno in corrispondenza di questo stadio critico un preciso atteggiamento; precisamente gli enzimi proteolitici, l'RNA e le lipasi diminuiscono la loro attività o il loro tenore, le amilasi mostrano un aumento e le fosfatasi rimangono invece costanti o tendono a una leggera diminuzione.

I grafici riportati da Løvtrup per gli Urodeli sono in accordo con questi nostri risultati sugli Anuri e perciò nelle linee generali il passaggio dalla vita embrionale alla vita larvale mostra di avere in ambedue gli ordini di Anfibi lo stesso significato metabolico.

Un problema molto interessante del quale si è già parlato [14] riguarda le sintesi enzimatiche e gli enzimi adattativi nello sviluppo embrionale. Anche Løvtrup affronta questo argomento adducendo interessanti considerazioni sul tema della ontogenesi dei fermenti (Herlitzka, 1907) [7] che pone su di un piano enzimatico la classica, dibattuta e non risolta disputa del preformismo e della epigenesi. Ricordiamo qui come l'esistenza di un corredo enzimatico preformato sia stata dimostrata dai nostri studi sugli organismi in *vita latente* [20, 21, 22, 23].

A conclusione di questa breve Nota è opportuno anche prospettare l'interesse di questo indirizzo chimico di ricerca nell'ambito della Zoologia ecologica. È noto che alcuni Anfibi anuri, come per esempio lo *Xenopus*, vivono sempre nell'acqua e per loro la metamorfosi non ha il significato (come per la rana e per il rospo) della conquista dell'ambiente terrestre. È possibile che lo studio degli enzimi, piloti di ogni attività metabolica, possa dare dei risultati interessanti se valutati in funzione della ecologia delle forme.

BIBLIOGRAFIA

- [1] COTRONEI G., *Nuove ricerche sullo sviluppo e sulla metamorfosi degli Anfibi anuri in riferimento ad esperienze di innesti*, « Arch. Zool. Ital. », 10, 85 (1922).
- [2] COTRONEI G., *Lineamenti storici ed impostazioni concrete in esperienze di trapianti tra Anuri ed Urodeli*, « Mon. Zool. Ital. », 41, 8 (1930).
- [3] COTRONEI G., *Costituzione zoologica e trapianti. Ricerche tra Anuri ed Urodeli. Considerazioni*. Nota IX, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 6, 15, (1932).
- [4] DE CESARIS COROMALDI L., *Studio delle dipeptidasi durante lo sviluppo embrionale di « Rana esculenta »*, « Ric. Sci. », 24, 319 (1954).
- [5] DE CESARIS COROMALDI L., *Studio delle fosfatasi durante lo sviluppo embrionale e larvale di « Bufo vulgaris »*, « Ric. Sci. » 25, 2323 (1955).
- [6] DUSPIVA F., *Zur Biochemie der normalen Wirbeltierentwicklung*, « Naturwiss. », 42, 305 (1955).
- [7] HERLITZKA A., *Sur l'ontogenèse des fermentes*, « Arch. Ital. de Biol. », 48, 119 (1907).
- [8] LØVTRUP S., *Energy sources of amphibian embryogenesis*, « C. R. Lab. Carlsberg », Sér. Chim. 18, 371 (1953).
- [9] LØVTRUP S., *Changes in the content of peptidases during amphibian embryogenesis at different temperatures*, « C. R. Lab. Carlsberg », Sér. Chim., 28, 400 (1953).

- [10] LØVTRUP S., *Chemical differentiation during amphibian embryogenesis*, « C. R. Lab. Carlsberg », Sér. Chim. 29, 261 (1955).
- [11] SAWYER C. H., *Cholinesterase and the behavior problem in Amblystoma*, « J. Exp. Zool. », 92, I e 94, I (1943).
- [12] URBANI E., *Dipeptidasi e acidi nucleici nel metabolismo della cellula*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16, 556 (1954).
- [13] URBANI E., *Gli enzimi proteolitici nella cellula e nell'embrione*. « Experientia », 11, 209 (1955).
- [14] URBANI E., *Aspetti enzimatici dello sviluppo embrionale e larvale. Saggio di zoologia fisiologica degli Anfibi*, « Ric. Sci. », 25, 2258 (1955).
- [15] URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., *Dipeptidasi e acidi nucleici nello sviluppo embrionale e larvale di « Bufo vulgaris »*, « Ric. Sci. », 24, 1275 (1954).
- [16] URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., *Studio delle proteinasi nello sviluppo embrionale e larvale di « Rana esculenta »*, « Ric. Sci. », 24, 2364 (1954).
- [17] URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., *Studio delle proteinasi nello sviluppo embrionale e larvale di « Bufo vulgaris »*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 8, 341 (1955).
- [18] URBANI E., SCOLLO LAVIZZARI G., *Studio delle amilasi nello sviluppo embrionale e larvale di « Bufo vulgaris »*, « Ric. Sci. », 25, 1151 (1955).
- [19] URBANI E., SCOLLO LAVIZZARI G., *Studio delle lipasi durante lo sviluppo embrionale e larvale di « Rana esculenta »*, « Ric. Sci. », 25, 2119 (1955).
- [20] URBANI E., ROGNONE S. e RUSSO S., *Osservazioni sulla vita latente. - I. Studio delle dipeptidasi di « Artemia salina L. »*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 13, 300 (1952).
- [21] URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., *II. Studio delle proteinasi di « Artemia salina L. »*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 14, 144 (1953).
- [22] URBANI E., RUSSO S. e L. ROGNONE, *III. Studio delle amilasi di « Artemia salina L. »*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 14, 698 (1953).
- [23] URBANI E. e URBANI MISTRUZZI L., *IV. Studio della fosfatasi alcalina di « Artemia salina L. »*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 15, 126 (1953).

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1955 - Settembre-Ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Fisica. — *Su di una nuova teoria della gravitazione.* Nota (*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

Nello studio dei fenomeni naturali, il fisico comincia, di solito, col rilevare come essi si appalesano ai suoi sensi, sia pure affinati da particolari congegni ed artifici, per poi, se ne ha la possibilità, stabilirne qualche legge quantitativa. Oltre a ciò, è suo compito avanzare ipotesi, più o meno attendibili, sulla natura e sulle cause dei fenomeni stessi. Tali ipotesi possono portarlo ad ammettere fatti od enti, sulla cui reale esistenza non è sempre facile sicuramente pronunziarsi. Talvolta però i tentativi che si compiono in questo ultimo senso, sono infruttuosi, ed il quadro interpretativo del fenomeno studiato, rimane, in certo modo, incompleto. Ma, a rigore, tale difetto è sempre caratteristico di tutte le indagini. Infatti, il ricercatore, nelle sue osservazioni ed esperienze, mai può stabilire la vera essenza dei fatti, che, per sua natura, e per la limitatezza del nostro spirito è necessariamente insondabile. A parte ciò, il quadro interpretativo dei singoli fatti è talvolta del tutto incompleto. Questo è il caso della gravitazione universale, governata dalla semplice legge di Newton, che, nella sua forma metrica quadratica, rappresenta soltanto una conseguenza della geometria euclidea dello spazio, intorno ad un punto. Ma qual sia il processo intimo, che dà luogo a quella forza, costituisce da tre secoli circa, un completo mistero. Né un lembo di questo può apparire sollevato dalla formulazione delle cosiddette *teorie unitarie* che dovrebbero inclu-

(*) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1955.

dere in un solo quadro, apparentemente comprensivo, fenomeni, che, pur rappresentando tutti, fatti energetici dell'ente materia, hanno in sé qualcosa che nettamente li distingue. Così, riunire: la traslazione uniforme (di imprecisata materia) con la trasmissione della luce (per costruire la relatività ristretta o speciale); oppure i moti accelerati rettilinei o di rotazione con la gravitazione (per la relatività generale); od infine i fenomeni elettrici con la gravitazione; costituisce altrettanti arbitri, non giustificati da alcun fatto sperimentale. Si dice ciò, pur presentando talvolta tali riavvicinamenti od asserzioni di equivalenza, intrinseci motivi di inconsistenza od assurdità, come ho già fatto vedere per quanto concerne la relatività speciale, o, come ancor meglio mostrerò ora, per la relatività generale.

Tale ultima teoria rappresenta, per Einstein, una estensione di quella speciale, nel senso che la relatività dei moti di traslazione uniforme tra due sistemi, debba potersi estendere a moti qualsiasi. Riconosce così egli, che tale estensione non consente più di mantenere il suo principio della costanza di velocità della luce, per qualsiasi osservatore. Rappresenterebbe ciò un confortante ritorno alla meccanica classica, se quel principio non fosse già assurdo, per la relatività speciale.

A parte ciò, la relatività generale sarebbe quella che vale anche per i moti di rotazione. Così, per esempio, dovrebbe essere indifferente ritornare dal sistema copernicano a quello tolemaico, del quale già Galileo aveva mostrato gli assurdi. Possiamo tentare di seguire Einstein nell'impostazione della sua seconda teoria. Considera egli due masse liquide eguali, sottratte ad ogni loro azione reciproca, perché lontane, o da parte di altre masse. Esse assumono la forma sferica, in conseguenza della loro coesione. Si supponga che una di esse sia soggetta ad un moto di rotazione uniforme, intorno alla congiungente dei loro centri. Se le masse fossero rigide, un osservatore, sito su una di esse, potrebbe ammetter in ogni caso che sia l'altra a ruotare. Ma realmente, poiché le sfere sono fluide, quella che ruota appare schiacciata ai poli, e rigonfia all'equatore, come avviene per la Terra. Tale fatto, ammette Einstein, può essere verificato da osservatori siti sulla sfera schiacciata, ossia trasformata in elissoide di rotazione. Ma ciò non infirma, a suo avviso, la teoria generale della relatività, perché, egli afferma (dicendo di seguire in ciò, Mach) lo schiacciamento osservabile in una delle due sfere è *condizionato* dal sistema delle masse lontane (le stelle fisse) che non fanno parte del sistema delle due sfere. Forse Einstein è stato indotto in tale ammissione, non necessaria, dal voler riferire il fenomeno, nella sua analisi matematica, ad assi coordinati assolutamente fissi nello spazio. L'ammissione stessa appare del tutto incomprensibile, poiché non si sa in che cosa debba consistere l'azione dei mondi lontani, essendo stata esclusa quella gravitazionale. Inoltre, l'esempio scelto da Einstein, per illustrare i fondamenti della sua seconda teoria, è particolare, e non regge ad un'altra critica. Infatti, se una delle due sfere ruotasse intorno ad un'asse perpendicolare alla congiungente dei loro due centri, tale fatto, anche nel caso di sfere rigide, sarebbe concordemente constatato da osservatori sulle due sfere.

Lo schiacciamento ai poli di una delle due sfere va dunque interpretato quale un *fatto assoluto*, venendosi così a rispettare i principi della meccanica classica. Seguendoli, se possiamo ammettere che la traslazione uniforme di un sistema sia un fatto *relativo*, nel senso che esso debba venir riferito ad altro sistema; non così avviene per la rotazione. Questa ha caratteristiche assolute, e indipendenti da qualsiasi riferimento, esterno al sistema. Gli effetti dipendenti dalla rotazione di una massa non rigida, come lo schiacciamento di una sfera, vanno considerati quali necessarie conseguenze del principio di inerzia, secondo cui la materia, sottratta ad influenza esterna, tende a muoversi in linea retta; e questa linea per essere retta non ha bisogno di riferimento ad assi coordinati che abbiano posizione assolutamente definita. Essa, se si cambiano tali assi, resta sempre una retta.

Non è dunque possibile seguire Einstein, nell'esame del modello da lui scelto, per formulare la sua teoria generale.

Si può ancora esaminare, come Einstein mette in relazione più diretta i moti uniformemente accelerati con i campi di gravitazione, asserendone, infine, la completa equivalenza. Consideriamo, con lui, il modello di una grande scatola sospesa ad una corda, simile ad un comune ascensore. Possono avvenire due casi: nel primo, la scatola con i suoi osservatori interni, sottratta idealmente all'azione del campo gravitazionale terrestre, è soggetta, per mezzo della corda a cui è applicata una forza costante, ad una trazione verso l'alto. Il suo moto risulta così uniformemente accelerato. Nel secondo caso, la scatola è immobile e soggetta al suo peso, nel campo terrestre. In entrambi i casi, si ammette che la forza che tende la corda sia eguale, il che è realmente possibile. I due casi, come si è detto, sono per Einstein, equivalenti. Ma possiamo convincerci del contrario. Immaginiamo, per chiarezza, che dapprima il sistema scatola-corda non subisca alcuna azione esterna: nella scatola non vi ha campo gravitazionale, e la corda è senza tensione. Successivamente, applichiamo la forza alla corda, dal suo estremo superiore. La sua tensione comincia a manifestarsi dall'alto, e si propaga verso la scatola; poi, divenuta uniforme la tensione in tutta la corda, la scatola assume il suo moto uniformemente accelerato. Se invece lasciamo in quiete tutto il sistema, ma facciamo intervenire il campo gravitazionale, il peso della scatola comincia a tendere la corda dal basso; la tensione si propaga verso l'alto, sino all'equilibrio statico del sistema. Per un osservatore nella scatola, che compie solo una sommaria indagine, i risultati di queste due esperienze possono apparire identici. Ma già il diverso modo di stabilirsi della tensione della corda, può indurci a credere che così non sia. Esaminiamo attentamente i due casi; risultano tra essi le seguenti differenze:

la tensione della corda, uguale in definitiva, è ottenuta, nel tempo, con processi inversi: ciò può corrispondere a differenze, nell'assetto definitivo del sistema, come si vedrà;

rispetto ad un osservatore in riposo con la iniziale posizione della scatola, questa è in moto accelerato nel primo caso, in quiete nel secondo;

nel primo caso, la scatola viene ad acquistare energia cinetica crescente, che dipende, cioè, dal tempo; nel secondo nulla di simile avviene, dappoiché la scatola, in posizione statica, ha una certa energia potenziale, dipendente dalle caratteristiche del campo gravitazionale.

Infine, mentre nel primo caso l'inerzia della scatola, che si oppone alla forza, non ha bisogno, per nostra abitudine, di alcuna teoria esplicativa (oltre la relazione: $f = ma$), nel secondo non sappiamo concepire modello alcuno del fenomeno gravitazionale. Lo stesso Einstein si limita ad ammettere l'esistenza, quale una proprietà della materia, che ne rimane circondata; ma nulla asserisce circa la sua natura. Mostrerò come invece vi sia la possibilità di ammettere l'esistenza di corpuscoli (i gravitoni) che, col loro moto, originano il campo gravitazionale.

Concludendo, i due casi rappresentano complessi fenomenici del tutto diversi. La proporzionalità tra peso ed inerzia (a parte la considerazione del *difetto di massa* che può occasionarne qualche scarto, come altrove ho già fatto vedere) non può autorizzarci ad ammettere la reale equivalenza fra moto accelerato e campo di gravitazione, posta a base della teoria generale della relatività.

Quanto precede ci lascia comprendere, in modo che direi del tutto evidente, come manchi finora una teoria esplicativa della forza di gravitazione. Lo stesso Newton, nello scoprirla, si astenne dal formulare un'ipotesi qualsiasi, sulla sua natura. Ho già discusso tale argomento in una Nota precedente⁽¹⁾, facendo vedere come, volendo interpretare l'origine di tale forza, si arriva necessariamente a stabilirne la natura emissiva, senza possibilità di formulare ipotesi diversa. In conseguenza, sono stato indotto a concretare l'ipotesi cosmogonica, già esposta nella Nota citata.

Secondo tali vedute la materia emetterebbe, in modo uniforme e continuo (cioè una parte aliquota costante di sé stessa, in ogni unità di tempo), una sorta di particelle che chiamo *gravitoni*. Da ciò deriverebbe un lento esaurimento di quella, salvo cause impreviste, che la ricostituiscano. Si può, in conseguenza, considerare la *vita media* della materia, analogamente a quanto si fa in radioattività. Detto M_0 il valore iniziale della sua massa, questo si riduce al tempo t , ad:

$$M_t = M_0 e^{-pt};$$

dopo T , si riduce a metà:

$$M_T = \frac{M_0}{2} = M_0 e^{-pT};$$

dopo un secondo, diviene:

$$M_1 = M_0 e^{-p};$$

la perdita di massa, dopo il primo secondo, è:

$$\Delta M = pM_0,$$

essendo p piccolissimo.

(1) Ved. questi « Rendiconti », vol. XVII, p. 150 (1954).

Il tempo di dimezzamento T , o vita media, potrebbe valutarsi a un miliardo di anni, o molto di più.

A parte che la valutazione di p non è per noi possibile, anche solo in modo approssimato, esaminiamo come l'ipotesi dei gravitoni possa permetterci di interpretare il fenomeno della gravitazione. L'attrazione fra due masse m_1, m_2 , per semplicità supposte sferiche, poste in presenza, alla distanza r fra i loro centri, sarebbe generata dall'arrivo dei gravitoni dell'una, sull'altra. Rendiamoci conto di ciò: si osserva, anzitutto, che i gravitoni emessi debbono possedere qualità materiali, cioè inerti; grazie a tale ammissione, sarà possibile pensare che essi posseggano una certa quantità di moto. Nulla si può dire di una loro qualità pesante, giacché il loro moto è stato immaginato per dare una spiegazione della forza attrattiva newtoniana.

È ora da ammettere che i gravitoni partenti dalla materia, e possedenti la quantità di moto mv , imprimano ciascuno, ad essa, un corrispondente impulso ft , in senso contrario a quello del proprio moto. Se ciascuna delle due masse non fosse soggetta ad azione esterna, si comprende che tali impulsi la lascierebbero, per ragioni di simmetria, in equilibrio. Ma, realmente le due masse, trovandosi in reciproca presenza, lasciano osservare il fenomeno della loro apparente attrazione. Volendo ammettere che ciò avvenga per opera degli ipotetici gravitoni, che da ciascuna delle due masse arrivano sull'altra, è da supporre che in gran parte essi traversino la massa colpita (a tale parte corrisponde la possibilità di provocare apparente attrazione anche su altre masse lontane); ma un certo numero di essi si deve arrestare su di questa. Si verificherebbe così, il fenomeno dell'assorbimento gravitazionale, da me studiato molti anni addietro, per il quale riuscii a stabilire sperimentalmente, in due casi diversi, in 10^{-9} , il coefficiente di assorbimento per unità di materia traversata, di densità unitaria. Inoltre, tale nuova ipotesi va completata col precisare che l'assorbimento di un gravitone, da parte di ciascuna massa colpita, avverrebbe perché esso incontra, e neutralizza nei suoi effetti, un'altro gravitone, partente dalla massa colpita, che si muoverebbe in senso contrario. Tale fatto darebbe luogo a sviluppo di calore, confermandosi un'altra ipotesi, di cui non occorre qui occuparsi. Su ciascuna delle due masse considerate, viene così a mancare una parte degli impulsi predetti: l'equilibrio loro resta, in conseguenza, turbato, ed esse tendono a muoversi l'una verso l'altra; ciò corrisponde all'apparente loro attrazione. È chiaro che un effetto del genere debba essere, per ragioni statistiche, proporzionale alle due masse m_1, m_2 , e perciò al loro prodotto. Da ciò risulta la formazione di due forze esercitanti su ciascuna di esse, uguali e di senso contrario. Tali forze per ragioni di simmetria e geometriche, sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza fra le due masse. Si arriva così alla nota legge di Newton:

$$f = k \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Volendo ora stabilire una relazione tra le due masse, la massa dei gravitoni, e la loro velocità, se liberi, si può così procedere. Indichiamo con M, m ,

le due masse attraenti. Supponiamo, per semplicità, m molto piccola di fronte ad M , e poste alla distanza r . La massa m è soggetta al campo di forza dell'altra, $F = k \frac{M}{r^2}$; per cui essa tende a cadere su M , con il peso risultante. Tale fatto sarebbe dovuto ai gravitoni di M , che vengono in parte assorbiti da m . Supponiamo che la massa elementare di ciascun gravitone sia μ . In complesso, i gravitoni assorbiti avranno, per ogni secondo, una massa totale $\Sigma\mu$. Ad essi ne corrispondono altrettanti, dalla parte di m , opposta ad M , che, avendo velocità v , hanno una quantità di moto $\Sigma\mu v$, in ogni unità di tempo. È questa, come si è detto, che dà origine alla forza di attrazione, la quale realmente consiste in qualcosa che in meccanica si potrebbe chiamare pressione, perché la sommatoria delle quantità di moto μv va considerata per 1 secondo, e per 1 cmq. Ma la superficie trasversa, tagliata dai gravitoni, essendo la stessa per m ed M , non va considerata. Si ha dunque

$$Ft = \sum_{t=1} \mu v.$$

Circa il numero dei gravitoni di massa μ che si staccano in più ogni secondo da m , dal lato opposto ad M , si può ammettere che sia proporzionale alla pressione stessa. Infatti, esso deve variare in modo direttamente proporzionale, sia ad M che ad m ; ed inversamente al quadrato di r , come nella legge di Newton. Sia h un coefficiente di proporzionalità, in tale senso; si avrà,

$$k \frac{Mm}{r^2} = hk \frac{mM}{r^2} v,$$

per cui:

$$1 = hv; \quad \text{dove} \quad v = \frac{1}{h}.$$

La dimensione fisica del coefficiente h , risulta $|h| = L^{-1} T^2$, perché esso, moltiplicato per una forza, deve corrispondere ad una massa.

La precedente relazione ci dice che la velocità dei gravitoni è numericamente rappresentata dall'inverso della costante h . Questa grandezza, che non abbiamo elementi per determinare, rappresenterebbe una costante universale come il fattore k , della legge di Newton, ma con dimensione fisica differente. Essa è indipendente dai valori delle masse e dalla loro distanza. Così, se si ammette che h corrisponda, numericamente, a 10^{-10} , la velocità dei gravitoni sarebbe 10^{10} cm/sec; se $h = 10^{-11}$, la detta velocità sarebbe 10^{11} cm/sec; ecc. Ma, come ho detto, non si può stabilire quale sia il valore di h , e conseguentemente quello della massa dei gravitoni e del numero di essi, che una massa qualsiasi può emettere in un secondo. Un limite superiore della loro massa complessiva, può aversi stabilendo una certa vita media, minima della materia, sicuramente assai lunga. Inoltre, se si volesse ammettere che v sia di un ordine di grandezza molto maggiore di quello della luce, ciò potrebbe essere accettato. Infatti, le ipotesi formulate corrispondono ad ammettere che i gravitoni siano particelle estremamente tenui, tanto da generare nella

materia trasformazioni o riduzioni, apprezzabili soltanto dopo tempi immensamente lunghi. In conseguenza, volendo rispettare la meccanica classica i gravitoni, per possedere, in complesso, la notevole quantità di moto mv , debbono essere dotati di grandissima velocità. Una supposizione del genere non deve apparire inaccettabile, toccando essa le proprietà intime dell'ente materia che, dalla fisica classica, è stata sinora studiata, soltanto in relazione ai tempi da essa presumibili, e che possono dirsi brevissimi, in confronto a quelli a cui ora si accenna.

È del resto da osservare che, mentre la relatività generale nulla spiega circa la natura della forza gravitazionale (anzi essa, nel cercare di farlo, si appoggia ad insostenibili presupposti) gli astronomi tendono, in buon numero, a rifiutarla, ammettendo che la gravitazione possa avere velocità di trasmissione molto superiore a quella della luce.

Con la esposta ipotesi, dell'esistenza di questo nuovo ente (i gravitoni) mai sinora intravisto, che ha forse in comune con l'antico etere cosmico, il carattere della estrema tenuità, e la proprietà di penetrare (in modo, forse, assai più facile) nell'interno della materia; ma che se ne differenzia per le caratteristiche dinamiche, in quanto sarebbe dotato di grande velocità; il quadro della struttura dell'universo viene a chiarirsi, pur divenendo più complesso. Negli spazi liberi, e spogli dell'ipotetico fluido etereo (che non ha resistito ai progressi di questo secolo) non solo viaggiano fotoni o particelle luminose, emesse dalla materia eccitata, insieme ad elettroni, raggi cosmici con mesoni, od anche atomi dispersi di calcio, sodio ecc.; ma ancora i tenuissimi gravitoni che, in modo permanente ed efficiente danno luogo, per la loro alta velocità, alla forza di gravitazione che governa il moto dei sistemi stellari. Quest'ultimo fatto però concerne proprietà più intime della materia, che il fisico deve cercare, poco alla volta, di meglio comprendere.

Può essere compito del matematico, perfezionare la trattazione analitica dell'esposto problema della gravitazione. Ma si comprende quanto ciò debba risultare incerto e difficile, per la mancanza di dati fisici, su cui appoggiare un simile calcolo. Infatti, oltre alla ignoranza nostra sull'evoluzione dei mondi stellari, non possiamo bene comprendere quale sia la loro struttura interna. Le presunzioni che si fanno in tal senso, si basano sulle nostre incomplete conoscenze fisiche attuali; ma precisare quali siano realmente le condizioni interne di un astro (qualità e stato della materia, temperatura, pressione) costituisce un compito ben arduo, che facilmente può dar luogo ad arbitrarie ammissioni. Inoltre, un fattore importante, sulla cui entità nulla possiamo precisare, è la misura dell'assorbimento gravitazionale. Su di esso, infatti, si appoggiano, in sostanza, le formulate ipotesi e le relative deduzioni.

In complesso, è però da dire, che il modello qui presentato fa compiere un ulteriore passo, alla comprensione del fenomeno gravitazionale, che per tre secoli è apparso avvolto nel più profondo mistero.

Cosmogonia. — *Sopra un limite inferiore della densità massima di una massa gassosa ruotante.* Nota (*) del Socio GIUSEPPE ARMELLINI.

1. Consideriamo una massa fluida, costituita, per esempio, da un liquido omogeneo di densità ρ , che ruota con velocità angolare uniforme ω intorno ad un asse fisso z .

Se il liquido è in equilibrio relativo sotto l'azione della forza centrifuga sviluppata dalla rotazione e della mutua attrazione, in ogni punto della superficie esterna la forza risultante dovrà essere normale alla superficie stessa e diretta verso l'interno. Eseguendo allora un integrale di superficie e trasformandolo in integrale di volume, Poincaré ha dimostrato la nota ineguaglianza, spesso usata in cosmogonia:

$$(1) \quad \rho > \frac{\omega^2}{2\pi f}$$

dove f indica il coefficiente attrattivo della legge di Newton.

Come si sa, la (1) vale anche se la massa non è semplicemente connessa (per esempio nel caso di un anello) e vale anche nel caso di liquidi eterogenei o dei gas, purché per ρ si prenda ⁽¹⁾ la densità media.

2. Supponiamo ora che la massa ruotante sia costituita da un gas in *equilibrio politropico*, per cui cioè si abbia

$$(2) \quad p = k\rho^\gamma$$

dove p indica la pressione e γ un numero non inferiore all'unità, che nel caso dell'equilibrio *adiabatico* si riduce al rapporto dei due calori specifici del gas, e nel caso dell'equilibrio isotermico diviene eguale all'unità.

Ciò posto, se la superficie esterna delimitante la massa, e le superfici interne isobariche, sono concentriche e di rivoluzione intorno all'asse z anche non semplicemente connesse (per esempio a forma di anello, ecc.), io mi propongo di dimostrare che nell'interno della massa esiste sempre qualche punto Q per cui si ha

$$(3) \quad \rho(Q) > \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{\omega^2}{2\pi f}$$

dove ovviamente, essendo γ maggiore dell'unità, anche il rapporto $\gamma/(\gamma - 1)$ risulterà maggiore dell'unità ed anzi (se γ è prossima ad 1) notevolmente grande.

(*) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1955.

(1) Ricordiamo in proposito che l'indimenticabile amico prof. U. Crudeli, ha dimostrato che, nel caso particolare in cui la superficie esterna sia *sempre convessa* (con che si esclude il caso dell'anello), il limite di Poincaré può essere sostituito dall'altro più elevato $\rho > \omega^2/\pi f$. Cfr. U. CRUDELI, *Nuovo limite superiore, ecc.*, in « Rend. Lincei », 1910, 1° sem.

Poiché non mi risulta che la (3) sia stata trovata da altri ricercatori e poiché la sua dimostrazione è abbastanza semplice, mi pregio di comunicarla all'Accademia in questa breve Nota.

3. A tale scopo, ricordiamo anzi tutto che, secondo un teorema dovuto al Lichtenstein ⁽²⁾, una massa fluida ruotante, in equilibrio relativo per la mutua attrazione delle particelle che la compongono, presenta necessariamente un piano equatoriale di simmetria normale all'asse di rotazione.

Scegliendo allora l'asse di rotazione come asse delle z ed il piano equatoriale come piano xy , ed indicando con V il potenziale newtoniano e con W quello geodetico, avremo immediatamente

$$(4) \quad W = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

mentre, secondo la meccanica, le equazioni di equilibrio relativo della massa gassosa, tenendo presente la (2), saranno:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = k\gamma\rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = k\gamma\rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = k\gamma\rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \end{array} \right.$$

da cui integrando, abbiamo subito

$$(6) \quad W = C + \frac{k\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1}$$

dove C indica una costante arbitraria.

Ciò posto, se ricordiamo che V soddisfa all'equazione di Poisson

$$(7) \quad \Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi f\rho$$

avremo immediatamente, tenendo presenti la (4) e la (6):

$$(8) \quad \Delta^2 W = \frac{k\gamma}{\gamma-1} \Delta^2 (\rho^{\gamma-1}) = 2\omega^2 - 4\pi f\rho$$

donde, ponendo per brevità,

$$(9) \quad \rho^{\gamma-1} = \lambda$$

ricaviamo

$$(10) \quad \Delta^2 \lambda + \frac{4\pi f(\gamma-1)}{k\gamma} \lambda^{1/(\gamma-1)} - \frac{2(\gamma-1)\omega^2}{k\gamma} = 0.$$

Ora, secondo l'ipotesi di partenza, le superficie isobariche (e quindi per la (2) anche le superficie di eguale densità e per la (6) anche le superficie equipotenziali) sono superficie di rotazione intorno all'asse z . Ponendo quindi

$$(11) \quad r^2 = x^2 + y^2$$

(2) Cfr. «Mathematische Zeitschrift», Band, XXVIII, Heft 4 (1928).

avremo

$$(12) \quad \lambda = \lambda(r, z)$$

donde si ricava subito derivando

$$(13) \quad \Delta^2 \lambda = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}$$

e quindi la (10) diviene

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{4\pi f(\gamma-1)}{k\gamma} \lambda^{1/(\gamma-1)} - \frac{2(\gamma-1)\omega^2}{k\gamma} = 0$$

equazione alle derivate parziali del secondo ordine che, integrata, ci darebbe le superficie di eguale densità nell'interno della massa gassosa; e quindi anche la sua superficie esterna, che corrisponde ovviamente al valore $p = \rho = \lambda = 0$.

4. Osserviamo di passaggio che, se l'astro non ruotasse e cioè se si avesse $\omega = 0$, le superficie equipotenziali ed isobariche, secondo il teorema di Lichtstein, sarebbero necessariamente sferiche; onde λ diverrebbe funzione di $r^2 + z^2$. Ponendo allora $r^2 + z^2 = u^2$, si avrebbe subito

$$(15) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{1}{u} \frac{d\lambda}{du}$$

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} = \frac{r^2}{u^2} \frac{d^2 \lambda}{du^2} + \left(\frac{1}{u} - \frac{r^2}{u^3} \right) \frac{d\lambda}{du}$$

$$(17) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} = \frac{z^2}{u^2} \frac{d^2 \lambda}{du^2} + \left(\frac{1}{u} - \frac{z^2}{u^3} \right) \frac{d\lambda}{du}$$

onde la (14) diverrebbe

$$(18) \quad \frac{d^2 \lambda}{du^2} + \frac{2}{u} \frac{d\lambda}{du} + \frac{4\pi f(\gamma-1)}{k\gamma} \lambda^{1/(\gamma-1)} = 0$$

che è la nota *equazione di Emden* sopra l'equilibrio stellare, la quale risulta un caso particolare della (14). Chiameremo quindi la (14) col nome di *equazione generale di Emden*.

5. La (14) non è generalmente integrabile; ma, ciò non ostante, possiamo dedurre da essa alcune importanti conseguenze.

A tale scopo, notiamo che il piano $z = 0$, e cioè il piano equatoriale, secondo il teorema di Lichtstein, è un piano di simmetria ed anzi un piano di massimo potenziale; nel senso che, se ci muoviamo nell'interno della massa fluida lungo una retta m parallela all'asse z , il potenziale W (e quindi anche λ) diviene massimo nel punto in cui questa retta m taglia il piano equatoriale. Avremo dunque

$$(19) \quad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{z=0} = 0$$

$$(20) \quad \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} \right)_{z=0} < 0.$$

In conseguenza, per tutti i punti del piano equatoriale interni alla massa gassosa ruotante, la (14) ci darà l'ineguaglianza

$$(21) \quad \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} \right)_{z=0} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right)_{z=0} + \frac{4 \pi f (\gamma - 1)}{k \gamma} \lambda_{z=0}^{\gamma/(\gamma-1)} - \frac{2 (\gamma - 1) \omega^2}{k \gamma} > 0.$$

Ora consideriamo sopra la superficie esterna un punto qualsiasi P posto sull'equatore della massa gassosa ruotante e precisamente, se la massa ha una configurazione anulare, prendiamo P sopra l'equatore esterno; è evidente che nel punto P sarà $\lambda = 0$.

Ciò posto, muoviamoci radialmente da P verso l'origine degli assi sempre nel piano equatoriale. Allora:

a) Se la massa gassosa ha una forma anulare, la densità e quindi λ diverranno dapprima positive, per poi annullarsi nuovamente quando avremo raggiunto il bordo equatoriale interno della massa nel punto S. In conseguenza, per un teorema ben noto, muovendoci da P verso S dovremo certamente incontrare un punto Q in cui la derivata $(\partial \lambda / \partial r)_{z=0}$ sarà eguale a zero. Se indichiamo con L ed l i valori di r corrispondenti ai punti P e Q (essendo ovviamente $L > l$) è evidente che in tutto l'intervallo $L > r > l$, escluso l'estremo inferiore, la derivata $(\partial \lambda / \partial r)_{z=0}$ si manterrà sempre *negativa*, poiché λ diminuisce sempre dal valore positivo $\lambda(Q)$ che assume in Q al valore zero che assume in P.

b) Se la massa gassosa ha forma globulare in modo che l'origine O delle coordinate (e cioè il punto in cui l'asse di rotazione taglia il piano equatoriale) appartenga alla massa stessa, la derivata $(\partial \lambda / \partial r)_{z=0}$ si annulla certamente in O per ragioni di simmetria e come del resto risulta dalla stessa equazione (14). In tal caso l risulta eguale a zero.

Essendo $(\partial \lambda / \partial r)_{z=0}$ negativa nell'intervallo $L > r > l$, la (21) ci darà a maggior ragione nell'intervallo stesso:

$$(22) \quad \Phi(r) = \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} \right)_{z=0} + \frac{4 \pi f (\gamma - 1)}{k \gamma} \lambda_{z=0}^{\gamma/(\gamma-1)} - \frac{2 (\gamma - 1) \omega^2}{k \gamma} > 0.$$

Avremo quindi, moltiplicando per $(\partial \lambda / \partial r)_{z=0}$ ed integrando tra l ed L:

$$(24) \quad J = \int_l^L \Phi(r) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \right)_{z=0} dr < 0.$$

Infatti $\Phi(r)$ si mantiene sempre positiva nell'intervallo d'integrazione, mentre $(\partial \lambda / \partial r)_{z=0}$ è sempre negativa ed r cresce da l ad L; l'integrale sarà quindi certamente negativo.

Eseguito l'integrazione e ricordando che λ si annulla nell'estremo superiore P e la derivata $(\partial \lambda / \partial r)_{z=0}$ nell'estremo inferiore Q, abbiamo:

$$(25) \quad J = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \right)_{r=L}^2 - \left[\frac{4 \pi f (\gamma - 1)^2}{k \gamma^2} \lambda_{(Q)}^{\gamma/(\gamma-1)} - \frac{2 (\gamma - 1) \omega^2}{k \gamma} \lambda(Q) \right] < 0.$$

La quantità tra parentesi quadre sarà dunque certamente *positiva*; onde, essendo per la (9) la densità ρ eguale a $\lambda^{1/(\gamma-1)}$, avremo immediatamente

$$(26) \quad \frac{2(\gamma-1)}{k\gamma} \lambda(Q) \left[\frac{2\pi f(\gamma-1)}{\gamma} \rho(Q) - \omega^2 \right] > 0$$

donde, poiché γ è maggiore dell'unità e la costante politropica k è certamente positiva, ricaviamo

$$(27) \quad \frac{2\pi f(\gamma-1)}{\gamma} \rho(Q) > \omega^2$$

da cui segue subito la (3).

6. Osserviamo - come emerge chiaramente dalla dimostrazione - che la (3) si estende anche al caso di un sistema di *più masse gassose*, composto per esempio di una massa centrale e di uno o più anelli circolari, concentrici, aventi lo stesso piano equatoriale della massa centrale e tutti ruotanti intorno all'asse z con la medesima velocità angolare ω ; in modo cioè che le superfici equipotenziali $W = \text{cost.}$, risultino sempre *superfici di rivoluzione* intorno all'asse z . Ovviamente, la (3) si applica allora *tanto alla massa centrale, quanto a ciascuno degli anelli che eventualmente possono contornarla*.

Notiamo ancora che la (3) si estende anche al caso in cui la massa gassosa, pur non avendo forma di rivoluzione intorno all'asse di rotazione z , possiede però nel piano equatoriale una retta a passante per l'origine, luogo di punti di massimo potenziale o massima densità; come spesso avviene per masse allungate con forma simile a quella dell'ellissoide di Jacobi. Infatti, scegliendo sempre il piano equatoriale come piano xy e la retta a come asse x , l'equazione (10) diviene

$$(28) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} + \frac{4\pi f(\gamma-1)}{k\gamma} \lambda^{1/(\gamma-1)} - \frac{2(\gamma-1)\omega^2}{k\gamma} = 0$$

mentre, essendo l'asse x retta di massima densità, si ha

$$(29) \quad \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \right)_{y=0} < 0; \quad (30) \quad \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} \right)_{z=0} < 0$$

onde la (28) dà luogo all'ineguaglianza

$$(30) \quad F(x) = \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \right)_{x=0} + \frac{4\pi f(\gamma-1)}{k\gamma} \lambda_{x=0}^{1/(\gamma-1)} - \frac{2(\gamma-1)\omega^2}{k\gamma} > 0$$

donde, ragionando come abbiamo fatto per la (22), si ricava la (3).

7. Osserviamo pure che la (14) è un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, di *tipo ellittico*. In generale quindi, come insegna l'analisi, se conosciamo i valori che λ assume sopra una superficie chiusa, λ risulterà determinata anche nell'interno. Ma sopra la superficie esterna della massa centrale (o degli anelli) si ha sempre $\lambda = 0$; dunque la costituzione interna della massa gassosa considerata (sia semplicemente connessa, sia anulare)

risulterà pienamente determinata quando è data la sua superficie esterna; ovviamente, conoscendo ω e le due costanti politropiche γ e k .

Per esempio, se si tratta di un gas monoatomico per cui si ha $\gamma = 5/3$ e se la rotazione è nulla ($\omega = 0$), la massa assumerà forma sferica. Allora, se k è nota, basterà conoscere il raggio R della sfera affinché la densità resti determinata in ogni punto interno. Se invece k è ignota (come generalmente avviene nell'astronomia siderale), occorre avere qualche altro dato; per esempio supporre che l'energia generata sia data da una funzione conosciuta della pressione e della temperatura ed eguagli l'energia irradiata; oppure, più semplicemente, conoscere per esempio la massa M dell'astro. Ed infatti è ben noto, dalla teoria di Emden e di Eddington sopra l'equilibrio stellare, che la costituzione interna di una sfera gassosa, in equilibrio politropico, risulta determinata conoscendo il suo raggio R e la sua massa M .

Osserviamo infine che, nel caso di un liquido omogeneo, essendo, come è ben noto, $\gamma = \infty$, si ha $\gamma/(\gamma - 1) = 1$ e quindi la (3) si riduce alla (1) del Poincaré. Così pure, se si pone $\gamma = 1$ (trasformazione isoterma), la (3) dà $\rho(Q) = \infty$; ciò che è in accordo col fatto ben noto che una massa gassosa, a temperatura uniforme, non può essere in equilibrio.

8. Per terminare con un esempio numerico, ricordiamo che la densità media della materia contenuta nell'Universo (e quindi anche la densità del gas primitivo, dalla cui condensazione si formarono le galassie e le stelle) è dell'ordine di 10^{-30} grammi/cm³; od al più dell'ordine di 10^{-28} .

Supponiamo ora che in questo gas si sia formata una qualsiasi condensazione isolata, di forma sferoidica, oppure di anello, con densità *massima* dell'ordine di 10^{-26} ; e cioè per esempio cento volte maggiore di quella del gas primitivo, che supponiamo monoatomico come generalmente sono i gas interstellari.

Ricordando allora che nel sistema C.G.S. si ha $f = 6,66 \cdot 10^{-8}$ e che per i gas monoatomici in equilibrio adiabatico γ risulta eguale a $5/3$, avremo immediatamente dalla (3):

$$(31) \quad \omega < \sqrt{\frac{4\pi f}{5} \cdot 10^{-26}} = \sqrt{\frac{4\pi}{5} \cdot 6,66 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-26}} = 4,09 \cdot 10^{-17}$$

e cioè, per l'equilibrio adiabatico, la velocità angolare di rotazione ω dovrà essere minore di $4,09 \cdot 10^{-17}$ radianti al minuto secondo. In altre parole, affinché la condensazione possa mantenersi, il suo periodo di rivoluzione $T = 2\pi/\omega$, dovrà essere maggiore di $1,54 \cdot 10^{17}$ minuti secondi e cioè dell'ordine di circa cinque miliardi di anni!

Tenendo presente che i gas primitivi erano certamente soggetti a movimenti *turbolenti*, si vede subito che le condensazioni si sono potute formare soltanto in condizioni assolutamente *eccezionali*. E forse questo fatto potrebbe spiegare perché le stelle siano relativamente *tanto distanti* tra loro, ed anzi si siano formate preferibilmente in particolari regioni (ammassi) delle galassie.

Antropologia. — *I caratteri della mandibola neandertaliana Circeo II.* Nota (*) del Socio SERGIO SERGI.

La mandibola Circeo II fu rinvenuta sul suolo della grotta nella quale fu trovato il cranio neandertaliano Circeo I e fu consegnata dal Guattari, proprietario della grotta, tre giorni dopo la scoperta del cranio. Le notizie sulle sue condizioni nel momento del ricupero furono da me pubblicate nel 1939 nei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » e nella « Rivista di Antropologia », insieme con i risultati delle mie prime osservazioni sul cranio Circeo I. La mandibola, quale ora viene descritta, è stata liberata dalle incrostazioni che allora la ricoprivano quasi interamente. Circeo I e Circeo II sono stati attribuiti da A. C. Blanc allo epiwürm II e da S. Sergi ad *Homo neandertalensis*. (Ved. *Catalogue des hommes fossiles édité au nom de la Commission pour l'Homme fossile*, Alger 1952. *Italie* par A. C. Blanc et S. Sergi). La mandibola fu anche indicata con la lettera A a segnalare che essa è la prima mandibola paleantropica rinvenuta al Monte Circeo (1).

DOCUMENTAZIONE. — Nel testo sono riportate le figure delle sezioni sagittali e frontali del corpo della mandibola. Nella tavola: figg. 1 e 2, foto della mandibola nella norma laterale, destra e sinistra; fig. 3, schiagramma nella posizione postero-anteriore. Per la comparazione analitica e la bibliografia, si veda S. SERGI, *La mandibola neandertaliana Circeo II*, « Riv. di Antropologia », vol. XLI.

STATO DI CONSERVAZIONE. — La mandibola è incompleta. In migliori condizioni è il lato destro, dove, insieme con il corpo, si conserva una porzione del ramo corrispondente. Nel lato sinistro residua soltanto il corpo alquanto mutilato. Esso si presenta profondamente scavato, con perdita di tutta la parte spugnosa interna, ridotto alle sole pareti costituite dalla compatta e con distruzione di tutta la regione alveolare che segue dietro l'alveolo di Pr_1 . A destra è presente M_3 , molto usurato, unico dente conservato. Nello stesso lato l'alveolo di M_1 , scomparso, è del tutto ossificato per la perdita del dente che deve essere avvenuta in vita, molto prima della morte. Il restante della regione alveolare, notevolmente danneggiato, conserva a suffi-

(*) Presentata nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) Un'altra mandibola di paleantropo (Circeo III, mandibola B) fu trovata nell'agosto 1950 da Ascenzi e Lacchei al Monte Circeo nella breccia ossifera, subito all'esterno della grotta Guattari, nell'interno della quale, nel 1939, furono rinvenuti i resti dei due neandertaliani, Circeo I e Circeo II (ved. S. SERGI, *Il rinvenimento della mandibola di un terzo paleantropo al Monte Circeo*, « Riv. di Antropologia », vol. XXXVIII, 1950). Lo studio è in corso di preparazione in collaborazione con il prof. A. Ascenzi.

Recentemente (1953-1954), A. C. Blanc ha rinvenuto nel giacimento della grotta del Fossellone al Monte Circeo un frammento di mandibola (Circeo IV) e tre denti di un bambino neandertaliano (ved. A. C. BLANC, *Reperti fossili neandertaliani nella Grotta del Fossellone al Monte Circeo*, « Quaternaria I », Roma 1954).



fig. 1.



fig. 2.

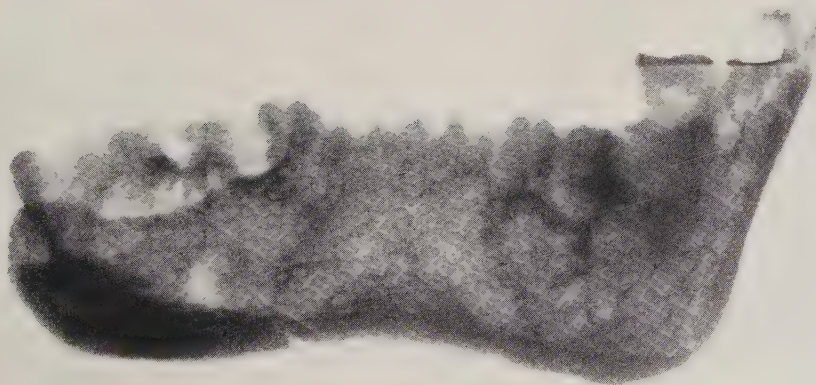


fig. 3.

cienza le pareti degli alveoli per poter rilevare che tutti gli altri denti furono presenti per tutta la durata della vita. Dal complesso si può presumere che la mandibola sia appartenuta ad un individuo adulto di circa 30 anni.

Fra le mutilazioni antiche messe allo scoperto dopo la rimozione delle incrostazioni, sono da rilevare: a sinistra, presso la estremità posteriore del corpo, quelle costituite da due estese intaccature, una più larga e più profonda indietro ed una più superficiale in avanti. Altri intacchi, dello stesso tipo, che sembrano dovuti allo stesso agente meccanico, si rilevano nell'estremità del processo coronoide a destra. Le suddette mutilazioni sembrano determinate dal morso di un carnivoro e, più particolarmente, dai canini, forse di jena, di cui molti resti scheletrici sono stati rinvenuti nella grotta dove fu trovata la mandibola. I morsi del carnivoro avrebbero agito in particolare sulle branche della mandibola, spezzandole e staccandole dal cranio. Essa è un residuo di pasto della belva, così come credo sia anche la mandibola Circeo III, rinvenuta nel 1950 fuori della grotta da Ascenzi e Lacchei. Presso la branca di quest'ultima, quasi a contatto, rinvenni un coprolite di jena incluso nella roccia aderente all'osso.

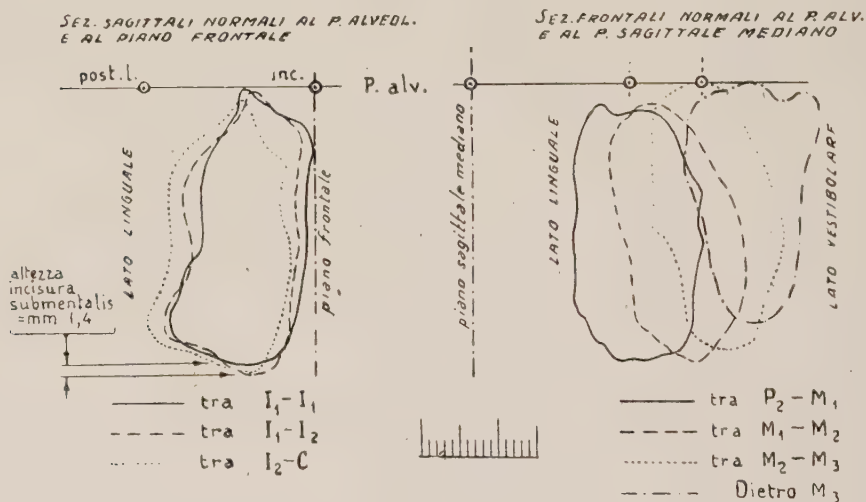
CARATTERI DELLE PARTI LATERALI. — La descrizione si riporta in generale alle condizioni del lato destro che è più completo, se occorre riferirsi a particolari del lato sinistro, le differenze sono espressamente indicate. Le caratteristiche delle superfici esterna ed interna delle parti laterali del corpo non sono di regola molto dissimili da quelle degli uomini attuali.

Nella faccia esterna laterale sono da rilevare: la *prominentia lateralis* di Rasche molto pronunziata, il *sulcus extramolaris* (Keith) profondo e largo, il *torus lateralis superior*, largo, che si può seguire fino a livello dell'alveolo del Pr₂, il sottostante *sulcus intertoralis* che lo separa dal *torus marginalis* più spiccato a sinistra e che va dal *tuberculum marginale posterius* al *tuberculum marginale anterius*, bene individuabile e distinto dal *tuberculum laterale* del *trigonum mentale*. A destra, si vedono due forami mentali a livello del primo molare: il superiore dista dal margine alveolare 16 mm. e dall'inferiore, che si trova poco più indietro, 5 mm. A sinistra, si ripete la disposizione del lato destro per una coppia di forami mentali, ma si aggiunge un terzo forame, contiguo all'inferiore, separato da uno stretto ponticello superficiale, così come rilevò Boule per altri neandertaliani.

Nella faccia interna, l'arco alveolare posteriormente più stretto di quello basale, si proietta su questo come *prominentia alveolaris* (Weidenreich) con la sua massima proiezione mediale dietro il terzo molare. La *linea mylojoidea* costituisce una cresta che raggiunge il suo massimo rilievo tra il secondo e il terzo molare (v. fig.) a questo livello si accentua la *fossa submaxillaris* detta *fossa subalveolaris posterior* da Weidenreich. Dietro il terzo molare la *linea mylojoidea* si continua con la cresta che va al *processus coronoideus* del *ramus* indicato come *torus triangularis* da Weidenreich e già nominato *torus mandibularis* da Lenhossek.

CARATTERI DELLA PARTE FRONTALE. — Nella faccia labiale si possono rilevare tutti gli elementi del *trigonum mentale* in una fase iniziale, il *tuber symphyseos* (Weidenreich), i *tubercula lateralia* e la *incurvatio anterior* (H. Virchow), già sotto forma di *impressiones incisivae*. L'*incurvatio* si può seguire nelle tre sezioni sagittali, la mediale e le laterali (v. fig.), tra gli incisivi e tra incisivi e canino. Dall'esame di queste sezioni si rileva che la *incurvatio* appare più accentuata nella sezione più laterale (I_2-C). Osservando di fronte la superficie labiale, si chiarisce la differenza rilevata nelle tre sezioni. Al di sotto degli alveoli degli incisivi mediali, la faccia labiale appare lievemente inflessa, al disotto degli alveoli degli incisivi laterali, l'inflessione è molto accentuata in ciascun lato per la presenza di una larga

CIRCEO II - Mandibola lato destro



fossetta, a contorno ellittico, delimitata medialmente dal protendere della parte intermedia mediana. La fossetta di destra si estende un poco più in basso di quella sinistra. Le due fossette sono vere *impressiones incisivae*, usando il termine appropriato di Klaatsch, mentre la inflessione mediale è una *incurvatio medialis* distinta da quelle. È chiaro che, insieme considerate, la *incurvatio medialis* e le *impressiones* costituiscono gli elementi dell'*incurvatio anterior* della mandibola. Le fossette sono delimitate da un margine rilevato, più accentuato dal lato mediale e da quello inferiore. Al disotto di ogni rilievo del margine, e medialmente per ogni lato, affiora una fossetta più superficiale delle precedenti. Queste fossette sembra che si possano considerare come un primo accenno delle *fossae mentales*. Un'area triangolare mediana, lievemente rilevata, si interpone tra loro e le separa. Questo rilievo triangolare che ha il vertice in alto in corrispondenza del piano mediano sagittale, al di sotto della *incurvatio*, si porta gradatamente con i suoi lati sempre più lateralmente in basso fino a raggiungere la base ad un livello

che corrisponde alla verticale delle estremità delle radici dei due rispettivi canini. L'area triangolare suddetta, così rilevata, è l'abbozzo del *trigonum mentale*, gli angoli laterali inferiori corrispondono ai *tubercula lateralia*, il vertice superiore corrisponde al *tuber symphyseos*. Le fossette sotto le *impressions incisivae* e lateralmente al *tuber*, sono le *fossae mentales*. L'*incisura submentalis* si delinea nel profilo mentale con un arco molto appiattito che, sul piano di appoggio, si innalza di mm. 1,4. Per la sua forma si avvicina a quella del sinantropo e dei neandertaliani conosciuti, cioè, la curva basale lateralmente si volge in basso e non verso l'alto.

Nella faccia linguale, immediatamente sotto il margine alveolare, il *planum alveolare* per tutta la sua larghezza corrispondente alla zona dei quattro incisivi, e cioè fino a livello dei canini, si proietta obliquamente indietro, dall'alto in basso, presentando nel primo tratto la sua superficie incavata (*fossa subincisiva interna*) e, successivamente, rilevata così da costituire un forte rilievo trasversale (*torus transversus superior*). La fossa subincisiva è divisa, a sua volta, da una cresta mediana (*crista interincisiva interna*) in due fossette laterali. Al *torus transversus* segue una larga fossa (*fossa genioglossi*) che è delimitata, in basso, dall'orlo posteriore del piano basale. Nel fondo della fossa si apre un ampio *foramen supraspinosum* e, al di sotto di questo, sulla parete inferiore della fossa, si incontra la *spina genioglossi* sotto forma di due tubercoli irregolarmente appiattiti ed a contatto tra loro; al disotto poi seguono, in corrispondenza dell'orlo basale, due rilievi longitudinali tra loro distanziati (inserzione dei muscoli genioioidei).

FACCIA INFERIORE DEL CORPO: FOSSE DIGASTRICHE. — Osservata dalla norma inferiore e dall'indietro all'innanzi, la parte basale comincia lateralmente assai assottigliata in corrispondenza del *ramus* (ved. angolo della mandibola conservato a destra) e raggiunge il massimo spessore a livello del setto alveolare, tra il primo molare e il secondo premolare, cioè a quel livello al quale corrisponde l'estremità più laterale delle fosse digastriche. Da qui in avanti si svolge tutta la parte anteriore basale dell'arco (arco delle fosse digastriche) che appare come una larga superficie che si svolge alquanto obliqua da l'innanzi all'indietro, dal basso in alto, con forte spessore, che supera quello laterale del corpo. Le due fosse digastriche, che occupano la regione con tutto il loro contorno ellittico (diametri mm. 15 × 10), si incontrano in una cresta interdigastrica molto pronunciata che indietro termina in una *spina interdigastrica* (Klaatsch). In avanti le due fosse delimitano uno spazio triangolare, *trigonum basale* di Toldt, limitato più innanzi dal *trigonum mentale*.

RILIEVI MORFOMETRICI. — L'angolo di inclinazione sagittale della linea *incision-gnation* sulla linea alveolare, che per Weidenreich misura il *real chin angle*, nel Circeo II misura 73° quanto in La Chapelle (secondo una mia determinazione), 77° in Spy I. L'angolo è sempre più acuto nelle scimmie che in qualsiasi ominide estinto o vivente. Nelle serie

umane i valori più bassi si trovano nei protoantropi, i più alti in alcuni gruppi di fanerantropi. I paleantropi si interpongono tra gli uni e gli altri con estremi minimi, (Krapina), che rasentano quelli dei protoantropi, e massimi, che sono già compresi nei minimi fanerantropici. Così è il caso del Circeo II (Circeo 73°, Cinese 73°, Australiano 74°,5 - valori di Weidenreich). L'angolo in questione è preferibile di denominarlo angolo di inclinazione della parte frontale, anzichè angolo del mento (Weidenreich) perché esso interessa tutta la parte frontale della sinfisi, sia nella porzione alveolare, sia in quella basale nella quale si trova il mento. A parità di posizione dello *gnation*, se vi ha prognatismo alveolare, per la corrispondente proiezione dell'*incision*, l'angolo *gnation-incision* sul p. alveolare è più acuto di quando vi è un arretramento dell'*incision* con relativo ortognatismo alveolare. Uno stesso valore angolare si può avere, sia nel caso di un forte prognatismo alveolare con forte sviluppo del mento, sia nel caso di ortognatismo alveolare con forte riduzione del mento. Ciò spiega come l'angolo non ponga nel giusto rilievo il mento e tanto meno lo misura. Una osservazione analoga si può fare per l'angolo sinfisiano già adottato da Topinard e riportato da Boule con riserva, perché la inclinazione della linea *incision pogonion* sul piano di appoggio della base è influenzata dal grado di posizione dell'*incision* e dalla variabilità del piano di appoggio. In Circeo II, l'angolo ha un valore di 100° con il quale viene ad essere compreso nel blocco dei paleantropi, ma entro questi la variabilità è molto estesa. Una misura che volesse fare astrazione dalle variazioni di proiezione dell'*incision*, dovrebbe avere il suo riferimento al punto sottoincisivo, là dove si ha la massima inflessione dell'*incurvatio*. A questo punto si è riportato Frizzi nella sua verticale dal piano alveolare per individuare la proiezione del mento. Dallo stesso punto si potrebbero far partire le rette allo *gnation* e al *pogonion*, che dovrebbero sostituire le precedenti che partono dall'*incision*. L'indice di posizione del *foramen supraspinosum*, con il quale si determina quello relativo dell'altezza della parte basale nei confronti dell'altezza della parte alveolare, ha un valore in Circeo II (32,8) che rientra molto bene tra quelli del gruppo dei paleantropi, come si rileva da una seriazione dei valori dell'indice, nella quale questi si dispongono secondo una scala risalente dai minimi degli antropomorfi ai maggiori dei fanerantropi, tra cui bene si interpongono i protoantropi ed i paleantropi. La porzione alveolare anteriore ancora in Circeo ha un notevole sviluppo per le dimensioni delle radici dei denti. Dall'indice si dimostra che la progressione dalle forme più antiche alle attuali si manifesta con il graduale relativo aumento dell'altezza della base e riduzione dell'altezza alveolare correlativa della diminuzione del volume dei denti.

L'indice di robustezza, calcolato con il rapporto tra spessore ed altezza mandibolare, nella mandibola Circeo II (d. 45,7; s. 47,2) è molto vicino a quello di La Quina H 5 (46,5) e di La Ferrassie (45,4), paleantropi maschili di Europa, e differisce dai femminili di Malarnaud (60,3) e di La Naulette (57,7). Secondo Weidenreich la differenza dell'indice tra i neandertaliani è

in relazione con la differenza sessuale dell'altezza mandibolare, che nei maschi è maggiore, nelle femmine è minore, da cui risulta un indice di robustezza minore nei primi e maggiore nelle seconde. La serie del gruppo neandertaliano con indice di robustezza minore ed un'altezza mandibolare maggiore è maschile ed a questa serie appartiene la mandibola del Circeo. Weidenreich attribuisce anche a differenza sessuale le differenze trovate tra le tre mandibole del sinantropo. La stessa differenza sessuale si trova anche nell'uomo attuale. Nell'insieme la media dei valori dell'indice è più alta nei proto e paleantropi e minore nei fanerantropi, ma fra i primi si intercalano gli antropomorfi con valori più bassi dei protoantropi: l'indice in tal caso non è discriminante. Ma se ci serviamo del prodotto delle stesse due misure di altezza e di spessore che hanno servito a determinare l'indice di robustezza, si ottengono risultati che possono meglio orientarci sulla grandezza della mandibola. Con questo procedimento sono in prima linea gli antropomorfi con i valori massimi che li separano nettamente dagli ominidi. Nella serie dei protoantropi, l'eurantropo si distingue per il suo più alto valore dai sinantropi e così, nella serie dei paleantropi, Circeo II si distingue dagli altri neandertaliani. Eurantropo (612) e paleantropo del Circeo (d. 560, s. 612, media 586) per questa condizione sono avvicinati. Protoantropi e paleantropi formano un blocco nel quale si aggruppano insieme avvicinate le femmine protoantropiche e paleantropiche con i valori più bassi (sinantropi femminili A II 389, H I 400; paleantropi femminili Malarnaud 348; La Nauvette 390; Krapina D 351) e così i maschi con i valori più alti (sinantropo G I 557; eurantropo 612 e i paleantropi maschili da un minimo di 450 = Krapina G ai massimi di 525 = Krapina H e massimo 612 s. = Circeo). Si può confermare che la mandibola del Circeo è maschile anche per questo carattere.

ARCHI MANDIBOLARI. — Dalle misure dei diametri di lunghezza e di larghezza dell'arco alveolare totale e di quello anteriore e dei rapporti relativi tra queste dimensioni, risulta che in Circeo II la lunghezza anteriore dell'arco alveolare, relativamente alla lunghezza alveolare totale (35,1), eguaglia quella di Spy I (35,6) e di Skhul V (35,7); che la lunghezza totale dell'arco alveolare relativa alla sua larghezza massima in Circeo II (69,2) quasi uguaglia quella di Spy I (68,8) ed è molto vicina a quella di Skhul V (70); che la larghezza anteriore dell'arco relativa alla massima posteriore in Circeo (69,2) è la più vicina a Skhul V (70) ed a Spy I (71,4). Nel complesso dal comportamento tra le dimensioni suddette si è potuto rilevare che nei paleantropi, in confronto con i sinantropi, appare una riduzione della lunghezza anteriore dell'arco alveolare relativamente alla lunghezza totale dell'arco, cioè un accorciamento anteriore dell'arco relativo alla lunghezza totale; una riduzione della lunghezza totale dell'arco relativamente alla larghezza massima del medesimo e cioè un accorciamento relativo alla larghezza; una riduzione della larghezza anteriore relativamente alla massima posteriore, cioè riduzione relativa della larghezza dell'arco anteriore.

L'arcata mandibolare si restringe al massimo alla stessa altezza del *torus transversus anterior* a costituire l'arco intermedio di Virchow o interno di Weidenreich. A livello di questo arco si incontra la massima robustezza interna della porzione alveolare. La massima espansione esterna dell'arcata mandibolare, arco massimo esterno orizzontale del corpo, coincide con il livello del massimo ripiegamento interno della sinfisi (o *incurvatio lingualis* della sinfisi). Quest'arco massimo segna il piano limite tra la parte basale e la parte alveolare della mandibola e si trova, sia all'altezza del *foramen supraspinosum*, sia all'altezza del *foramen mentale superior*.

L'arco basale della mandibola misurato con i criteri di Weidenreich (1937) nella proiezione con orientamento sul piano alveolare è lungo mm. 49, largo mm. 75, con indice di 66,2. Gli indici più prossimi della serie data da W. sono quelli di Ehringsdorf (66,6) e del sinantropo G 1 (68,2). Ma il metodo adottato non dà risultati discriminanti con i tipi umani i più distanti. Con il confronto per sovrapposizione delle curve si rileva che le curve di Ehringsdorf e di Spy si approssimano a quelle del Circeo per il valore degli angoli, ma differiscono per la forma che è ad arco più acuto nel Circeo. Nel sinantropo l'arco è ancora più acuto mentre che nell'eurantropo è assai più rotondeggiante.

DENTIZIONE. - L'unico dente conservato è M_3 . Le sue dimensioni sono grandi, alquanto superiori a quelle medie degli uomini attuali. Esso presenta una usura della corona tra i gradi 3 e 4 di Weidenreich. Per le condizioni determinate dalla usura non si può precisare la sua morfologia. Sembra più probabile la presenza di cinque cuspidi. Il protoconide che è il meno usurato, è più alto, l'entoconide, il più usurato, è più basso. Nell'insieme appare più usurato il talonide che il trigonide. Nel complesso la faccia occlusale è incavata a formare una larga doccia a superficie elicoidale che è da interpretare come espressione del movimento di circumduzione a cui soggiaceva la mandibola durante la masticazione. Il radiogramma presenta una cavità moderata della polpa: non vi è taurodentismo.

SCHIAGRAMMI. - Dalle radiografie eseguite in differenti posizioni si rileva quanto segue. Il *trajectorium praeceps* è bene individuato per la parte che costeggia il margine coronoideo e così il *trajectorium marginale* nella sua parte anteriore e le trabecole circumalveolari dell'alveolo del M_2 . Il tessuto spugnoso ha sostituito completamente l'alveolo del M_1 perduto in vita. Nella parte anteriore del corpo mandibolare, la spongiosa basale è costituita da un forte addensamento trabecolare che occupa una zona triangolare la quale si estende con la sua base per tutto il tratto del margine inferiore della mandibola compreso tra i tubercoli laterali e con il vertice giunge nel piano mediano al disotto del foro sopraspinoso. Questo addensamento della spongiosa corrisponde alla regione del *trigonum mentale*. Tale sistema basale dei fasci trabecolari non si trova nelle scimmie, nelle quali il mento manca. Esso è stato rilevato da vari autori (Walkoff, Monheimer) in modo più o

meno definito nei radiogrammi di mandibole neandertaliane, La Naulette, Spy, Krapina e si incontra poi normalmente nei fanerantropi con modalità diverse di forma. Un altro sistema di trabecole, fortemente addensate e ben definite, si svolge simmetrico a costituire per ciascun lato un fascio che, partendo dalla regione alveolare del rispettivo canino, si dirige obliquamente in basso e lateralmente per raggiungere la base in corrispondenza del tubercolo laterale. I due fasci destro e sinistro, alquanto divergenti, costituiscono ciascuno un sistema simmetrico alveolo-basale del canino. Essi traversano il corpo della mandibola per tutta la sua altezza. *Così individuati non li ho trovati descritti da altri autori nei fossili umani.* Nella zona trapezoidale che risulta compresa tra essi e il sistema basale sopra indicato, si svolge una rete trabecolare a larghe maglie nella quale si possono individuare trabecole a direzione obliqua lateromediale che appaiono incrociarsi tra di loro. L'incrocio dà luogo ad un addensamento mediano che corrisponde al fondo della fossa del genioglossa. I due sistemi trabecolari predetti, quello della base e quello del canino, rispondono alle trazioni e alle pressioni alle quali soggiace la regione del mento e possono chiarire i problemi relativi alle condizioni funzionali che presiedono alla sua formazione (Winkler 1922). In queste si devono tener presenti le risultanti delle azioni combinate soprattutto di tutti i muscoli della masticazione (e cioè non solo dei m. temporali, masseteri, pterigoidei interni, come prospettato già da Wegener nel 1927, ma anche dei m. pterigoidei esterni come dimostrato da Lloyd Dubrul e Harry Sicher nel 1954). Con tali traiettorie appaiono già bene delineate le condizioni meccaniche della costituzione del mento. Questo appare già modellato nella sua intima impalcatura statica nell'uomo di Neandertal secondo uno stesso schema di struttura generale che assumerà modalità diverse nel suo processo evolutivo per i più vari fattori che intervengono a modificarlo e plasmarlo nella sua organizzazione definitiva.

ISTOLOGIA. — A. Ascenzi ha esaminato alcuni minuti frammenti della mandibola ed ha dimostrato, per la prima volta, la presenza di sostanza organica nel tessuto osseo di *Homo neandertalensis*. Egli ha trovato una struttura di tipo lamellare con alcune formazioni osteoniche e, ricorrendo al microscopio polarizzatore, ha rilevato indirettamente la presenza di fibre collagene. Il comportamento isto-chimico è risultato modificato nei confronti con l'osso fresco: infatti l'affinità per l'ematossilina è apparsa debole, la metaeromasia fugace e la reazione di Schiff negativa. (Le osservazioni di Ascenzi sono in corso di stampa in «Am. J. Phys. Anthropol.»).

RIASSUMENDO. — *Dalle osservazioni compiute risulta che la mandibola Circeo II, attribuita all'epiwürm (A. C. Blanc), trova le sue corrispondenze morfologiche più vicine nelle mandibole dei paleantropi neandertaliani classici würmiani. Si conferma, così, in Italia la presenza e la uniformità delle forme paleantropiche europee dell'ultimo glaciale, come già ho dimostrato con il cranio Circeo I.*

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Idrodinamica. — *Alcuni aspetti della Matematica del Mare del Nord*^(*). Nota di HANS A. LAUWERIER, presentata^(**) dal Socio M. PICONE.

I. INTRODUZIONE. — Dopo la disastrosa inondazione del 1° febbraio 1953 il Centro Matematico di Amsterdam, in collaborazione con il Ministero dei Lavori Pubblici e l'Istituto meteorologico di De Bilt, ha iniziato un intenso studio del comportamento di un mare poco profondo, come è il Mare del Nord, sotto condizioni meteorologiche anormali. Al Congresso Internazionale di Matematica svoltosi in settembre 1954 in Amsterdam, van Dantzig⁽¹⁾, ha esposto già la linea generale dell'opera compiuta dal Centro Matematico. In questa conferenza darò alcuni dettagli sullo sfondo idrodinamico⁽²⁾. Vorrei sottolineare che, tenuto conto della grande complessità del problema, possono essere trattati qui a mo' d'introduzione soltanto alcuni aspetti dell'opera compiuta al Centro Matematico in questo campo. Tuttavia si trova aggiunto alla presente Nota un elenco di relazioni del Centro Matematico su questo argomento. La ricerca idrodinamica, nonché quella sui problemi — lasciati qui fuori considerazione — di statistica e di economia relativi, in quanto si svolgono al Centro Matematico, vengono dirette dal prof. D. van Dantzig.

I matematici ricorderanno la brillante opera di Henri Poincaré⁽³⁾ concernente la meccanica celeste, nella quale egli ha gettato le fondamenta per l'idrodinamica dell'oceano. Forse per il fatto che tale opera era tanto brillante, dovettero passare molti anni prima che qualche altro matematico osasse aggiungervi contributi di una certa importanza. Tuttavia, nel 1920, nuovi progressi furono fatti dal Taylor⁽⁴⁾, che ha studiato il comportamento di un canale chiuso ad una delle estremità, sottoposto a rotazione, e ha dedotto un metodo per trovare le oscillazioni proprie di un mare rettangolare anch'esso in rotazione.

Egli trovò che gli autovalori vengono determinati dagli zeri di un determinante di ordine infinito, e riuscì a trovare i primi di essi nel caso di un

(*) Questo lavoro, che è stato tradotto dall'inglese nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Roma, è il testo di una conferenza tenuta presso l'Istituto medesimo l'8 aprile 1955.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) D. VAN DANTZIG, *Mathematical problems raised by the flood disaster 1953*. « Proc. Int. Math. Congress », vol. I, Amsterdam 1954.

(2) Cfr. H. LAMB, *Hydrodynamics*. Ch. VIII.

(3) H. POINCARÉ, *Leçons de mécanique céleste*, III, Paris 1910.

(4) G. I. TAYLOR, « Proc. London Math. Soc. » (2), XX, p. 148 (1920).

mare delle dimensioni del Mare del Nord. Poi Jeffreys ⁽⁵⁾ ha considerato il problema per un mare ellittico, che si presenta più semplice per l'assenza di angoli.

Ricerche simili sono state fatte da altri autori, fra i quali Proudman e Goldsbrough, ma nella maggior parte dei casi il problema originale è stato semplificato in un modo piuttosto drastico, ad esempio riducendo le dimensioni orizzontali o trascurando l'influenza della rotazione. Però, nel caso del Mare del Nord ciò certamente non è lecito.

Nel 1947 Schalkwijk ⁽⁶⁾ ha dedicato una ricerca al Mare del Nord dal punto di vista di un meteorologo e ingegnere. Sebbene tale lavoro manchi di rigore matematico, esso dà la base per una trattazione adeguata del comportamento idrodinamico del Mare del Nord.

In ciò che riguarda le equazioni idrodinamiche del moto vengono fatte tre ipotesi fondamentali:

I) si suppone che l'acqua scorra in strati orizzontali,

II) il mescolamento laterale viene trascurato,

III) nella teoria delle onde lunghe, ove il moto è relativamente lento, la derivata totale D/Dt viene sostituita con quella parziale $\partial/\partial t$.

Allora le equazioni del moto hanno la forma seguente ⁽⁷⁾ (cfr. l'elenco delle notazioni alla fine del presente lavoro):

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} - g \cdot \text{grad } \zeta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right).$$

A questa possiamo aggiungere l'equazione di continuità. Se $\mathbf{S} = \int_{-h}^0 \mathbf{v} dz$ significa la corrente totale, abbiamo

$$(1.2) \quad \text{div } \mathbf{S} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0.$$

Le condizioni al bordo relative alla coordinata verticale z sono:

a) alla superficie: $\left(\mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right)_{z=0} = \mathbf{W}$, essendo \mathbf{W} la forza del vento per unità di area della superficie,

b) sul fondo: $\mathbf{v} = 0$.

L'espressione $\left(\mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right)_{z=-h} = \mathbf{B}$ rappresenta l'attrito sul fondo.

Sulla costa la componente normale di \mathbf{S} s'annulla e sulla frontiera fra un mare poco profondo e un oceano di grande profondità possiamo porre $\zeta = 0$.

(5) H. JEFFREYS, « Proc. London Math. Soc. » (2), XXIII, p. 455 (1924).

(6) W. F. SCHALKWIJK, *A contribution to the study of storm surges on the Dutch coast* (1947). Tesi di laurea, Utrecht.

(7) Cfr. J. C. SCHÖNFELD, *The two-dimensional motion of long waves*. 1954. (Relazione interna del Ministero dei Lavori Pubblici d'Olanda).

Per ciò che riguarda il coefficiente di turbolenza varie ipotesi sogliono essere fatte. Ci limiteremo nella Nota presente alla formula di Fjeldstadt, che pone

$$(1.3) \quad \mu = \mu_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^k \quad 0 < k < 1.$$

Nel caso del Mare del Nord abbiamo i seguenti valori numerici:

$$\mu_0 = 450 \quad , \quad k = 3/4.$$

2. IL CASO STAZIONARIO SENZA ROTAZIONE. - Schalkwijk considera il caso di un campo di vento stazionario con $\Omega = 0$. Allora le equazioni d'equilibrio sono le seguenti:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - g \cdot \text{grad } \zeta = 0 \\ \mu = \mu_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^k \end{cases}$$

con le condizioni sul bordo

$$\begin{cases} z = 0 & : \quad \mu \frac{\partial v}{\partial z} = W \\ z = -h & : \quad v = 0. \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è

$$(2.2) \quad v = \frac{h \left(1 + \frac{z}{h}\right)^{1-k}}{\mu_0 (1-k)} \left\{ W - \rho g \cdot \text{grad } \zeta \left(\frac{-z(1-k) + h}{2-k} \right) \right\}.$$

L'espressione fra parentesi graffe può cambiare segno cosicché si trova un profilo del tipo rappresentato in fig. 1.

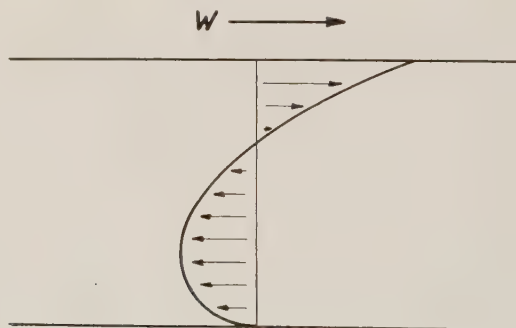


Fig. 1.

È dunque possibile che gli strati inferiori del mare scorrano nella direzione opposta a quella del vento.

La corrente totale S è data da

$$(2.3) \quad S = \frac{h^2}{\mu_0 (1-k)(2-k)} \left\{ W - \frac{2 \rho g h}{3-k} \text{grad } \zeta \right\}.$$

3. IL CASO GENERALE. — Nel caso $\Omega \neq 0$ Schalkwijk trova il risultato seguente:

$$(3.1) \quad \lambda \mathbf{S} - \Omega \wedge \mathbf{S} = \frac{\mathbf{W}}{\rho} - gh \operatorname{grad} \zeta.$$

Se dall'altro canto l'equazione fondamentale del moto (1.1) nello stato d'equilibrio viene integrata dal fondo alla superficie otteniamo

$$(3.2) \quad -\Omega \wedge \mathbf{S} + gh \operatorname{grad} \zeta - \frac{\mathbf{W}}{\rho} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} = 0,$$

cosicch  effettivamente egli ha supposto:

$$(3.3) \quad \frac{\mathbf{B}}{\rho} = \lambda \mathbf{S}.$$

L'artificio che consiste nel porre l'attrito sul fondo proporzionale alla corrente totale, e l'introduzione del coefficiente di smorzamento λ permettono una restrizione delle dimensioni del problema, perch  la coordinata verticale viene fatta sparire dalle equazioni.

Cos  otteniamo le seguenti equazioni fondamentali del moto che sono il punto di partenza per l'ulteriore ricerca,

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \lambda \mathbf{S} - \Omega \wedge \mathbf{S} + gh \operatorname{grad} \zeta = \frac{\mathbf{W}}{\rho} \\ \operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

con

$$(3.5) \quad \mathbf{S} \times \mathbf{n} = 0,$$

sulla costa, e

$$(3.6) \quad \zeta = 0$$

sulla frontiera coll'oceano.

4. LA RELAZIONE FRA L'ATTRITO SUL FONDO E LA CORRENTE TOTALE. — Il metodo usato dallo Schalkwijk per arrivare all'ipotesi (3.3) pu  essere migliorato nel modo seguente. Introdotte le variabili complesse

$$v = v_x + i v_y, \quad \gamma = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} - i \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad W = W_x + i W_y, \quad S = S_x + i S_y,$$

e chiamato $-\Omega$ la componente di Ω in direzione delle z , le equazioni d'equilibrio possono essere scritte nella forma

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - i \Omega v + g \gamma = 0 \\ \mu = \mu_0 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^k, \end{array} \right.$$

con le condizioni al bordo

$$(4.2) \quad \begin{cases} z = 0 & : & \mu \frac{\partial v}{\partial z} = W \\ z = -h & : & v = 0. \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema può essere scritta come segue

$$v = A u^{(1-k)/2} J_{\alpha-1}(\beta u^{(2-k)/2} i^{3/2}) + B u^{(1-k)/2} J_{1-\alpha}(\beta u^{(2-k)/2} i^{3/2}) - i \frac{g}{\Omega} \gamma,$$

ove

$$u = 1 + \frac{z}{h}, \quad \alpha = \frac{1}{2-k}, \quad \beta = \left(\frac{\rho \Omega}{\mu_0} \right)^{1/2} 2 \alpha h.$$

Le costanti A e B possono essere determinate facilmente dalla (4.2). Per la corrente totale S troviamo

$$(4.3) \quad i\Omega S = \frac{W}{\rho} + gh\gamma - \frac{1}{\varphi_{-\alpha}(\beta i^{3/2})} \left(\frac{W}{\rho} + gh\gamma \varphi_{\alpha}(\beta i^{3/2}) \right),$$

ove

$$\varphi_{\alpha}(p) = \Gamma(1 + \alpha) \left(\frac{p}{2} \right)^{-\alpha} J_{\alpha}(p).$$

Nel caso del Mare del Nord abbiamo approssimativamente $\Omega = 0,44$ e $h = 40$. Allora ricaviamo da (4.3)

$$i\Omega' S = \frac{\frac{W}{\rho} + gh'\gamma}{1 - \frac{i\lambda'}{\Omega'}},$$

ove $\Omega' = 0,41$, $h' = 36$ e $\lambda' = 0,08$.

Questo è già il risultato di Schalkwijk, correggendo alcune costanti del 10 % incirca.

Però tenuto conto della variabilità di h e Ω possiamo adottare la (3.4) con (3.5) e (3.6) come una rappresentazione appropriata del comportamento della corrente totale in un mare poco profondo.

5. UN CAMPO DI VENTO STAZIONARIO SU UN MARE DI PROFONDITÀ COSTANTE. - La soluzione completa della (3.4) con le condizioni al bordo (3.5) e (3.6) per il caso stazionario di un mare di profondità costante non troppo grande è stata ottenuta da Velthkamp⁽⁸⁾ nel Centro Matematico di Amsterdam. Il suo metodo può essere esposto come segue. Vengono introdotte la funzione di corrente θ e due potenziali di vento U e V definiti rispettivamente mediante

$$(5.1) \quad S_x = - \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad S_y = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

(8) Relazioni TW 23 e TW 24 del Centro Matematico.

e

$$(5.2) \quad \begin{cases} W_x = -\rho \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ W_y = \rho \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) \end{cases}$$

Egli dimostra allora che

$$(5.3) \quad A = (\lambda\theta - U) + i(\Omega\theta - c^2\zeta - V)$$

è una funzione analitica di $z = x + iy$. Le condizioni al bordo sono

$$(5.4) \quad \operatorname{Re} A(z) = \text{cost.} - U$$

sulla costa,

$$(5.5) \quad \operatorname{Im} (\lambda - i\Omega)(A + U + iV) = 0$$

sulla frontiera dell'oceano.

Mediante rappresentazione conforme tale problema può essere risolto per ogni tipo di mare.

6. UN CAMPO DI VENTO NON STAZIONARIO SU UN MARE DI PROFONDITÀ VARIABILE. — Ciò presenta un problema molto difficile e soltanto in pochissimi casi non banali può essere trovata una soluzione mediante metodi analitici.

Allo scopo di esporre i metodi usati trattiamo uno di quei casi con qualche dettaglio.

Consideriamo un mare in forma di semipiano $y > 0$, la cui profondità sia una funzione esponenziale della sola y :

$$(6.1) \quad h = h_0 e^{\beta y}.$$

Consideriamo un campo di vento uniforme dipendente solamente dal tempo.

Allora le equazioni fondamentali sono

$$(6.2) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) S_x - \Omega S_y = \frac{W_x}{\rho} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) S_y + \Omega S_x + g h \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{W_y}{\rho} \\ \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

con le condizioni al bordo

$$(6.3) \quad y = 0, \quad S_y = 0.$$

Applicata la trasformazione di Laplace

$$(6.4) \quad \bar{\zeta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} \zeta(y, t) dt,$$

le equazioni (6.2) e (6.3) assumono una forma più semplice.

Eliminando poi \bar{S}_x e \bar{S}_y otteniamo

$$(6.5) \quad \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} - \frac{\rho \{(\rho + \lambda)^2 + \Omega^2\}}{gh(\rho + \lambda)} \bar{\zeta} = 0$$

con

$$(6.6) \quad gh\rho(\rho + \lambda) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = (\rho + \lambda) \bar{W}_y - \Omega \bar{W}_x$$

per

$$y = 0.$$

La soluzione delle (6.5) e (6.6) è

$$(6.7) \quad \bar{\zeta} = \frac{1}{\rho k gh_0} \frac{u^{1/2} I_1 \left(\frac{2 k u^{1/2}}{\beta} \right)}{I_0 \left(\frac{2 k}{\beta} \right)} \left\{ \frac{\Omega}{\rho + \lambda} \bar{W}_x - \bar{W}_y \right\},$$

ove

$$(6.8) \quad k^2 = \frac{\rho \{(\rho + \lambda)^2 + \Omega^2\}}{gh_0(\rho + \lambda)}.$$

e

$$(6.9) \quad u = e^{-\beta y}.$$

Se abbiamo un mare in forma di semipiano e di profondità costante, possiamo eseguire il passaggio $\beta \rightarrow 0$ in (6.7). Mediante lo sviluppo asintotico per I_0 e I_1 troviamo

$$(6.10) \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{\zeta} = \frac{e^{-ky}}{\rho k gh_0} \left\{ \frac{\Omega}{\rho + \lambda} \bar{W}_x - \bar{W}_y \right\}.$$

Applicando poi alle (6.7) e (6.10) i soliti metodi per l'antitrasformazione di Laplace si trova la $\zeta(y, t)$.

7. IL MARE DEL NORD. - Abitualmente il Mare del Nord viene rappresentato per mezzo di un rettangolo i cui lati hanno il rapporto 2:1. Come prima approssimazione la profondità può considerarsi costante. Allora le equazioni sono della forma

$$(7.1) \quad \begin{cases} (\rho + \lambda) \bar{S}_x - \Omega \bar{S}_y + c^2 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \frac{\bar{W}_x}{\rho} \\ (\rho + \lambda) \bar{S}_y + \Omega \bar{S}_x + c^2 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = \frac{\bar{W}_y}{\rho} \\ \frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_y}{\partial y} + \rho \bar{\zeta} = 0 \end{cases}$$

con le condizioni al bordo

$$(7.2) \quad \begin{cases} x = \pm a & \bar{S}_x = 0 \\ y = 0 & \bar{S}_y = 0 \\ y = b & \bar{\zeta} = 0. \end{cases}$$

La costa olandese è sull'asse delle x vicina all'origine e la frontiera dell'oceano supposto di infinita profondità è situata a $y = b$.

Ci sono vari metodi per affrontare questo problema, e ne discuteremo in questo luogo soltanto uno che sembra promettente.

Faremo la restrizione che il campo di vento sia indipendente da x , ma ammettiamo, naturalmente, che esso possa dipendere da y e z . Così il caso di una larga depressione che avvicinerebbe la costa olandese, è incluso in tale modello.

Risolviamo in un primo tempo un problema più semplice. Consideriamo la striscia $0 < y < b$ e cerchiamo di trovare una soluzione delle equazioni non omogenee (7.1) che soddisfi alle condizioni per $y = 0$ e $y = b$. Questa soluzione non dipende da x e può essere determinata come nella sezione precedente. Se questa soluzione viene chiamata S'_x, S'_y, ζ' , allora rappresentiamo la soluzione del caso rettangolare nella forma

$$S_x = S'_x + S''_x \quad S_y = S'_y + S''_y \quad \zeta = \zeta' + \zeta'',$$

cosicché S''_x, S''_y, ζ'' soddisfano a equazioni omogenee, a condizioni omogenee per $y = 0$ e $y = b$, ma a condizioni non omogenee per $x = \pm a$, precisamente $S''(y) = \Psi(y)$.

Considerando ora le equazioni omogenee associate alle (7.1) per S''_x, S''_y, ζ'' , otteniamo, eliminati \bar{S}''_x e \bar{S}''_y , per ζ'' l'equazione differenziale di Helmholtz

$$(7.3) \quad \Delta \bar{\zeta}'' - k^2 \bar{\zeta}'' = 0,$$

ove k^2 ha lo stesso significato come in (6.8).

Equazioni simili si ottengono anche per \bar{S}''_x e \bar{S}''_y .

Seguiamo poi l'idea di Taylor per lo sviluppo di \bar{S}''_x, \bar{S}''_y e $\bar{\zeta}''$ in una serie di Fourier (con soli coseni), ad esempio

$$\bar{S}''_x = \sum_0^{\infty} \{a_n \operatorname{Ch} \alpha_n x + b_n \operatorname{Sh} \alpha_n x\} \cos \frac{n\pi y}{b},$$

ove

$$\alpha_n^2 = k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}.$$

Questi sviluppi non sono ortogonali rispetto al rettangolo $-a < x < a$, $0 < y < b$ e le condizioni al bordo condurranno dunque a relazioni lineari fra un numero infinito di coefficienti a_n e b_n .

Così questo problema può essere ridotto alla soluzione di un numero infinito di equazioni lineari non omogenee.

Nel caso di Taylor si trova un sistema infinito di equazioni lineari omogenee, e il determinante di tale sistema determina le oscillazioni proprie. Taylor considera soltanto un rettangolo chiuso, ma il suo metodo per la

determinazione degli autovalori è stato generalizzato e applicato al caso del rettangolo aperto da van Dantzig e Veltkamp; al Centro Matematico. Per ulteriori dettagli concernenti questo problema e problemi simili il lettore viene rinviato alle pubblicazioni del Centro Matematico di Amsterdam.

Relazioni del Centro Matematico di Amsterdam connesse collo studio del Mare del Nord.

1953. G. W. VELTKAMP, *A problem of conformal representation*, TW 22 (Olandese).
 G. W. VELTKAMP, *The influence of stationary windfields upon a sea of constant depth*, TW 23 (Olandese).
1954. G. W. VELTKAMP, *The influence of stationary windfields upon a sea of partially constant depth*, TW 24 (Olandese).
 G. W. VELTKAMP, T. C. BRAAKMAN, *Solution of a singular integral equation*, TW 25 (Olandese).
 T. C. BRAAKMAN, *The level of a sea with constant or partially constant depth under influence of stationary windfields*, TW 27 (Olandese).
 H. A. LAUWERIER, *Some boundary value problems with a skew derivative*, TW 29 (Olandese).
 D. VAN DANTZIG, *Applications of Taylor's method on the proper oscillations of the North Sea* (Nota interna).
1955. G. W. VELTKAMP, *Singular solutions of the two-dimensional Helmholtz equation* (Nota interna).
 H. A. LAUWERIER, *The motion of a shallow sea under influence of a non-stationary windfield*, TW 31 (Inglese).
 H. A. LAUWERIER, *The motion of a halfplane sea under influence of a non-stationary windfield*, TW 32 (Inglese).
 H. A. LAUWERIER, *The expansion of a function into a Fourier series with prescribed phases, valid in the half-period interval*, TW 33 (Inglese).
 G. W. VELTKAMP, *Energy relations in a rotating sea*, TW 34 (Inglese).

ELENCO DELLE NOTAZIONI.

- x, y, z = coordinate cartesiane
 t = tempo
 v_x, v_y = componenti della velocità delle particelle d'acqua
 ζ = variazione di altezza della superficie disturbata, posto uguale a zero il livello della superficie non disturbata
 g = accelerazione di gravità
 h = profondità
 ρ = densità
 Ω = coefficiente di Coriolis = $2 \omega \sin \varphi$, ove ω è la velocità angolare della terra e φ la latitudine geografica
 W_x, W_y = componenti della forza del vento
 B_x, B_y = componenti dell'attrito sul fondo
 λ = coefficiente di smorzamento
 S_x, S_y = componenti della corrente totale.

Astronomia. — *Sul sistema binario λ Ophiuci* (A.D.S. 10087).

Nota (*) di CARLA MARIA FINZI e MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

1. La stella satellite nel sistema binario λ Ophiuci (A.D.S. 10087; $\alpha = 16^h 28^m, 4$; $\delta = 2^\circ 06'$; eq. 1950), ha compiuto quasi una intera rivoluzione intorno alla stella principale, da quando Struve, nel 1825, cominciò ad osservarla con continuità. Veramente esistono anche misure più antiche del 1783 e del 1802 (1), dovute ad Herschel; ma esse sono così incerte, che ci è sembrato preferibile non tenerne conto. Data la differenza di grandezza fra le due stelle del sistema e la loro breve distanza, le osservazioni sono difficili e di conseguenza non molto precise, sicché le prime orbite calcolate da Mäddler, Hind, Seeliger, ecc. su di un arco di insufficiente lunghezza, si mostrano del tutto incompatibili con le osservazioni ulteriori. Anche recentemente, l'orbita di Camp del 1935 (2), scarta notevolmente dalle ultime osservazioni; mentre migliore è quella della Durham del 1943 (3). Più attendibili, appaiono l'orbita di Rabe, calcolata nel 1945 (4), e quella di Baize, anch'essa del 1945 (5), che riportiamo qui appresso con i noti simboli, valutando sempre il periodo P in anni:

$$\text{Rabe: } \Omega = 83^\circ, 32 ; i = \pm 21^\circ, 68 ; \omega = 125^\circ, 65 ; e = 0,618 ; a = 0'', 93 ; \\ P = 131,96 ; \tau = 1939,53 \text{ (eq. 1900)}$$

$$\text{Baize: } \Omega = 51^\circ, 1 ; i = \pm 28^\circ, 1 ; \omega = 160^\circ, 4 ; e = 0,626 ; a = 0'', 95 ; \\ P = 129,5 ; \tau = 1939,6 \text{ (eq. 1900)}.$$

Dato l'ampio arco ormai percorso dai tempi di Struve, non sono da attendere miglioramenti molto notevoli negli elementi; ma tuttavia le rappresentazioni delle osservazioni non sono ancora del tutto soddisfacenti. In particolare, per l'orbita di Baize, che pure sembra la migliore, i residui $O - C$ in angolo fra le osservazioni ed i calcoli, a detta dello stesso autore, mostrano un carattere sistematico; come se in essi fossero presenti due oscillazioni, con periodo di circa un centinaio di anni la prima, e di venti anni la seconda. A ciò si aggiunga che, secondo il Frost (6), la velocità radiale della stella principale sarebbe variabile:

(*) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1955.

(1) «Mem. R.A.S.», vol. XXV, p. 39.

(2) «Astr. Journal», vol. XLV, p. 24, 1935.

(3) «Astr. Journal», vol. L, p. 165, 1945.

(4) «Astr. Nachr.», Bd.-276, p. 60, 1945.

(5) «Journal Obs.», T. 24, p. 123, 1945.

(6) Cfr. «Journal Obs.», T. 21, p. 32.

Abbiamo quindi creduto opportuno procedere ad un nuovo studio dell'orbita, e di ciò ci occuperemo in questa Nota.

2. A tale scopo, abbiamo usato tutte le osservazioni contenute nei cataloghi del Burnham e dell'Aitken, aggiungendovi quelle modernissime non contenute in essi, che ci furono gentilmente inviate dall'Osservatorio di Lick e che riportiamo nella Tabella I. Per i calcoli, le osservazioni spettanti ad uno stesso anno sono state raggruppate in una sola, tenendo rigorosamente conto, nella riduzione, del numero delle notti di osservazione, su cui ciascuna misura poggiava. Infine a tutti gli angoli è stata apportata la correzione per la precessione, pari a $\Delta\theta = -0^{\circ},00212$ ($1950 - t$).

Una prima orbita approssimata, da noi calcolata sul complesso delle osservazioni riportate dal Burnham e dall'Aitken e di quelle inviateci da Lick, col metodo di Glasenapp-Kowalsky ⁽⁷⁾, ci ha dato i seguenti elementi approssimati:

$$\Omega = 50^{\circ},3 ; i = \pm 29^{\circ},7 ; \omega = 161^{\circ},8 ; e = 0,594 ; a = 0'',976 ;$$

$$P = 128,12 ; \tau = 1940,71 ; (\text{eq. } 1950).$$

Abbiamo poi scelti 19 luoghi normali (vedi Tabella II), a cui è stato dato un peso proporzionale e al numero degli osservatori ed alle notti di osservazione, e servendoci di questi, abbiamo migliorato gli elementi col metodo di Hellerich ⁽⁷⁾. Come è noto, chiamando con $\Delta\Omega, \Delta i, \Delta\omega \dots$ ecc., le piccole correzioni da apportare a ciascun elemento e con $\Delta\theta$ lo scarto in angolo fra la posizione osservata e quella calcolata, ogni luogo normale k dà origine ad una equazione del tipo

$$(1) \quad A_k \Delta\Omega + B_k \Delta i + C_k \Delta\omega - \beta_k C_k \Delta\tau' + \beta_k C_k (t_k - \tau) \Delta n' + \alpha_k C_k \Delta e' = \Delta\theta_k$$

dove i coefficienti sono calcolabili direttamente o mediante le tavole dello Schlesinger ⁽⁸⁾ e $\Delta\tau', \Delta n', \Delta e'$ sono legate a $\Delta\tau, \Delta n, \Delta e$ da facili sostituzioni. Le 19 equazioni sono state da noi ridotte, col metodo dei minimi quadrati, al seguente sistema normale:

$$\begin{array}{rcccccccc} 53,000 \Delta\Omega - 0,654 \Delta i + 50,315 \Delta\omega - 11,470 \Delta\tau' + & 1250,377 \Delta n' - & 6,996 \Delta e' = - & 1,88500 \\ + 1,826 & - 0,456 & - 0,014 & - & 15,916 & + & 0,900 & = - & 0,00394 \\ & + 48,563 & - 11,575 & + & 1245,058 & - & 5,626 & = - & 1,75478 \\ & & + 5,945 & & 724,208 & + & 1,451 & = + & 0,94522 \\ & & & & + 91052,709 & - & 211,595 & = - & 123,10730 \\ & & & & & & + 13,738 & = + & 1,35187 \end{array}$$

Risolto il sistema e passando dai valori di $\Delta\tau', \Delta n', \Delta e'$ a $\Delta\tau, \Delta n, \Delta e$, abbiamo avuto le correzioni:

$$\Delta\Omega = + 2^{\circ},2 ; \Delta i = - 2^{\circ},9 ; \Delta\omega = - 2^{\circ},9 ; \Delta e = 0,024 ; \Delta n = - 0,00066 ;$$

$$\Delta\tau = - 1,17$$

da aggiungere agli elementi approssimati da noi precedentemente calcolati.

(7) Cfr. G. ARMELLINI, *Astronomia Siderale*, vol. II, p. 428 e sg.

(8) Cfr. *Publ. of the Allegheny Obs.*, vol. I, n. 6.

t	ϑ	ρ	n	autore	t	ϑ	ρ	n	autore	t	ϑ	ρ	n	autore
1935,25	160°,2	0",38	3	Wilson	1937,55	184°,3	0",37	5	Baize	1941,42	237°,5	0",38	1	V. den Bos
,43	158°,3	0,47	3	Wilson	,58	196°,0	Tannembaum	,48	239°,5	0,36	4	Baize
,44	158°,3	0,43	6	V. Biesbroeck	,80	183°,9	0,4	4	Duruy	1942,67	250°,9	0,38	5	Baize
,45	160°,1	0,45	5	Voute	1938,26	192°,9	0,36	4	Voute	1943,21	257°,3	0,39	4	Voute
,54	155°,6	0,38	5	Baize	,36	199°,5	0,33	4	V. den Bos	,46	260°,9	0,39	4	Baize
,54	156°,8	0,48	6	Rabe	,54	196°,7	0,38	4	Duruy	1944,30	266°,6	0,37	4	Voute
1936,18	168°,2	0,40	4	Voute	,56	199°,0	0,42	6	Rabe	1945,20	278°,2	0,36	4	Voute
,55	166°,1	0,35	3	Baize	,60	199°,5	0,36	5	Baize	,86	279°,7	0,57	5	Eggen
,55	173°,3	0,33	4	V. den Bos	1939,24	206°,2	0,35	3	Voute	1946,49	286°,6	0,60	2	Arend
,57	171°,9	0,49	10	Rabe	,51	212°,8	0,34	2	V. den Bos	1947,26	290°,5	,,		Camichal
1937,27	180°,5	0,40	4	Voute	,59	211°,1	0,32	5	Baize	,26	292°,6	0,54		Muller
,52	186°,1	0,32	4	V. den Bos	1940,58	226°,4	0,36	3	V. den Bos					
,52	184°,8	0,43	11	Rabe	,58	228°,6	0,33	6	Baize					

TABELLA II.

Luoghi normali.

t	ϑ	ρ	P	t	ϑ	ρ	P	t	ϑ	ρ	P	t	ϑ	ρ	P
1825,51	331°,5	0",84	1	1865,95	25°,5	1",51	1	1894,83	48°,3	1",44	5	1924,19	91°,5	0",90	5
1831,90	349°,2	1,04	1	1870,00	27°,8	1,55	1	1897,67	51°,7	1,41	5	1935,45	158°,0	0,43	4
1841,09	3,6	0,99	2	1878,04	35°,9	1,60	1	1902,86	57°,0	1,40	5	1940,57	227°,8	0,34	2
1846,52	8°,7	1,07	2	1882,51	38°,8	1,48	1	1910,15	66°,4	1,13	4	1945,54	279°,8	0,46	3
1858,59	17°,9	1,36	2	1887,83	44°,5	1,48	4	1916,08	73°,8	1,04	4				

Abbiamo poi determinato, con i nuovi elementi, i valori di ρ per i luoghi normali e ne abbiamo fatto il confronto con quelli osservati, ottenendo 19 equazioni del tipo:

$$(2) \quad \Delta a = a \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

le quali, risolte col metodo dei minimi quadrati, ci hanno dato per la correzione Δa da apportare al semiasse maggiore: $\Delta a = -0'',006$.

Abbiamo dunque i seguenti elementi definitivi:

$$\Omega = 52^{\circ},5 ; i = \pm 26^{\circ},8 ; \omega = 158^{\circ},9 ; e = 0,618 ; a = 0'',970 ;$$

$$P = 129,87 ; \tau = 1939,54 ; (\text{eq. 1950}).$$

3. Con questi elementi abbiamo calcolato i ϑ ed i ρ per gli anni di osservazione e confrontato i valori ottenuti dal calcolo con le misure; gli scarti sono riportati nella Tabella III, dove i luoghi normali sono scritti in grassetto.

Gli O — C si mantengono generalmente piccoli, ma mostrano una qualche sistematicità; infatti riportando in un grafico gli scarti O — C in angolo, non è difficile scorgervi una lieve oscillazione con circa 100 anni di periodo, in accordo con quanto ha trovato Baize. Tale variazione è forse complicata da qualche oscillazione secondaria, che però, non ci pare possibile di poter definire. Gli scarti O — C nel raggio vettore, dopo essersi mantenuti, per un tratto negativi, non sembrano invece mostrare periodicità; d'altronde gli errori di misura, possono essere di una entità tale da coprire una eventuale oscillazione presente.

Come afferma il Baize, le oscillazioni nella curva degli O — C in angolo, potrebbero imputarsi sia ad errori nelle osservazioni, sia alla presenza di uno o più corpi invisibili nel sistema binario. La questione rimane dunque aperta; ma il materiale finora disponibile, non ci pare che possa permettere una decisione sicura. Con gli elementi da noi trovati, abbiamo anche calcolato le effemeridi per i prossimi anni, che riportiamo nella Tabella IV.

TABELLA IV.

t	ϑ	ρ	t	ϑ	ρ	t	ϑ	ρ
1950 .	308° ,7	0'' ,60	1958 . .	338° ,3	0'' ,84	1966 . .	354° ,8	1'' ,05
1952 .	319 ,0	0 ,66	1960 . .	343 ,2	0 ,90	1968 . .	357 ,9	1 ,10
1954 .	326 ,2	0 ,72	1962 . .	347 ,5	0 ,95	1970 . .	0 ,8	1 ,15
1956 .	332 ,4	0 ,78	1964 . .	351 ,3	1 ,00			

4. Abbiamo quindi cercato la parallasse dinamica del sistema, col metodo di Russell e Moore ⁽⁹⁾. Come è noto, tale metodo è basato su una combinazione della 3^a legge di Keplero con la relazione massa-luminosità. In proposito, secondo Russell e Moore, prendendo per unità rispettivamente la massa e la luminosità bolometrica del Sole, tale relazione è espressa dalla formula:

$$(3) \quad L = \mu^{3,3}$$

dove L indica la luminosità e μ la massa dell'astro.

Dalla terza legge di Keplero, si ha poi, chiamando con π la parallasse del sistema e con μ_1 e μ_2 le masse:

$$(4) \quad \pi = a'' P^{-2/3} (\mu_1 + \mu_2)^{-1/3}.$$

Introdotta una parallasse ipotetica h_1 definita per un sistema di massa unitaria e perciò uguale a $a'' P^{-2/3}$ si ricava dalla (4):

$$(5) \quad \pi = h_1 n_0$$

dove n_0 è una quantità che dipende dalle masse e quindi per la (3) dalle grandezze bolometriche assolute.

Per il calcolo di n_0 , consideriamo prima il caso che tutta la massa del sistema sia raccolta nell'astro principale, avente inoltre parallasse h_1 ; la sua grandezza assoluta visuale M calcolabile immediatamente da quella apparente m , sarà $M = m + 5 + 5 \log h_1$, e la sua grandezza assoluta bolometrica M_1 si ricaverà da M , aggiungendovi una costante, dipendente dal tipo spettrale e determinata in base all'esperienza. Nel caso però che la massa sia divisa fra le due stelle componenti, la grandezza assoluta bolometrica del sistema si dedurrà da quella ottenuta correggendola opportunamente. La correzione può calcolarsi - in base alla (3) - conoscendo la differenza di grandezza visuale fra le componenti il sistema, il loro tipo spettrale e ricordando, nel presente caso, che la stella principale è anche binaria spettroscopica. Infine conoscendo la grandezza assoluta bolometrica della coppia stellare, sempre tramite la (3), si ricava n_0 ; ed i calcoli sono facilitati da tabelle e da grafici dati da Russell e Moore. Ora per λ *Ophiuci*, abbiamo:

Grandezza apparente visuale globale, secondo la Harvard Photometry: $m = 3,85$;

Differenza di grandezza fra le due componenti; $\Delta m = 2,1$

Tipo spettrale, secondo la classificazione di Mont Wilson: A1.

Con questi dati, servendoci del metodo anzi detto, abbiamo ottenuto:

$$h_1 = 0'',038 \quad \pi = 0'',019 \quad \mu_1 + \mu_2 = 7,9$$

prendendo sempre come unità di massa, quella del Sole.

5. Infine abbiamo calcolato la velocità radiale, ai nodi della stella satellite rispetto a quella principale ⁽¹⁰⁾.

(9) Cfr. RUSSELL and MOORE, *The Masses of the Stars*. (Chicago 1940).

(10) Cfr. «Un. Obs. Circ.», n. 68 (1926), n. 86 (1932).

A tale scopo, scelto il sistema di coordinate xyz , avente per origine la stella principale e per assi rispettivamente la tangente al cerchio orario, la tangente al parallelo e la congiungente la Terra con la stella, ricordiamo che la terza coordinata z del satellite è data da:

$$(6) \quad z = r \sin (v + \omega) \sin i$$

essendo v l'anomalia vera al momento considerato ed r la distanza del satellite dalla stella principale. Sviluppando questa formula e derivando z , rispetto al tempo, otterremo la velocità radiale relativa, a meno del segno, data l'ambiguità del segno dell'inclinazione. Eseguiti i calcoli abbiamo trovato per i due nodi:

$$t = 1898,3 \quad v_r = \pm 2,8 \text{ Km/sec.}$$

$$t = 1941,0 \quad v_r = \mp 10,6 \text{ Km/sec.}$$

dove abbiamo dato anche i tempi in cui il satellite è passato per i nodi stessi.

6. Terminando, notiamo che M. C. Finzi ha eseguito i calcoli riguardanti la ricerca ed il miglioramento degli elementi orbitali sotto la guida di M. A. Giannuzzi, mentre lo studio dei residui, la ricerca della parallasse e delle velocità, è stato eseguito da M. A. Giannuzzi.

Astronomia. — *La fase decrescente dell'ultimo ciclo solare, secondo le misure effettuate nell'Osservatorio Astronomico di Roma.* Nota I^(*) di TERESA FORTINI, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

1. Sono stati già pubblicati, in diversi fascicoli delle «Memorie della Società Astronomica Italiana»⁽¹⁾, i risultati delle osservazioni fotografiche che si eseguono quotidianamente all'Osservatorio di Roma su Monte Mario, a partire dal 1° gennaio 1948, per la determinazione delle aree e posizioni eliografiche delle macchie solari. Si sono così ricoperti, con queste osservazioni, gli ultimi anni del ciclo solare che, iniziato nel 1944 e culminato nel 1947, si è esaurito nel 1954, anno in cui si sono verificati periodi di quasi completa inattività solare. Con il materiale raccolto ho voluto compiere ora un'analisi sull'andamento del ciclo nella sua fase di decrescenza ed eseguire anche un esame comparativo, tra le osservazioni di Monte Mario e quelle effettuate in altre specole. Con l'occasione, rendo noto anche i risultati delle nostre osservazioni quotidiane dei numeri caratteristici di Wolf; che normalmente comunichiamo, insieme alle osservazioni fotografiche, all'Osservatorio di Zurigo. Ricordo pure che alcuni risultati relativi alle posizioni e alle aree delle macchie

(*) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1955.

(1) Cfr. le «Memorie della Società Astronomica Italiana», 1°: Vol. XX-4, pp. 287; 2°: Vol. XXI-5, pp. 270; 3°: Vol. XXII-2, pp. 121; 4°: Vol. XXII-4, pp. 291; 5°: Vol. XXIII-2-3, pp. 129; 6°: Vol. XXIV-2, pp. 175; 7°: Vol. XXV-3, pp. 257; 8°: Vol. XXVI-2, pp. 221.

solari vengono anche da noi inviati al « Fraunhofer Institut » di Friburgo, dove sono pubblicati ogni trimestre nella « Sonnen Zirkular ».

Infine ho elaborato una serie di osservazioni sistematiche, che abbiamo iniziato a partire dal 1° gennaio 1949, riguardanti la definizione dell'immagine e delle condizioni del bordo solare. Da tali dati ho potuto ricavare alcune utili notizie sulle osservazioni solari a Roma, specialmente in vista del nuovo impianto che stiamo eseguendo per la nostra Torre Solare.

TABELLA I.

	1948		1949		1950		1951		1952		1953		1954	
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Gennaio	113,5	4	219,9	10	89,3	9	45,7	9	81,1	14	34,3	20	0	19
Febbraio	88,8	17	385,9	12	158,1	7	58,8	6	41,9	14	3,0	18	0	14
Marzo	85,1	21	255,3	12	144,0	12	51,7	13	32,1	13	14,3	26	11,9	27
Aprile	186,3	15	228,7	12	162,7	3	82,5	16	48,4	11	36,6	24	1,0	25
Maggio	163,0	10	153,2	6	112,0	8	105,7	17	31,7	18	14,1	20	0,5	24
Giugno	202,8	19	119,4	10	66,4	9	87,0	22	43,4	15	23,8	20	0	19
Luglio	200,6	22	103,0	12	77,0	11	64,9	20	50,0	22	8,1	29	6,3	26
Agosto	271,1	24	120,7	15	79,8	16	53,8	14	78,3	15	31,0	23	10,1	25
Settembre	170,5	14	146,4	9	48,7	10	98,5	13	40,2	15	18,5	26	0	27
Ottobre	182,8	12	121,7	13	41,0	8	46,6	16	29,9	21	10,2	25	8,2	29
Novembre	167,5	18	180,0	2	67,9	9	62,0	13	24,1	15	1,4	26	9,5	22
Dicembre	301,1	16	121,9	7	47,7	6	48,8	17	36,1	13	2,0	22	8,8	24
Medie annuali . .	184,2	192	182,6	120	87,6	108	69,2	176	44,2	186	16,2	279	5,1	278
Numeri di Zurigo .	136,3		137,7		83,9		69,4		31,5		13,9		4,4	
K	0,83		0,88		1,08		1,07		0,80		0,80		0,80	

1 = numero di Wolf.

2 = giornate di osservazione.

2. Per quanto riguarda il rilievo dei numeri di Wolf, le osservazioni sono state da me effettuate, come per gli anni precedenti il 1948⁽²⁾, al piccolo equatoriale Merz ($F = m. 1,85$; $O = cm 11,7$; ingrandimento 64) a cui è stato adattato uno schermo rigido e posto a una distanza tale da dare per proiezione un'immagine del Sole di 16 cm di diametro. La tabella I dà i valori

(2) La statistica e il rilievo delle macchie solari sono state effettuate sistematicamente all'Osservatorio di Monte Mario a partire dal 28 giugno 1938.

medi mensili e annuali, dei numeri caratteristici di Roma – non ridotti cioè alla scala di Zurigo – e del numero delle giornate di osservazione. Sono riportati nella tabella anche le medie annuali dei numeri caratteristici di Zurigo e i valori annuali del coefficiente k , per cui occorre moltiplicare i nostri numeri per ridurli alla scala internazionale.

3. Come già si è accennato, durante l'osservazione visuale per il computo dei numeri di Wolf, vengono anche annotate la qualità del *seeing* e le condizioni del bordo solare. Dal 1° gennaio 1949 si è stabilito di classificare la qualità dell'immagine del Sole con un numero variante da 1 a 5: e cioè con 1 quando l'immagine è pessima e con 5 quando è eccezionalmente buona ed è chiaramente visibile la granulazione fotosferica al centro del disco.

Queste osservazioni vengono effettuate generalmente a Monte Mario tra le ore 10 e le ore 13.

Riesaminando ora tutte le annotazioni riguardanti le osservazioni dal 1° gennaio 1949 a tutto dicembre 1954 ho ottenuto, per ogni grado della classifica, le seguenti percentuali:

5	4	3	2	1
8 %	32 %	37 %	13 %	10 %

Per quanto riguarda il bordo, si è stabilito di adoperare tre annotazioni: e cioè 1 per il bordo calmo o quasi calmo; 2 agitato; 3 molto agitato. Dall'esame di tutte le osservazioni ho ottenuto le seguenti percentuali relative alle diverse annotazioni:

1	2	3
75 %	19 %	6 %

Come si vede in base ai precedenti risultati, *le condizioni atmosferiche a Monte Mario sono molto favorevoli alle osservazioni solari*. Si ha infatti complessivamente un'altissima percentuale (77 %) di giorni in cui l'immagine del sole è buona o molto buona. Tali considerazioni, che si riferiscono all'ora media dell'osservazione e cioè alle ore 11 del mattino, fanno anzi supporre che nelle prime ore del mattino le condizioni siano ancora più favorevoli per le osservazioni solari.

4. Per il servizio fotografico è stato utilizzato, come abbiamo già detto ⁽³⁾, il fotoeliografo « Askania » a cannocchiale orizzontale e celostato ($F = m. 5$; $O = cm. 15$ e specchio del celostato di 30 cm. di apertura) ⁽⁴⁾; la scala è stata portata a 0,50 cm. per ogni primo d'arco, mediante un oculare Steinheil a quattro lenti (collocato tra il fuoco dell'obiettivo e la lastra fotografica) onde sopra la lastra si ha un'immagine solare di circa 16 cm. di diametro.

(3) Cfr. le « Memorie della Società Astronomica Italiana », vol. XX-4, pp. 287.

(4) Soltanto per un brevissimo periodo di tempo in cui questo strumento è stato spedito in Svezia in occasione dell'eclisse di sole del giugno 1954, le fotografie sono state ottenute all'equatoriale Merz generalmente adibito alla determinazione dei numeri caratteristici.

Le fotografie, sono state ottenute attraverso un filtro giallo su lastre fotomeccaniche « Ferrania », e le misure delle posizioni e delle aree delle macchie sono state effettuate mediante un apposito proiettore, costruito nell'officina

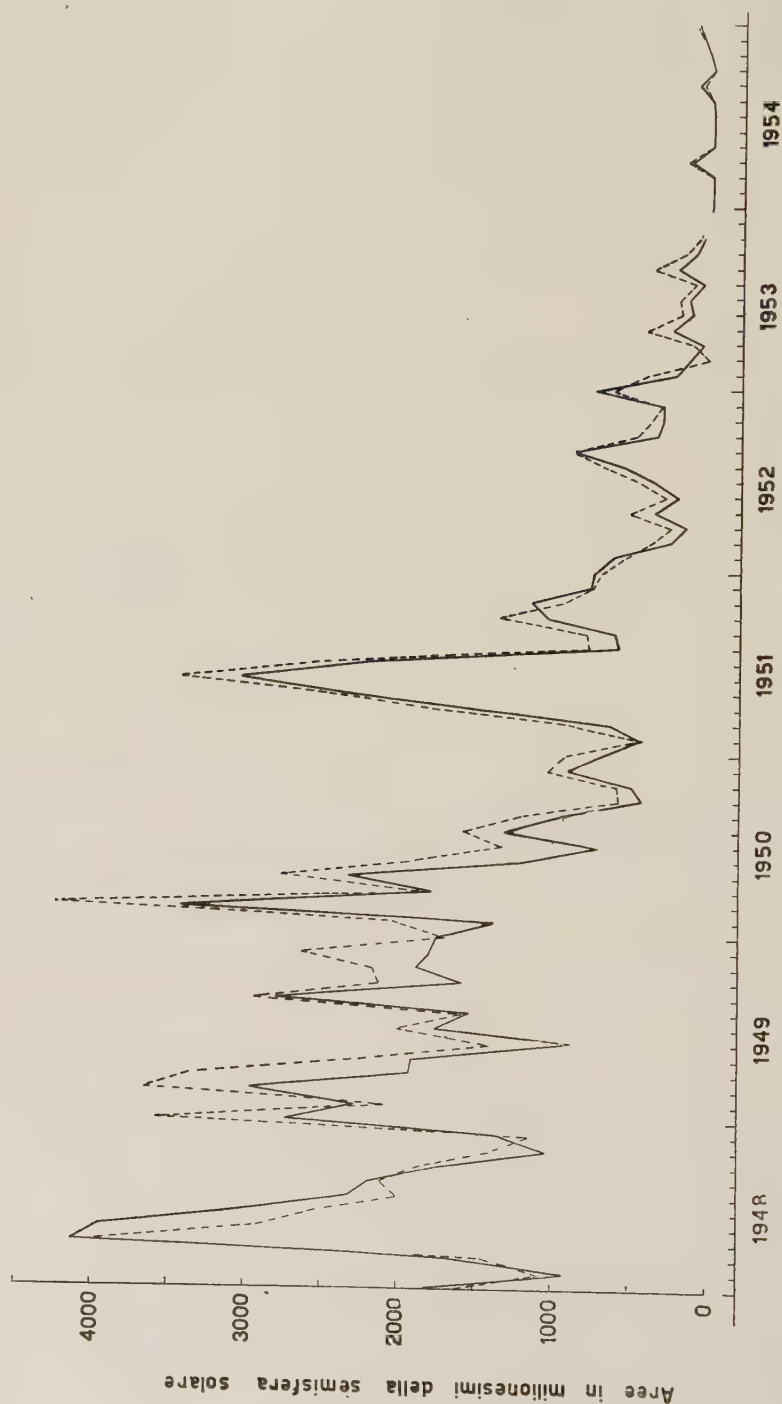


Fig. 1.

— medie mensili delle aree delle macchie solari osservate a Roma.
- - - - - medie mensili osservate a Washington.

dell'Osservatorio su disegno di M. Cimino. Ne omettiamo per brevità la descrizione, rimandando anche per l'esposizione del metodo della misura e della riduzione alle note già citate, e ricordando solo che l'unità da noi adottata

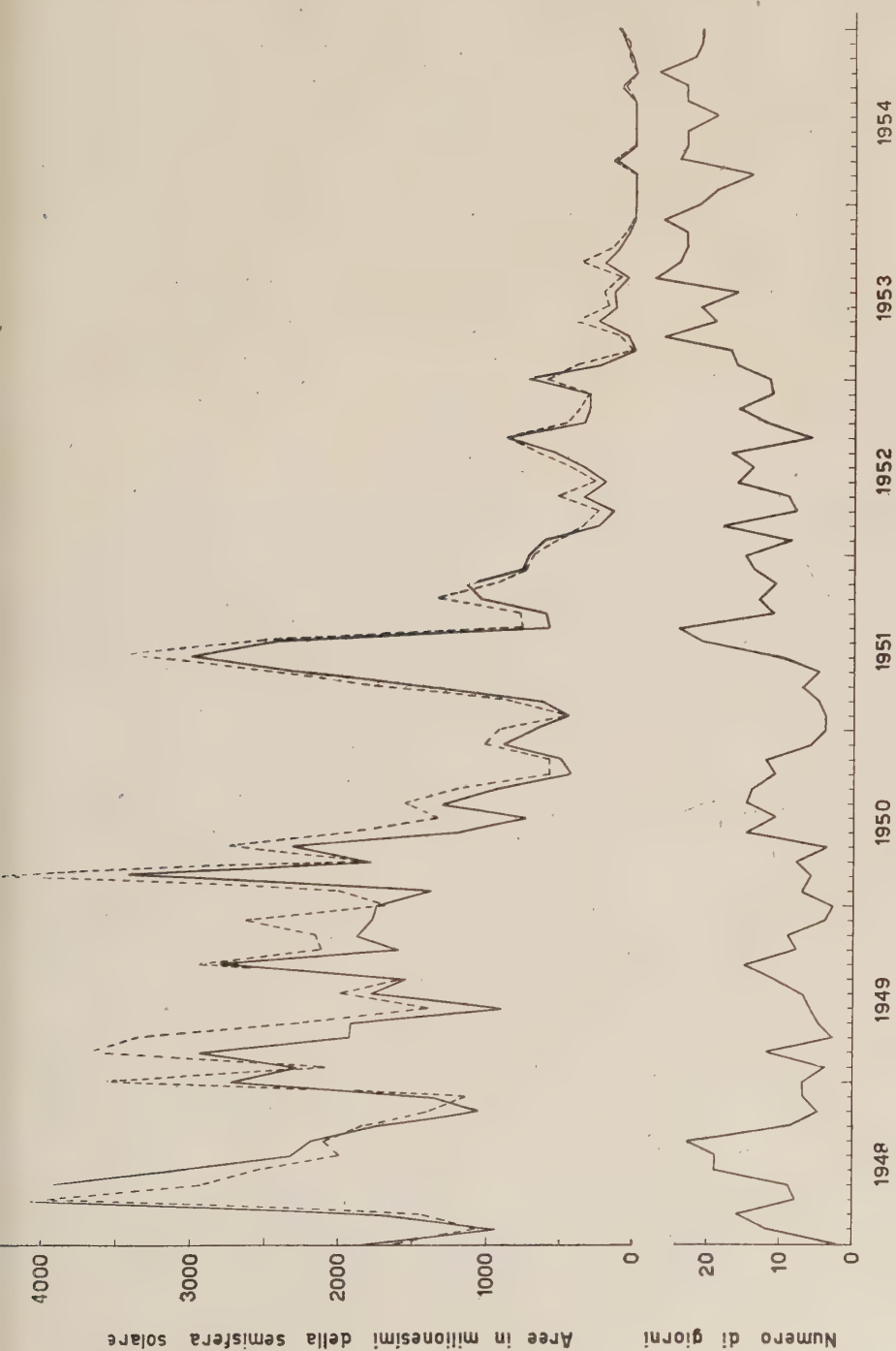


Fig. 2.

Grafico superiore: — medie mensili di Roma delle aree delle macchie solari.

----- medie mensili di Washington delle aree delle macchie solari per i giorni di osservazione di Roma.
 Grafico inferiore: Numero dei giorni di osservazione a Roma, in ciascun mese, dal gennaio 1948 al dicembre 1954.

per la misura delle aree è costituita da un piccolo quadratino corrispondente a circa 31,4 milionesimi del disco solare e avente sulla fotografia il lato di mm. 0,8 e la superficie di 0,64 mm². Si riesce così a stimare, con una certa sicurezza, la metà e anche la quarta parte di questa superficie e valutare quindi l'area delle macchie o di frazioni di macchie aventi superfici dell'ordine degli otto milionesimi del disco solare. Tuttavia nella stima delle aree nasce una lieve indeterminazione dovuta a cause personali e, in maggior misura, alla qualità dell'immagine e alla visibilità delle macchie, a seconda della loro posizione sul disco solare. L'errore, dovuto a quest'ultima causa, si ripercuote sulle aree effettive - corrette cioè dell'effetto di proiezione - onde, quando la distanza dal centro supera il 95 % del raggio, i risultati vanno accettati con qualche riserva. Con la misura di alcune fotografie, ripetuta da persone diverse e a distanza di tempo, si è valutato però che l'indeterminazione complessiva giornaliera nella stima delle aree effettive si mantiene quasi sempre al disotto e non supera in generale i 100 milionesimi della semisfera solare; soltanto in epoca di grande attività e in casi estremi si può arrivare a un errore dei 1000 milionesimi della semisfera solare ⁽⁵⁾.

5. Ciò posto, nella fig. 1, ho riportato i valori medi mensili delle aree effettive giornaliere, con la curva a tratto pieno. È bene evidente, con il progredire del ciclo, *una graduale diminuzione dell'attività solare*; sono da notare però anche ampie fluttuazioni a intervalli piuttosto regolari con massimi e minimi secondari abbastanza pronunciati. Un massimo relativo particolarmente elevato, in relazione all'epoca del ciclo, si è verificato nel maggio del 1951; epoca in cui si è avuta una ripresa temporanea piuttosto forte dell'attività solare. Naturalmente essendo le nostre osservazioni effettuate unicamente a Monte Mario, le medie sono ottenute con un numero limitato di misure e di conseguenza i valori di questi massimi e minimi possono risultare lievemente diversi da quelli reali. Tali leggere diversità sono evidenti dal confronto con la curva tratteggiata della fig. 1, che rappresenta i valori medi mensili delle aree date dall'Osservatorio di Washington, che le ha dedotte da una raccolta molto numerosa di osservazioni in località differenti.

Per meglio mettere in evidenza questa dipendenza degli scarti dal numero delle osservazioni, ho riportato nella fig. 2 i valori medi mensili delle aree solari per *Roma* e *Washington*, soltanto per le giornate comuni di osservazione. La curva disegnata in basso dà per ogni mese il numero di giorni con cui sono state ottenute le medie. Gli scarti relativi al 1949 e ai primi mesi del 1950, sono i più rilevanti; in tale periodo il confronto è basato però su pochi giorni di osservazione.

(5) Confrontando tra loro le osservazioni di Washington e Pulkovo si sono ottenuti ad esempio per il 14, 15, 16, 18 febbraio 1950 rispettivamente i seguenti scarti: 1141, 858, 609, 1210 milionesimi della semisfera solare.

Astronomia geodetica. — *Sur l'amortissement du mouvement libre du pôle instantané de rotation à la surface de la Terre.* Nota (*) di PAUL J. MELCHIOR, presentata dal Corrisp. G. CECCHINI.

1. L'existence d'un amortissement du mouvement libre du pôle est fréquemment mise en avant pour tenter d'expliquer les variations d'amplitude et de période que subit ce mouvement. Ainsi, Marcel Brillouin [1] estimait-il que « les courbes... suggèrent l'idée d'un mouvement naturellement amorti, qui subit des lancés nouveaux de temps en temps ». Cette manière de voir a été suivie successivement par Dyson [2] Jeffreys [3] et Young [6] qui ont tenté une évaluation numérique du temps de relaxation à partir des courbes publiées par le Service International des Latitudes.

Pour ce faire, ils ont admis que le mouvement du pôle obéissait au système d'équations:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} + \lambda x = -\chi (y - \eta) \\ \dot{y} + \lambda y = \chi (x - \xi) \end{cases}$$

où (x, y) sont les coordonnées du pôle instantané de rotation, (ξ, η) celles du pôle instantané d'inertie, χ la vitesse du mouvement libre chandlérien du pôle de rotation et où $\lambda x, \lambda y$ sont des termes *qui ont été inclus pour obtenir la représentation d'un mouvement amorti* (Jeffreys [3], p. 142; Young [4], p. 825); λ est donc l'inverse du temps de relaxation.

Il est intéressant de calculer les intégrales de ces équations dans le cas où le mouvement annuel du pôle instantané d'inertie est elliptique, soit lorsque

$$(2) \quad \xi + i\eta = ne^{iat} + n'e^{-iat}.$$

Les équations (1) s'écriront alors

$$(3) \quad (x + iy)' - (i\beta - \lambda)(x + iy) = -i\beta(\xi + i\eta)$$

et tenant compte de (2) l'intégrale sera:

$$(4) \quad x + iy = Re^{-\lambda t} e^{i\beta t} - me^{iat} + m'e^{-iat}$$

avec

$$(5) \quad \begin{cases} m = \frac{1}{\tau - 1 - i\lambda\tau} n = \frac{(\tau - 1) + i\lambda\tau}{(\tau - 1)^2 + \lambda^2 \tau^2} n = An + iBn \\ m' = \frac{1}{\tau + 1 + i\lambda\tau} n' = \frac{(\tau + 1) - i\lambda\tau}{(\tau + 1)^2 + \lambda^2 \tau^2} n' = Cn' + iDn' \end{cases}$$

si l'on admet pour unité de temps l'année tropique et $2\pi/\alpha = T = 1$.

Dans ces conditions, le mouvement libre s'amortit suivant la loi $e^{-\lambda t}$. Nous reviendrons plus loin sur quelques considérations numériques relatives à l'amplitude du mouvement forcé.

2. K. Ledersteger, admettant un amortissement de cette forme a trouvé [7] $\lambda = 0,018$, soit un temps de relaxation de 55 ans.

Dyson, Jeffreys et plus récemment Young ont appliqué le schéma d'auto-régression de Yule en se servant des équations (1) pour lier par autocorrélation les coordonnées xy publiées par le Service International des Latitudes. Les résultats qu'ils ont obtenus ainsi paraissent assez déroutants car ils indiquent une durée extrêmement courte pour le temps de relaxation: environ 14 ans d'après Jeffreys, 3 ans pour Dyson et Young. S'il en était ainsi, on s'expliquerait mal la lenteur du relèvement du bloc finno-scandinave dont l'étude a conduit Vening Meinesz notamment à un coefficient de viscosité $\nu = 4 \cdot 10^{22}$ poises. Si l'on adopte la relation $\nu = \tau \mu$, renfermée implicitement dans (1) comme nous allons le montrer plus loin, on trouve en effet à partir de $\mu = 12 \cdot 10^{11}$ cgs [9]: $\tau = 800$ ans. Il faut d'ailleurs bien noter qu'un phénomène séculaire, tel que l'étude du rétablissement de l'équilibre en Scandinavie se prête incomparablement mieux à la détermination du coefficient de viscosité de la matière terrestre qu'un phénomène à période aussi courte que le mouvement chandlérien. Mais de plus, dans l'étude la plus récente et la plus complète, Young assigne pour la période du mouvement chandlérien la durée de 462 jours. Cette valeur est en contradiction totale avec les valeurs obtenues par toutes les autres méthodes d'analyse et elle conduit à une valeur du second nombre de Love $k = 0,320$ qui diverge considérablement de celle conclue à partir des quatre procédés indépendants de mesure des marées terrestres [9]: $k = 0,19$. Ces contradictions ont d'ailleurs été relevées [6]. D'autre part on ignore tout des forces considérables qui seraient capables d'entretenir les oscillations du pôle si celles-ci étaient fortement amorties [11, pp. 198-199].

3. On ne peut songer à attribuer l'origine de ces désaccords à la méthode d'analyse basée sur le schéma de Yule, mais on peut se demander s'il est légitime de représenter le mouvement du pôle par les équations fondamentales (1). Nicolini a montré que l'autorégression était perturbée en ce sens que la période moyenne vers laquelle on tend est variable [5]. Ces équations (1) ont été établies en *ajoutant* un terme aux équations de Newcomb de manière à trouver un mouvement amorti suivant les conceptions mécaniques habituelles. Mais il faut chercher le sens physique de ces équations: on y trouve d'une part la période de Chandler qui est liée à la notion d'élasticité pure et d'autre part un terme d'amortissement lié à la notion de viscosité pure. Ces équations impliquent donc l'existence d'une relation liant ces deux notions. On peut la trouver simplement comme suit. La mécanique céleste, applicable à un corps idéal, indéformable, fournit les équations d'Euler:

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x} = -\beta y \\ \dot{y} = \beta x \end{cases}$$

où $\beta = \frac{C-A}{A} \omega$ (A, A, C moments principaux d'inertie de la Terre) est la période d'Euler, soit environ 304 jours solaires moyens.

Si l'on admet que la Terre se déforme au cours de ce mouvement, on est conduit à introduire en première approximation (d'ailleurs tout à fait suffisante) de petits produits d'inertie dans les équations. Ces produits d'inertie sont proportionnels aux coordonnées (ξ, η) du pôle instantané d'inertie devenu mobile par suite de ces déformations et les équations deviennent ainsi

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{x} = -\beta (y - \eta) \\ \dot{y} = \beta (x - \xi) \end{cases}$$

Newcomb a admis que le déplacement du pôle d'inertie (qui traduit la déformation subie) est directement proportionnel à la distance qui sépare le pôle de rotation instantané du pôle moyen, laquelle distance provoque les tensions appliquées à la Terre. Ceci s'exprime par

$$(8) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{k} \xi \\ y = \frac{1}{k} \eta \end{cases}$$

et traduit en fait le postulat de Hooke.

Introduisant les relations (8) dans (7) on trouve

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x} = -\beta (1 - k) y \\ \dot{y} = \beta (1 - k) x \end{cases}$$

équations du mouvement chandlérien ($\chi = \beta (1 - k)$).

Si par contre on avait adopté le postulat de Newton, fondement de la théorie de la viscosité:

$$(10) \quad \begin{cases} x = \lambda_1 \xi \\ y = \lambda_1 \eta \end{cases}$$

on aurait, en vertu de (6)

$$(11) \quad \begin{cases} \xi = \lambda_2 y \\ \eta = -\lambda_2 x \end{cases}$$

$$\lambda_2 = (\beta \lambda_1)^{-1}$$

et les équations (7) deviendraient

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{x} + \lambda x = -\beta y \\ \dot{y} + \lambda y = \beta x \end{cases}$$

$$(\lambda = \lambda_1^{-1})$$

qui représentent un mouvement eulérien amorti.

On voit donc que pour obtenir les équations (1), il faut admettre comme postulat fondamental relatif à la loi de déformation une combinaison des formes (8) de Hooke et (10) de Newton, soit

$$(13) \quad \begin{cases} kx + \lambda \int x dt = \xi \\ ky + \lambda \int y dt = \eta \end{cases}$$

ou bien, en vertu de (6) encore

$$(14) \quad \begin{cases} \xi = kx + \frac{\lambda}{\beta} y \\ \eta = ky - \frac{\lambda}{\beta} x \end{cases}$$

Les relations (13) traduisent le postulat de Maxwell-Butcher qui définit la notion d'élastico-viscosité.

Ce postulat de Maxwell-Butcher ne traduit pas un fait d'observation et n'est au contraire qu'une combinaison mathématique simple des postulats de Hooke et de Newton. Au contraire, il implique une relation entre le module de rigidité μ et le coefficient de viscosité ν faisant évidemment intervenir une grandeur ayant la dimension d'un temps, et appelée temps de relaxation τ ; cette relation

$$(15) \quad \nu = \mu \tau$$

a été contestée par Birch et Bancroft à la suite d'expériences sur l'anhydride borique vitreux [11, p. 219].

De même, Filon et Jessop ont trouvé que pour le celluloïde, la déformation sous tension constante obéit à la loi $S = S_0 + at^{1/3} + bt$ ce qui est en accord avec des résultats obtenus par Andrade pour les métaux [10].

Les équations (1) sont donc discutables et l'on peut penser que les valeurs trop faibles trouvées pour le temps de relaxation proviennent de ce que l'on a imposé aux courbes analysées un schéma préconçu qui n'est certainement pas celui auquel elles obéissent. Dans ces conditions le symbole χ ne correspond plus à la définition des nombres de Love et les nombres λ et χ ne donnent qu'une représentation mathématique conventionnelle plus ou moins satisfaisante du phénomène.

4. On peut aussi se demander si la représentation donnée par les formules (1) est satisfaisante en ce qui concerne le mouvement forcé annuel dont les constantes sont données par les relations (5). Posant

$$\begin{array}{lll} An + Cn' = H & Bn + Dn' = L & \varphi = \text{arc. tg } \frac{K}{H} \\ Bn - Dn' = K & An - Cn' = M & \psi = \text{arc. tg } \frac{L}{M} \end{array}$$

on aura, pour le mouvement forcé seul:

$$(16) \quad x + iy = \sqrt{L^2 + M^2} \cos(\alpha + \pi + \psi) + i \sqrt{H^2 + K^2} \sin(\alpha + \pi + \varphi).$$

Connaissant les valeurs de n et n' tirées des observations géophysiques:

$$n = 0'',014 \quad n' = 0'',026 \quad [8]$$

et prenant pour valeur de la période de Chandler $\tau = 1,2$ an (valeur qui correspond aux valeurs observées des axes de l'ellipse annuelle décrite par le pôle de rotation: $a = 0'',082$ $b = 0'',058$) on pourra calculer la grandeur de ces axes ainsi que le déphasage pour diverses valeurs de la constante

d'amortissement. Le déphasage θ par rapport au mouvement du pôle d'inertie est donnée par la formule

$$(17) \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{b^2 \sin 2\psi - a^2 \sin 2\varphi}{a^2 \cos 2\varphi - b^2 \cos 2\psi}.$$

$\zeta =$	3	5	10	20	∞ années
A	1,00	2,05	3,68	4,69	5
B	2,00	2,46	2,21	1,38	0
C	0,440	0,449	0,453	0,454	0,455
D	0,08	0,05	0,02	0,01	0
H	0'',025	0'',041	0'',063	0'',076	0'',082
K	0,026	0,033	0,030	0,019	0
L	0,030	0,035	0,032	0,019	0
M	0,003	0,017	0,039	0,052	0,058
a	0'',036	0'',053	0'',070	0'',078	0'',082
b	0,030	0,039	0,050	0,055	0,058
θ	142°	157°	166°	172°	180°

On voit ainsi directement qu'il ne sera pas possible d'obtenir une représentation correcte du mouvement du pôle avec un temps de relaxation inférieur à 20 ans. C'est bien ce qu'a constaté Young [4] pour la période 1925-1930: cet auteur cependant a trouvé pour $\lambda = 0$ un accord en amplitude mais non en phase: nous pensons que ceci provient de ce qu'il a adopté pour tout cet intervalle la période de 1,20 an qui est trop longue (on trouve communément pour cet intervalle une période de 1,15 an).

La table ci-dessus montre clairement qu'il doit être impossible de conclure à la valeur du temps de relaxation à partir des observations du mouvement du pôle, si ce temps est compris entre 20 ans et l'infini. Le mouvement du pôle est un mouvement à trop courte période et ses caractéristiques sont connues avec une précision trop faible que pour rendre possible la détermination de ce facteur entre ces limites qui sont vraisemblablement celles dans lesquelles il est compris.

5. En concluant, nous citerons ces quelques lignes empruntées au récent ouvrage de J. Coulomb [11, p. 220]: «... Ni qualitativement, ni quantitativement, ν , τ et ζ ainsi déterminés ne semblent pas avoir entre eux de relation simple» et «... la viscosité aurait donc une signification différente suivant que la rigidité est faible ou élevée et les équations des liquides vis-

queux deviendraient suspectes pour des viscosités supérieures à 10^{10} poises par exemple ». L'application de ces équations au mouvement du pôle nous conduit à la même conclusion.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] MARCEL BRILLOUIN, *Mouvement du pôle à la surface de la Terre*. (« C. R. », Paris, tome 143, pp. 437-438, 1906).
- [2] F. W. DYSON, *The Variation of Latitude*. « Bull. Calcutta Math. Soc. », XX, 1938, pp. 23-30.
- [3] H. JEFFREYS, *The Variation of Latitude*. « M. N. », 100, pp. 139-155, 1940).
- [4] A. YOUNG, *The contribution of seasonal movements of air masses to the variation of latitude*. (« Acad. R. Belgique, Bull. Cl. Sc. », XXXVIII, 1952, pp. 824-837).
- [5] TITO NICOLINI, *Serie oscillatorie ad autoregression disturbata e moto polare di Chandler*. (« Accad. Lincei », ser. VIII, vol. VI, pp. 329-341, 1949 ou « Osserv. Astr. Capodimonte-Napoli II », vol. 3, n. 10).
- [6] A. YOUNG, (« The Observatory », 75, n. 884, pp. 2-3, 1954).
- [7] K. LEDERSTEGE, *Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung*. (« Oesterreichische Zeitschr. für Vermess. », Sonderheft 7, p. 32, 1949).
- [8] PAUL J. MELCHIOR, *Contribution à l'étude des mouvements de l'axe instantané de rotation par rapport au globe terrestre*. (« Observatoire Royal de Belgique », Monographies n. 3, 1954).
- [9] PAUL J. MELCHIOR, *Les marées terrestres*. (« Observatoire Royal de Belgique », Monographies n. 4, 1954).
- [10] H. JEFFREYS, *Plasticity and Creep in Solids*. (« Proc. R. Soc. London A. », 138, pp. 283-297, 1932).
- [11] J. COULOMB, *La constitution physique de la Terre* (Albin Michel, Paris 1952).

Cristallografia fisica. — *Deux hypothèses sur les causes de la formation de la bifeuille de Popoff*. Nota II di MATTHIAS MATSCHINSKI, presentata (*) dal Socio E. ONORATO.

6. Dans la précédente Note ⁽⁸⁾ nous avons décrit les deux hypothèses qu'on peut faire sur les formations sphériques en général et spécialement sur la bifeuille. Nous avons exposé la première hypothèse (l'existence de deux vitesses différentes de cristallisation) avec le détail mathématique nécessaire. Mais, comme nous l'avons indiqué, cette hypothèse n'explique pas les formations sphériques et se limite uniquement à l'explication de la bifeuille, sans parler des autres inconvénients (voir la note précédente). En décrivant la deuxième hypothèse (l'existence d'un réseau cristallin cylindrique ou sphérique sous l'influence des pressions), nous nous sommes borné dans la Note précédente seulement aux résultats généraux et descriptifs.

Ces résultats sont représentés sur les figs. 6a et 6b. On voit facilement qu'un élément de l'anneau d'un cylindre ou d'une sphère peut, en

(*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(8) Questi « Rendiconti », vol. XIX, fasc. 1-2, pp. 63-67 (1955).

se juxtaposant, remplir l'espace, soit avec des lacunes (triangles blancs sur les figs. 6a et 6b), soit avec des excédents (hachures). Ces excédents créent la pression. La zone de pression aura lieu soit pour les rayons plus grands (croissance vers l'extérieur), soit pour les rayons plus petits (croissance vers l'intérieur) que le rayon correspondant à l'élément - «brique». (La flèche sur les figs. 6a et 6b indique le sens de croissance).

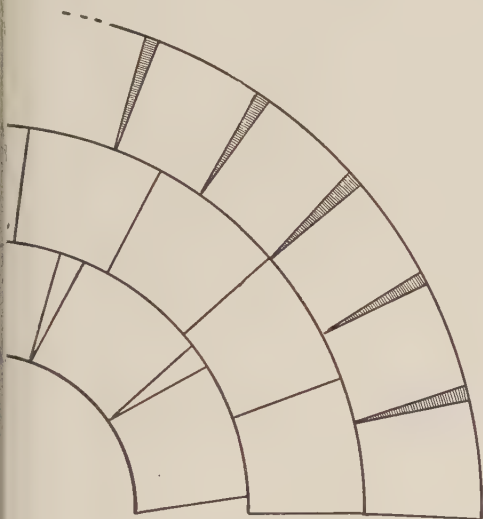


Fig. 6a.

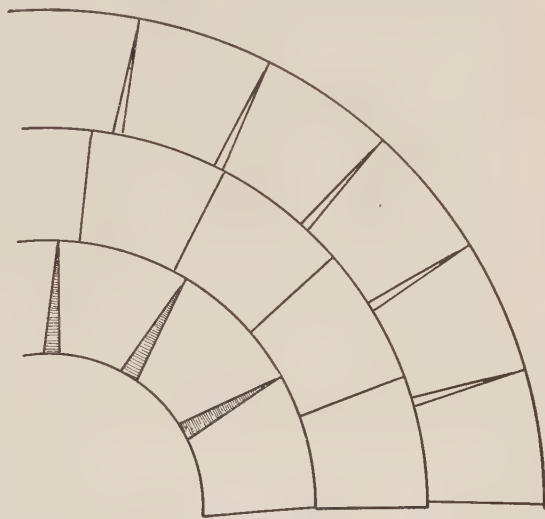


Fig. 6b.

Voyons maintenant comment on peut exprimer ces résultats sous une forme mathématique. Soit $f(r)$ la longueur totale correspondant à une bande de rayon r composée d'éléments non encore comprimés (ou non encore distendus). Se bornant à la seule région de compression et supposant une répétition constante des mêmes éléments, on obtiendra naturellement

$$(6) \quad \frac{f(r) - 2\pi r_0}{r - r_0} = \text{const} = \alpha > 2\pi,$$

où α est une constante cristalline de la substance. Pour cet examen général il est préférable de ne formuler pour le moment aucune hypothèse détaillée sur l'élément de remplissage de l'espace examiné par nous. Cet élément peut être constitué par un menu cristal, par un élément géométrique du cristal, par un élément du réseau atomique ou, enfin, par un élément infiniment petit de l'espace. Tout l'exposé qui suit se rapporte d'une manière entièrement égale à toutes ces quatre possibilités.

Revenant à l'équation (6), on voit qu'elle peut être présentée sous la forme:

$$(7) \quad f(r) = 2\pi r_0 + \alpha(r - r_0) > 2\pi r.$$

La longueur $f(r)$, ne trouvant pas assez de place dans le lieu $2\pi r$ présent, sera comprimée. Cette compression relative

$$(8) \quad \frac{f(r) - 2\pi r}{2\pi r} = \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 1 \right) \frac{r - r_0}{r}$$

crée une pression (si l'on néglige provisoirement le changement en direction radiale)

$$(9) \quad p = E \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 1 \right) \frac{r - r_0}{r}$$

laquelle se trouve ainsi être fonction de r , ce qui est représenté dans la

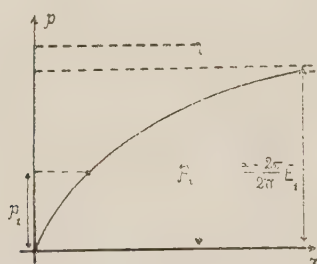


Fig. 7.

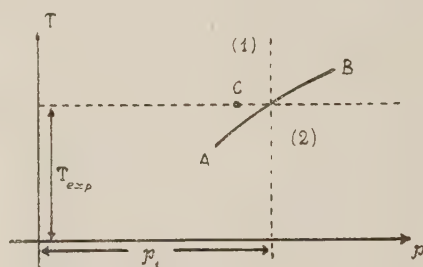


Fig. 8.

figure 7. Dans le cas « sphérique » on écrit $2\pi r$, parce qu'on n'a plus de place; dans la théorie de la cristallisation libre de la deuxième phase il est plus exact de remplacer $2\pi r$ par la longueur du segment curviligne $A_r B_r C_r$ (voir fig. 9). Cependant pour la première approximation on peut conserver même ici (voir § 8) l'expression $2\pi r$.

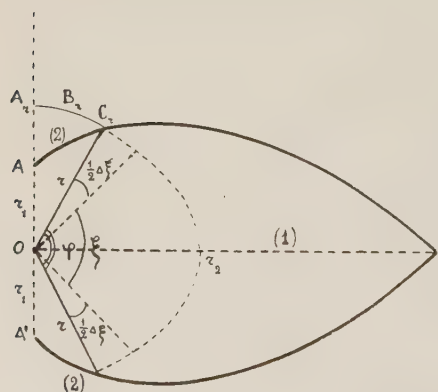


Fig. 9.

7. Considérons maintenant le diagramme des états (fig. 8) sur lequel on a représenté, par la ligne AB, la ligne d'équilibre de deux phases, dont la première est supposée se trouver en haut et à gauche et la seconde à droite et en bas. Supposons que l'expérience soit effectuée à la température T_{exp} , dans des conditions initiales correspondant au point C. Maintenant la température, comme il a été indiqué plusieurs fois, constante, déplaçons-nous, après avoir atteint la sphère de rayon r_0 , en accord

avec la formule (9), sur le diagramme des états, dans la direction indiquée par la flèche. Lorsqu'on atteindra une pression égale à p_i (voir la fig. 8), les conditions de coexistence des deux phases seront atteintes et il naîtra la deuxième phase.

Le problème se réduit ainsi à l'obtention de la pression nécessaire p_1 . Sur la fig. 7 à droite la valeur maxima de la pression possible est représentée d'après la formule (9). Ainsi, si a lieu la condition

$$(10 a) \quad \frac{\alpha - 2\pi}{2\pi} \cdot E_1 < p_1$$

la deuxième phase ne naîtra pas et il croîtra un spérolithe ordinaire, comme cela s'observe souvent. Par contre, au cas où serait réalisée la condition

$$(10 b) \quad p_1 < \frac{\alpha - 2\pi}{2\pi} E_1,$$

il naîtra la deuxième phase et l'on verra se former une bifeuille. En d'autres termes, les conditions (10 a) et (10 b) sont des conditions critiques d'existence de ces deux phases (ou, plus simplement, formes) cristallines. Vu que dans le présent article nous ne nous occupons que de la bifeuille, nous supposons dans l'exposé ci-dessous qu'a lieu la condition (10 b), autrement dit qu'on peut écrire l'équation

$$(11) \quad p_1 = E_1 \cdot \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 1 \right) \frac{r - r_0}{r_1},$$

où r_1 désigne le rayon du cercle (de la sphère) correspondant à la première apparition de la deuxième phase, c'est-à-dire, aux points A et A' de la figure 9.

Il est facile de démontrer par des raisonnements thermodynamiques habituels que cette p_1 ne variera plus pendant la croissance ultérieure de la bifeuille. En effet, si à quelque moment la pression, pour quelque cause accidentelle, venait à baisser, la deuxième phase ne se formera plus, tandis que la première phase, en vertu de (9), provoquera une augmentation spontanée de pression, ce qui amènera le rétablissement d'une pression égale à p_1 . Le système de deux phases réagit d'une manière analogue également à une augmentation accidentelle de pression, ramenant cette dernière également à la même p_1 . C'est cette condition importante de constance de pression qui permet de calculer théoriquement la forme de la bifeuille.

8. La deuxième phase née aux points A et A' (fig. 9) doit, pendant sa croissance, occuper des parties angulaires toujours plus étendues du cercle, mais de telle façon que la pression provoquée par le remplissage de l'espace par les éléments cristallographiques n'augmente plus.

Ainsi, pour une détermination théorique de la forme de la bifeuille, il reste seulement à formuler les conditions de changement de la pression lors d'une croissance simultanée des deux phases, ainsi que nous l'avons fait plus haut [formule (9)] pour la croissance d'une seule phase. La méthode de calcul sera la même. Ici également, nous négligerons pour le moment la dilatation élastique en direction radiale (voir à ce sujet § 9), en nous bornant à l'excédent géométrique ayant lieu lors d'une répétition des bandes circulaires (couches sphériques). La signification des lettres ressort de la figure 9:

ξ est l'angle qui serait occupé par la première phase, au cas où sa cristallisation se poursuivrait sans que prit naissance la deuxième phase, c'est-à-dire avec l'élévation de pression; $\Delta\xi$ est l'accroissement de cet angle ξ du fait que la croissance n'a pas lieu sous une pression en voie d'augmentation, mais sous une pression constante; $\varphi = \xi + \Delta\xi$ est l'angle occupé par la première phase effectivement, c'est-à-dire à la condition d'une croissance simultanée avec la deuxième phase; α_1 et α_2 sont des constantes matérielles caractérisant géométriquement les formes des éléments: généralement égales aux:

$$(12) \quad \frac{f_1(r) - 2\pi r_0}{r - r_0} = \alpha_1 \quad \text{et} \quad \frac{f_2(r) - 2\pi r_0}{r - r_0} = \alpha_2.$$

En notre cas les $f_1(r)$ et $f_2(r)$ n'occupent pas le cercle entièrement, mais seulement les parties 2ξ et $2(\pi - \xi)$ avant l'égalisation des pressions et les parties 2φ et $2(\pi - \varphi)$ après cette égalisation; c'est pourquoi les (12) s'écrivent:

$$(12a) \quad \frac{f_1(r) - 2\xi r_0}{r - r_0} = \frac{\xi}{\pi} \alpha_1 \quad \text{et} \quad \frac{f_2(r) - 2(\pi - \xi) r_0}{r - r_0} = \frac{\pi - \xi}{\pi} \alpha_2.$$

En analogie avec le passage des (12) aux (12a) les compressions relatives au lieu de:

$$(13) \quad \frac{f_1(r) - 2\pi r}{2\pi r} \quad \text{et} \quad \frac{f_2(r) - 2\pi r}{2\pi r}$$

s'écrivent:

$$(13a) \quad \frac{f_1(r) - 2\xi r}{2\varphi r} \quad \text{et} \quad \frac{f_2(r) - 2(\pi - \xi) r}{2(\pi - \varphi) r}$$

parce que nos phases au lieu d'occuper les parties 2ξ et $2(\pi - \xi)$ auxquelles elles correspondent selon les lignes de croissance, occupent effectivement 2φ et $2(\pi - \varphi)$. Enfin, soient E_1 et E_2 des constantes élastiques de la première et deuxième phase. Elles déterminent les valeurs des pressions créées par les compressions (13a):

$$(14) \quad p_1 = E_1 \frac{\xi}{\varphi} \left(\frac{\alpha_1}{2\pi} - 1 \right) \frac{r - r_0}{r} \quad \text{et} \quad p_1 = E_2 \frac{\pi - \xi}{\pi - \varphi} \left(\frac{\alpha_2}{2\pi} - 1 \right) \frac{r - r_0}{r}.$$

En introduisant les abbreviations:

$$(14a) \quad \varepsilon_1 = E_1 \left(\frac{\alpha_1}{2\pi} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = E_2 \left(\frac{\alpha_2}{2\pi} - 1 \right),$$

on peut écrire les (14) sous la forme plus compacte:

$$(14b) \quad p_1 = \varepsilon_1 \frac{\xi(r - r_0)}{\varphi r} \quad \text{et} \quad p_1 = \varepsilon_2 \frac{(\pi - \xi)(r - r_0)}{(\pi - \varphi)r}.$$

Dans ces formules α_1 et α_2 ou E_1 et E_2 peuvent être respectivement égaux, mais, bien entendu, pas les deux à la fois, car alors les deux phases seraient identiques. Considérant dans (14) p_1 comme une grandeur constante et connue, on a deux équations pour déterminer deux grandeurs: φ et ξ . La

dernière étant pour le moment sans importance pour nous, nous omettons son expression explicite; quant à φ , on a d'après (14 b)

$$(15) \quad \varphi = \frac{\pi \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \frac{\pi \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\rho_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \cdot \frac{r - r_0}{r}$$

expression caractérisant la corrélation entre l'angle φ et la distance r sur la ligne de séparation des deux phases, soit une fonction déterminant la forme de la bifeuille. La formule (15) peut être facilement transformée, si nous introduisons les constantes géométriques de la bifeuille: r_1 et r_2 (voir les figs. 3 et 9):

$$(15 a) \quad \frac{\varphi}{\pi} + \frac{r_1}{r_2 - r_1} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \cdot \frac{1}{r}$$

où:

$$(15 b) \quad r_1 = \frac{\varepsilon_1 r_0}{\varepsilon_1 - \rho_1} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{\varepsilon_2 r_0}{\varepsilon_2 - \rho_1}.$$

Renvoyant la discussion de ces résultats au § 10, voyons d'abord les conséquences de la supposition faite jusqu'ici relative à l'absence de réactions élastiques en direction radiale.

9. Cet élargissement radial du complexe mono- ou biphasé en voie de cristallisation (sphérolithe ou bifeuille de Popoff) est déterminé, d'une part, par le coefficient de Poisson de la substance à l'examen et, d'autre part, par les conditions existant à la surface. Considérant le complexe en voie de cristallisation approximativement comme une sphère et introduisant les coordonnées sphériques, ainsi qu'une réalisation approximative de la symétrie sphérique par les conditions (v et w composantes du déplacement tangentiel)

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad v = w = 0$$

et supposant, enfin, absentes les composantes tangentielles du tenseur des tensions

$$(17) \quad X_{r\vartheta} = X_{\vartheta\vartheta} = X_{\vartheta r} = 0$$

on a les équations de la théorie de l'élasticité sous forme de

$$(18) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} (X_{rr} - X_{\vartheta\vartheta}) \quad ; \quad X_{rr} = 2G \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2G}{m-2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) ;$$

$$X_{\vartheta\vartheta} = X_{\vartheta\vartheta} = X_0 + 2G \frac{u}{r} + \frac{2G}{m-2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right)$$

où X_{rr} , $X_{\vartheta\vartheta}$ et $X_{\vartheta\vartheta}$ désignent les composantes normales du tenseur des tensions, u le déplacement radial, G et m des constantes élastiques et, enfin, X_0 les tensions initiales calculées plus haut. Réunissant les équations (18) on obtient l'équation suivante servant à déterminer l'allongement radial:

$$(19) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2G \frac{m-1}{m-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u \right) - \frac{2}{r} X_0.$$

Cette équation a comme solutions indépendantes de t les intégrales \bar{u}_r de l'équation différentielle ordinaire

$$(20) \quad \bar{u}_r'' + \frac{2}{r} \bar{u}_r' - \frac{2}{r^2} \bar{u}_r = \frac{1}{G} \frac{m-2}{m-1} \frac{X_0}{r}$$

c'est-à-dire

$$(20 a) \quad \bar{u}_r = \psi + C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$$

où ψ est une solution particulière de (20) et C_1, C_2 sont des constantes d'intégration. On a d'autres solutions de (19) en ajoutant à \bar{u}_r des fonctions de la forme $u_{rk} \cos kt$ où u_{rk} doit vérifier l'équation

$$u_{rk}'' + \frac{2}{r} u_{rk}' + \left(\lambda^2 - \frac{2}{r^2} \right) u_{rk} = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda^2 = k^2 \frac{\rho}{2G} \frac{m-2}{m-1}$$

d'où la solution générale est

$$u = \bar{u}_r + \sum_k u_{rk} \cos (kt + \varphi).$$

Dans (20 a) on doit poser $C_2 = 0$, car \bar{u}_{rk} doit être finie; par contre C_1 (et, le cas échéant, les constantes d'intégration de u_{rk}) doivent être déterminées d'après les conditions à la surface.

Ces conditions sont très difficiles à formuler. Comme il ne s'agit pas d'ordinaire de cristallisation dans une solution, mais bien dans une masse fondue, les pressions peuvent être faibles dans le champ de vision d'un microscope, tout en étant très élevées dans les conditions naturelles (diorites sphériques corses).

Ce qui est toutefois essentiel, c'est que, ainsi que le montre le calcul élémentaire exposé dans ce paragraphe, les changements de r ainsi obtenus, soit les valeurs de u , sont très petits. Strictement parlant, pour obtenir la forme exacte de la bifeuille on devrait, dans toutes les formules des paragraphes précédents exprimant l'angle φ en fonction de r , remplacer r par $r + u(r)$. Cependant, comme nous venons de le montrer, cette correction est, premièrement, très légère et, deuxièmement, assez incertaine. On peut, en conséquence, estimer que la formule (15) exprime la forme de la bifeuille avec une précision très supérieure à celle réalisable dans la pratique.

10. La théorie ici développée reproduit les faits expérimentaux concernant des bifeuilles très exactement, bien plus exactement que les formules de Choubnikov, ne fût-ce que du fait qu'elles ne contiennent pas deux, mais bien six constantes expérimentales. Ces constantes sont: α_1, α_2 et r_0 - caractéristiques géométriques des éléments cristallographiques de la première et deuxième phase; E_1 et E_2 - coefficients élastiques de ces deux phases, et, enfin, p_1 - pression critique (voir fig. 8) au moment de l'apparition, à la température donnée, de la deuxième phase. La grandeur $r_1 = OA = OA'$ n'est pas, dans les hypothèses admises par nous, une constante indépen-

dante, mais aussi qu'il a été montré ci-dessus, elle est liée par la formule (15 b) à d'autres constantes.

Cependant les formes des bifeuilles sont caractérisées, comme il est visible de (15 a) et comme il a été dans la théorie de Choubnikov, seulement par deux constantes (p. ex. r_1 et r_2) qui peuvent être déterminées à partir de la forme de la ligne contournante la bifeuille indépendamment l'une de l'autre. Pour déterminer les autres constantes on doit utiliser non seulement des mesures purement géométriques des formes des bifeuilles, mais aussi d'autres mesures liées aux propriétés physiques des deux phases formant la bifeuille. Enfin, dans le cadre de la théorie ici proposée, les deux constantes (r_1 et r_2) caractérisant d'après la formule (15 a) la forme ont des valeurs physiquement bien déterminées (voir (15 b)), tandis que, des deux constantes du calcul de Choubnikov, seule la constante $C = \sqrt{k^2 - 1}$ [voir (5)] a un sens physique, l'autre (la constante a), n'étant que la constante d'intégration, a un sens purement mathématique, sans être liées par des lois physiques quelconques. Enfin, si l'on abandonne l'hypothèse faite plus haut (que les deux r_0 soient les mêmes pour les deux phases considérées), on obtient les courbes théoriques contenant *quatre* constantes déterminables expérimentalement.

Or, le choix de telle ou telle autre hypothèse ne doit pas dépendre uniquement de la coïncidence des courbes théoriques avec les contours effectivement photographiés d'une bifeuille; cette coïncidence a été déjà assez bonne pour la formule de Choubnikov. Ce qui est essentiel, c'est la possibilité ou l'impossibilité d'expliquer le moment de naissance de la deuxième phase (positions des points A et A' et symétrie de ces positions). Cette dernière circonstance, qui avait constitué pour les calculs de Choubnikov une pierre d'achoppement (voir § 4), loin de présenter un obstacle pour l'hypothèse ici développée, en est, à proprement parler, le point de départ.

Enfin, l'hypothèse ici présentée, loin d'être une hypothèse spéciale s'appliquant à la seule bifeuille, comme l'était l'hypothèse antérieure, peut servir de point de départ pour construire une théorie de n'importe quelles formations à symétrie sphérique ou cylindrique, ainsi que nous l'avons montré aux §§ 4, 5 et 6 pour le modèle d'un sphérolithe simple croissant à partir d'un seul point. L'auteur espère appliquer ces considérations générales à des cas particuliers les plus divers de cet intéressant genre de symétries.

Pour achever il faut souligner encore une fois que ce genre de phénomènes est beaucoup plus répandu qu'il semble et qu'on pense usuellement. Nous avons déjà dressé ⁽⁹⁾ un tableau assez long des substances chimiques et, en grande partie, minéralogiques qui présentent les formes de « cristallographie curviligne ». De plus, ce long tableau n'est que provisoire. Une autre liste, beaucoup plus étendue, des minéraux et d'autres substances appartenant à des classes de cette cristallographie, est en préparation: on peut compter ces substances par centaines.

(9) M. MATSCHINSKI, « Cahiers Géol. de Thoiry », n. 16, p. 140 (1953).

Mentionnons encore que dans une recente Note ⁽¹⁰⁾ nous avons établi les tableaux des constantes élastiques qui correspondent aux phénomènes de la cristallographie curviligne.

Enfin on peut déjà penser à quelques applications. À titre d'exemple mentionnons notre Note *Structure des chondres et profondeur de provenance des météorites* ⁽¹¹⁾ où nous avons essayé de lier la structure des chondres avec le phénomène de la cristallisation curviligne et où nous avons indiqué également quelques autres possibilités d'applications: détermination de la profondeur des couches, etc.

Cependant nous croyons que ce ne sont pas les applications pratiques, mais plutôt les conséquences théoriques qui sont ici d'importance. En effet avec les phénomènes de la cristallographie curviligne tous les domaines de la cristallographie s'élargissent considérablement.

Mineralogia. — *Sulla identità della hartite con la bombiccite. Determinazione della cella elementare e del gruppo spaziale.* Nota II^(*) di RENATO PELLIZZER, presentata dal Corrisp. C. ANDREATTA.

Dagli spettrogrammi di Weissenberg ottenuti su cristalli di bombiccite risultano i seguenti valori reciproci:

$$\begin{aligned}\gamma^* &= 98^\circ 57' \\ \beta^* &= 89^\circ 26'\end{aligned}$$

e dalla media dei valori $T[u^*, v^*, w^*]$ più probabili riportati nelle tabelle III e IV:

$$\begin{aligned}a_o^* &= 0,04805 \\ b_o^* &= 0,09012 \\ c_o^* &= 0,13669\end{aligned}$$

Utilizzando note relazioni fra elementi della cella reciproca ed elementi della cella diretta, risulta successivamente che:

$$\begin{aligned}\alpha^* &= 77^\circ 4' \\ \alpha &= 103^\circ 11' \\ \beta &= 92^\circ 59' \\ \gamma &= 80^\circ 35'\end{aligned}$$

(10) M. MATSCHINSKI, «C. R. d. l'Académie d. Sciences», t. 240, p. 2117 (1955).

(11) M. MATSCHINSKI, «C. R. d. l'Académie d. Sciences», t. 236, p. 97 (1953).

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1955.



Fig. 1. — Spettrogramma di Weissenberg di bombicite artificiale.
Asse di rotazione $[001]$. Ant. Cu $R = \text{mm. } 28,65$. Grand. nat.

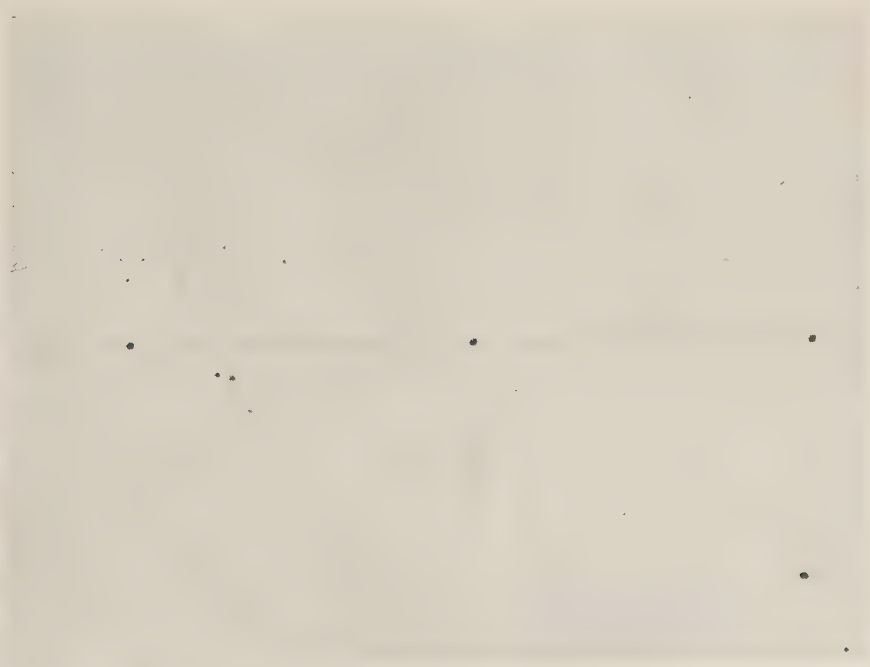


Fig. 2. — Spettrogramma di Weissenberg di bombicite naturale.
Asse di rotazione $[010]$. Ant. Cu $R = \text{mm. } 28,65$. Grand. nat.

ed ancora che:

$$a_0 = 21,10$$

$$b_0 = 11,54$$

$$c_0 = 7,51.$$

Gli spettrogrammi di Weissenberg ottenuti su cristalli di hartite risultano perfettamente corrispondenti a quelli ottenuti su cristalli di bombicite; ritengo perciò superfluo il riportarli.

CELLA ELEMENTARE.

Da tutti i dati ottenuti risulta opportuno adottare per la cella elementare diretta le seguenti costanti lineari:

$$a_0 = 21,10$$

$$b_0 = 11,54$$

$$c_0 = 7,50$$

e le seguenti costanti angolari:

$$\alpha = 103^\circ 11'$$

$$\beta = 92^\circ 59'$$

$$\gamma = 80^\circ 35'.$$

Il rapporto assiale corrispondente viene ad essere:

$$a_0 : b_0 : c_0 = 1,8280 : 1 : 0,6499$$

che è in buon accordo con quello determinato da Machatschki ⁽⁵⁾ per via goniometrica

$$a : b : c = 1,8237 : 1 : 0,6568.$$

Soddisfacente corrispondenza si rileva pure con le costanti angolari determinate per via goniometrica che sono:

$$\alpha = 100^\circ 26'$$

$$\beta = 93^\circ 44'$$

$$\gamma = 80^\circ 34'.$$

(5) MACHATSCHKI, «Zeit. Kryst.», 60, 1924.

TABELLA III.

Calcolo delle costanti lineari della cella reciproca dagli spettrogrammi di Weissenberg per la bombicite naturale.

Asse di rotaz.	λ	$[u^*, v^*, w^*]$	n	s (1) in mm.	$T [u^*, v^*, w^*]$	media (2)
[010]	K_{α}	[100]	4	19,25	0,04858	0,04811
	K_{β}	[100]	4	17,25	0,04833	
	K_{α}	[100]	5	24,25	0,04884	
	»	[100]	6	28,80	0,04829	
	»	[100]	7	34,00	0,04866	
	»	[100]	8	38,50	0,04808	
	»	[100]	9	43,50	0,04808	
	»	[100]	10	48,50	0,04802	0,13669
	K_{α}	[001]	1	13,50	0,13659	
	K_{β}	[001]	1	12,00	0,13467	
	K_{α}	[001]	2	27,25	0,13712	
	»	[001]	4	55,50	0,13636	
[001]	K_{α}	[100]	4	19,00	0,04802	0,04805
	K_{β}	[100]	4	17,00	0,04761	
	K_{α}	[100]	5	24,00	0,04840	
	»	[100]	6	28,75	0,04814	
	»	[100]	7	33,80	0,04841	
	»	[100]	8	38,50	0,04808	
	»	[100]	9	43,50	0,04808	0,09007
	»	[100]	10	48,50	0,04802	
	K_{α}	[010]	2	17,75	0,08968	
	K_{β}	[010]	2	16,00	0,08961	
	K_{α}	[010]	3	27,00	0,09056	
	»	[010]	4	36,50	0,09127	
	»	[010]	5	45,50	0,09038	
	»	[010]	6	55,00	0,09016	

(1) s = distanza fra punti corrispondenti nel piano di simmetria.

(2) Ottenuta dai valori più probabili.

TABELLA IV.

Calcolo di costanti lineari della cella reciproca dagli spettrogrammi di Weissenberg per la bombicite artificiale.

Asse di rotaz.	λ	$[u^*, v^*, w^*]$	n	$s^{(1)}$ in mm.	$T[u^*, v^*, w^*]$	media $^{(2)}$
[001]	K_{α}	[100]	4	19,00	0,04802	0,04805
	K_{β}	[100]	4	17,00	0,04761	
	K_{α}	[100]	5	24,00	0,04840	
	K_{β}	[100]	5	22,00	0,04918	
	K_{α}	[100]	6	28,80	0,04829	
	K_{β}	[100]	6	26,00	0,04832	
	K_{α}	[100]	7	33,60	0,04815	
	»	[100]	8	38,50	0,04808	
	K_{β}	[100]	8	36,50	0,05056	0,09012
	K_{α}	[010]	2	17,80	0,09006	
	K_{β}	[010]	2	16,00	0,08961	
	K_{α}	[010]	3	26,80	0,08994	
	»	[010]	4	36,00	0,09009	
	»	[010]	5	45,50	0,09038	
	»	[010]	6	55,00	0,09016	
	»	[010]	7	65,00	0,09019	

(1) s = distanza fra punti corrispondenti nel piano di simmetria.

(2) Ottenuta dai valori più probabili.

NUMERO DI MOLECOLE NELLA CELLA ELEMENTARE.

Noto il volume della cella elementare ($V = 1754,03$) ed accettando il valore riportato da Boeris ⁽²⁾ per il peso molecolare sia della bombicite, sia della hartite ($M = 274$), ho determinato per entrambi i minerali il valore della densità ($D = 1,0382$) allo scopo di calcolare il numero di molecole contenuto nella cella elementare che risulta:

$$z = \frac{V \cdot D}{M \cdot 1,64 \cdot 10^{-24}} = 4,05 \sim 4.$$

Nella cella elementare risulterebbero quindi contenute 4 molecole. La attendibilità di questo dato è naturalmente subordinata all'esattezza della determinazione del peso molecolare.

La determinazione del peso specifico è stata eseguita con il metodo dei liquidi pesanti, che si è dimostrato il più adatto, usando una soluzione di KCl.

GRUPPO SPAZIALE.

Una volta confermata la simmetria triclina dell'hartite e della bombiccite, per la determinazione del gruppo spaziale, dovendo risolvere l'alternativa fra i gruppi C_1^1 ($P\ 1$) e C_i^1 ($P\ \bar{1}$), non rimaneva che ricorrere alle ricerche di piro- e piezoelettricità polare poiché, come è noto, per cristalli del sistema triclino non esistono condizioni che limitino le possibili riflessioni e questo per tutti gli ordini.

Le ricerche piezoelettriche sono state condotte seguendo il metodo di E. Giebe e A. Scheibe ⁽⁶⁾ che si è dimostrato il più adatto per la sua alta sensibilità. Le ricerche sono state condotte su polveri riuscendo praticamente impossibile disporre di sezioni orientate. Per intervalli di frequenza compresi fra 200 KC e 860 KC e fra 860 KC e 3000 KC l'effetto piezoelettrico più volte ricercato sia su polveri di hartite e bombiccite naturali, sia su polveri ottenute per cristallizzazione da soluzioni in alcool etilico, fu costantemente e nettamente negativo.

Ed ancora non si è registrato alcun effetto piroelettrico da ricerche condotte su cristalli riscaldati alle temperature di 50° e 60° (il loro punto di fusione è di 75°).

Questi risultati sono in favore della esistenza di un centro di simmetria nei cristalli oggetto delle mie ricerche, per i quali pertanto resterebbe esclusa la possibilità di ascriverli alla classe pedale. Il gruppo spaziale C_i^1 ($P\ \bar{1}$) si deve dunque ritenere di gran lunga il più probabile.

In definitiva dallo studio oggetto del presente lavoro risulta:

- a) identità tra bombiccite naturale ed artificiale e così pure fra hartite naturale e artificiale;
- b) identità fra bombiccite ed hartite;
- c) il gruppo spaziale risulta essere il C_i^1 ($P\ \bar{1}$);
- d) le costanti lineari ed angolari della cella elementare risultano:

$$\begin{array}{ll} a = 21,10 \text{ \AA} & \alpha = 103^\circ 11' \\ b = 11,54 \text{ \AA} & \beta = 92^\circ 59' \\ c = 7,50 \text{ \AA} & \gamma = 80^\circ 35' \end{array}$$

- e) il numero di molecole contenuto nella cella elementare risulta $Z = 4$.

(6) E. GIEBE e A. SCHEIBE, *Eine einfache Methode zum qualitativen Nachweis der Piezoelektricität von Krystallen*, «Zs. f. Phys.», 33 (1925).

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* — XIV. *Sulla capacità dell'acido deidroascorbico di legarsi alle proteine mitocondriali e sulla sua conseguente maggior stabilità (*)*.

Nota (**) di ORESTE ARRIGONI, presentata dal Socio S. TONZIG.

È noto come nei tessuti vegetali viventi esistano tutte le condizioni che permettono la formazione di acido ascorbico nella sua forma ridotta (AA) e la sua successiva trasformazione in acido deidroascorbico (DHA) ed in acido dichetogulonico (DKG). Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico eseguite in questo stesso Istituto (1-4) hanno dapprima dimostrato come la somministrazione di acido ascorbico alla pianta determini, con riferimento alle più diverse funzioni cellulari, effetti diametralmente opposti a quelli che si hanno per azione delle auxine già naturalmente presenti o sperimentalmente somministrate; e come, anzi, tale antagonismo non consista semplicemente nella provocazione di opposti effetti ma piuttosto in una inibizione, esercitata dall'acido ascorbico, sulla possibilità che l'auxina eserciti i propri effetti. Ricerche successive (5) hanno permesso di precisare che, qualora l'azione dell'acido ascorbico venga studiata *in vitro* su sistemi enzimatici a grado di purificazione sufficientemente spinto, un netto effetto inibente si ottiene solo per somministrazione di DHA, mentre il trattamento con AA è senza effetto o ha addirittura effetto leggermente stimolante. Che siffatto reperto, ottenuto *in vitro*, possa esser ritenuto valido anche per quanto avviene *in vivo* — e che dunque, anche *in vivo*, l'effetto antiauxinico o, più genericamente, l'effetto di inibizione venga esercitato dall'DHA piuttosto che dall'AA — risulta già probabile per la grande diffusione ed abbondanza dell'ascorbico-ossidasi nelle cellule vegetali viventi; ed è da ritenere, in ogni modo, provato dalle recenti ricerche, eseguite sempre in questo Istituto (6,7) le quali indicano come l'azione basale dell'auxina, alla quale è legato il suo effetto fisiologico, possa esser quella di un freno — meglio: di un regolatore — sull'attività dell'ascorbico ossidasi e, pertanto, sulla formazione, a spese dell'AA, dell'DHA alla cui comparsa si accompagna l'effetto antiauxinico.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1955.

(1) S. TONZIG e F. TREZZI, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 515 (1950)

(2) S. TONZIG e F. TREZZI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 16, p. 434 (1954).

(3) S. TONZIG e F. TREZZI, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 535 (1950).

(4) S. TONZIG e F. TREZZI, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 549 (1950).

(5) S. TONZIG, F. TREZZI, G. LAUDI e E. MARRÈ, « Mem. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. IV (1955).

(6) O. ARRIGONI e E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 17, p. 390 (1954).

(7) E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 18, p. 539 (1955).

Ricerche anche più dirette⁽⁸⁾ hanno del resto messo in evidenza come la somministrazione di AA *in vivo* sia in ogni caso seguita da un aumento soprattutto dell'DHA, ciò che dà ampia ragione degli effetti fisiologici che le ricerche per prime citate⁽¹⁻⁴⁾ hanno messo in evidenza. E ricerche recentissime⁽⁹⁾ hanno, da ultimo, dimostrato come, studiate *in vitro* nei confronti di talune deidrogenasi quelle che potremmo chiamare le tre forme nelle quali l'acido ascorbico si presenta nella pianta, l'AA, l'DHA e il DKG, soltanto la seconda, dunque l'DHA, eserciti un netto effetto inibente, mentre addirittura trascurabile appare l'azione degli altri due.

Questi reperti sono certo interessanti per più aspetti; essi pongono peraltro un problema di chimica biologica il cui chiarimento mi sembra di grande interesse anche dal punto di vista fisiologico. È noto che, a pH superiori a 5, l'DHA è molto instabile e tende a trasformarsi con grande rapidità, ed in maniera irreversibile, in DKG. Se questa trasformazione sia o no facilitata, *in vivo*, da particolari sistemi enzimatici non sappiamo; sappiamo peraltro che essa è, quanto meno, possibile perché DKG è possibile trovarne nei tessuti viventi; in ogni modo le esperienze poco sopra citate, durante le quali venne studiato *in vitro* l'effetto dell'DHA sull'attività di sistemi deidrogenasici ad alto grado di purificazione, sono state fatte a pH leggermente diversi fra loro ma sempre nell'ambito di valori fisiologici, vale a dire intorno a pH 7; a questo pH, inoltre, le esperienze sono state protratte per tempi relativamente lunghi (sino a 1 h), ciò che vuol dire, in altre parole, che esistevano le condizioni per la trasformazione dell'DHA in DKG. Ma poiché l'DKG è stato dimostrato inattivo, e inibente invece il solo DHA, l'aver trovato un effetto inibente per somministrazione di DHA a pH 7, sembra in patente contraddizione con la appena ricordata tendenza di questo a trasformarsi in DKG. Scopo della presente Nota è appunto quello di risolvere tale problema.

La soluzione di esso è, del resto, già contenuta – almeno in embrione – nelle ricerche precedenti⁽¹⁰⁾ le quali con esperienze fatte sia *in vivo* che *in vitro*, indicano come sia l'acido indolacetico che l'acido ascorbico diventino attivi solo all'atto in cui si legano a delle proteine a livello delle quali entrano fra di loro in competizione. Appariva quindi possibile, almeno in via d'ipotesi, che l'DHA, una volta fissato in questi complessi proteici, ne venisse in qualche modo protetto e venisse ostacolato il suo passaggio a DKG per rottura idrolitica del ponte lattonico. Il problema, in altre parole, troverebbe la sua soluzione in una sorta di stabilizzazione assicurata, dai componenti proteici dei preparati enzimatici usati nelle esperienze che ho più sopra citato, all'DHA ad esse legato.

(8) G. LAUDI, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., in corso di stampa.

(9) E. MARRÈ, G. LAUDI e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., in corso di stampa.

(10) S. TONZIG e F. TREZZI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 17, p. 324 (1954).

Si tratta, peraltro, di conclusioni ipotetiche ed a suffragio delle quali non sono state ancora date prove sperimentali dirette ed è questa lacuna che io ho cercato di colmare con le ricerche più sotto descritte. Un'esperienza ancora devo peraltro ricordare, che viene completata e sperimentalmente chiarita dalle mie nuove ricerche: quella che ha dimostrato ⁽⁸⁾ come la somministrazione a tessuti vegetali *in vivo* di AA si risolva in un progressivo e forte aumento del contenuto in DHA mentre molto minori sono le variazioni a carico sia dell'AA che del DKG. Si ha in tal modo la prova di un fortissimo squilibrio tra la velocità con la quale si passa da AA ad DHA e la velocità con la quale da DHA si passa a DKG; ciò spiega come mai somministrando AA si determini nella pianta un accumulo di DHA e quindi una serie di reazioni fisiologiche a carattere negativo; ma la dimostrazione sperimentale del meccanismo che è causa di un tal risultato rimaneva ancora da dare ed ha appunto costituito l'obbiettivo delle ricerche che qui espongo.

PARTE SPERIMENTALE.

Come materiale ho adoperato, durante tutte le esperienze qui descritte, preparati mitocondriali ripetutamente lavati ottenuti, col procedimento suggerito da Laties ⁽¹¹⁾, da apici di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum* v. Alaska) coltivate per 8-10 giorni su segatura, in camera buia condizionata a 25° C di temperatura. A giustificazione della scelta di questo materiale ricordo come precedenti ricerche ⁽¹²⁾ abbiano dimostrato come le particelle mitocondriali siano provviste di ascorbico ossidasi e quindi interessate nel metabolismo, quanto meno catabolico, dell'acido ascorbico.

Il dosaggio dell'AA, dell'DHA e del DKG è stato eseguito seguendo il metodo di Roe e Kuether ⁽¹³⁾.

I reagenti usati sono stati: AA «Merk»; acido paracloromercuribenzoico (pClHgB) «Sigma»; DHA e DKG da me stesso preparati, il primo per ossidazione di AA con acqua di bromo, il secondo seguendo la tecnica di Penny e Zilva ⁽¹⁴⁾.

Scopo delle prime esperienze è stato quello di preparare un punto fermo sperimentale per le esperienze successive le quali non avrebbero avuto senso se non fosse stata prima accertata la reale capacità dell'DHA di legarsi alle particelle mitocondriali. Ho ora fatto uso d'una espressione quanto mai circospetta giacché più di questo le mie esperienze non mi permettono di dire. Ma tutta una serie di ricerche eseguite in precedenza in questo Istituto autorizzano a ritenere, mi sembra, che il legame avvenga a livello di proteine mitocondriali. Della capacità dell'acido ascorbico di legarsi alle proteine erano state sin qui date, peraltro, prove soltanto indirette ⁽¹⁰⁾ cosicché una prova diretta era quanto mai opportuna prima di procedere con le mie ricerche. Inoltre era ancora da chiarire se tale capacità fosse posseduta, ed in quale grado, per tutt'e tre le forme dell'acido ascorbico (AA, DHA e DKG).

(11) G. G. LATIES, «Physiol. Plantarum», vol. 6, p. 199 (1953).

(12) G. LAUDI e E. MARRÈ, in corso di stampa.

(13) J. H. ROE e C. A. KUETHER, «J. Biol. Chem.», vol. 147, p. 399 (1943).

(14) J. R. PENNY e S. S. ZILVA, «Biochem. J.», vol. 39, p. 1 (1945).

I risultati espressi nelle tabelle I e II indicano, nel loro complesso, come l'DHA possegga, di fatto, una capacità assai notevole a legarsi alle proteine mitocondriali; e come, per converso, tale capacità sia tanto bassa da potersi considerar trascurabile per quanto riguarda il DKG. È da chiarire che la mancanza di un buon metodo di dosamento dell'DHA da solo non ha permesso di pervenire a tali conclusioni se non per via indiretta e cioè somministrando ai mitocondri, in due esperienze parallele, DHA in un caso e DKG nell'altro e dosando nel primo caso DHA congiuntamente e, nel secondo, il solo DKG. Indirettamente, e dal momento che l'acido ascorbico separabile dai mitocondri solo per idrolisi acida a caldo può essere praticamente ritenuto tutto DHA, questi risultati permetterebbero già di trarre la conclusione finale: l'DHA legato alle proteine mitocondriali, pur a pH 7,2 e nello spazio di oltre mezz'ora, rimane tale senza dunque passare a DKG. Ma alla stessa conclusione ho cercato di giungere più direttamente con altre esperienze.

TABELLA I.

Acido deidroascorbico legato alle particelle mitocondriali.

Composizione dell'incubato: mitocondri corrispondenti a 5 gr. di peso fresco in tampone al TRIS (triidrossimetilaminometano) 0,1 M, pH 7,2, DHA 500 γ , volume finale 1 cc. L'DHA veniva aggiunto al preparato mitocondriale, 30 min. pr., prima di procedere alla eliminazione del sopranatante per centrifugazione a 20.000 g. Le proteine così raccolte venivano sottoposte a due successivi lavaggi in 3 cc di TRIS alla stessa molarità e pH, conservando però anche i due sopranatanti per il dosaggio dell'DHA. Infine le proteine, valutate in 0,3 cc circa, erano idrolizzate con HCl normale alla temperatura di 100° e sul sopranatante raccolto per centrifugazione veniva effettuato il dosaggio dell'DHA. L'incubazione, i lavaggi e le centrifugazioni erano compiute tutte alla temperatura di 4-5°

	γ DHA + DKG separabile per lavaggio e centrifugazione.		γ DHA + DKG fissato dai mitocondri e rinvenuto dopo idrolisi acida
	Sopranatante I	Sopranatante II	Mitocondri
Mitocondri controllo	0	0	0
Mitocondri controllo + DHA	69	30	25

Quanto all'AA, il fatto stesso che i mitocondri isolati, provvisti come sono di ascorbico-ossidasi, sono capaci di trasformarlo in DHA ⁽¹²⁾, fa presumere ch'esso possa, se non altro, legarsi alle proteine dell'ascorbico-ossidasi. La tabella III mostra infatti come una certa quantità, anche se non molto grande, di AA è stata trattenuta dalle proteine mitocondriali; la stessa tabella mostra peraltro come assai maggiore sia la quantità di AA che i mitocondri hanno trasformato ad DHA che è rimasto ad essi legato.

TABELLA II.

Acido dichetogulonico legato ai mitocondri.

Composizione dell'incubato come in tabella I, ma aggiunti 500 γ di DKG invece del DHA.

	γ DKG separabile per lavaggio e centrifugazione		γ DKG fissato dai mitocondri e rinvenuto dopo idrolisi acida
	Sopranatante I	Sopranatante II	Mitocondri
Mitocondri controllo	0	0	0
Mitocondri controllo + DKG	28	13	2

TABELLA III.

Acido ascorbico e deidroascorbico legati ai mitocondri trattati con solo acido ascorbico.

Composizione dell'incubato: tutte le condizioni della tabella I, ma aggiunto alla frazione mitocondriale 1 mg di AA in luogo del DHA.

	γ AA separabile per lavaggio e centrifugazione		γ AA fissato dai mitocondri rinvenuto dopo idrolisi acida	γ DHA + DKG rinvenuto nei sopranatanti		γ DHA + DKG fissato dai mitocondri e rinvenuto dopo idrolisi acida
	sopranatante I	sopranatante II	mitocondri	sopranatante I	sopranatante II	mitocondri
Mitocondri controllo . .	0	0	0	0	0	0
Mitocondri controllo + AA	35	5	7,5	20	9	12

La questione principale, quella che ha determinato queste ricerche, è stata studiata con l'esperienza i cui risultati sono contenuti nella tabella IV e durante la quale ad una sospensione di particelle mitocondriali è stato somministrato DHA. I dosamenti finali mostrano, come, mentre nel supernatante - dunque nella frazione che, per centrifugazione, è stata privata di mitocondri - una parte assai notevole dell'DHA è divenuto DKG, in logico ossequio alle sue caratteristiche di instabilità a quel pH, nella frazione mitocondriale il processo di trasformazione è stato trascurabile. Ciò che

veramente dimostra come, quando sia legato alle proteine plasmatiche (appartenenti, nel mio caso, alle particelle mitocondriali), l'DHA ne viene in certa maniera protetto e non è più suscettibile di trasformarsi, se non con estrema lentezza, in quella che pure è la sua forma di maggior stabilità.

TABELLA IV.

Azione protettiva della frazione mitocondriale sulla demolizione dell'acido deidroascorbico.

Composizione dell'incubato: tutte le condizioni della tabella I, ma dopo la somministrazione del DHA, si raccoglievano per centrifugazione i sopranatanti I e II, sui quali alla fine dell'esperienza veniva dosato il DKG per poterlo confrontare con il DKG dosato nelle corrispondenti frazioni mitocondriali.

	γ DHA separabile per lavaggio e centrifugazione		γ DHA fissato dai mitocondri e rinvenuto dopo idrolisi acida	γ DKG rinvenuto nei sopranatanti dei lavaggi		γ DKG rinvenuto nei mitocondri dopo idrolisi acida
	sopranatante I	sopranatante II	mitocondri	sopranatante I	sopranatante II	mitocondri
Mitocondri controllo . . .	0	0	0	0	0	0
Mitocondri controllo + DHA	52	18	25	30	20	3

Ho sinora parlato di DHA che si fissa sulle proteine mitocondriali; ed ho più sopra spiegato perché si può « presumere » che sia proprio sui radicali proteici che l'DHA si fissa. Esistono del resto buone ragioni per ritenere che, nell'interazione tra DHA e auxine siano coinvolti gruppi sulfidrilici proteici ⁽¹⁵⁾. Io non ho comunque creduto di potermi esimere dal dare una giustificazione sperimentale diretta alla mia « presunzione », ciò che ho fatto con l'esperienza di cui è dato conto nella tabella V e che dimostra come il trattamento preventivo dei mitocondri con un bloccatore elettivo dei gruppi -SH, quale l'acido pClHgB, diminuisca in misura significativa la possibilità dell'DHA di legarsi - l'espressione ha questa volta acquistato legittimità sperimentale - alle proteine mitocondriali. Non si tratta, in realtà, di una inibizione totale; ciò che può essere conseguenza sia di un fenomeno di competizione, sia della possibilità che l'DHA si leghi alle proteine non su di un sol gruppo, ma su almeno due formanti quasi una superficie di combinazione.

(15) E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 18, p. 88 (1955).

TABELLA V.

Azione dell'acido paracloromercuribenzoico sulla formazione del complesso, tra componenti mitocondriali e deidroascorbico.

Condizioni d'esperienza come in tabella I, ma aggiunto pClHgB, 30 min. pr. prima dell'AA.

	γ DHA + DKG separabile per lavaggio e centrifugazione		γ DHA + DKG fissato dai mitocondri e rinvenuto dopo idrolisi
	Soprannatante I	Soprannatante II	Mitocondri
Mitocondri controllo	0	0	0
Mitocondri controllo + DHA	52	29	21
Mitocondri controllo + DHA + pClHgB $\cdot 10^{-4}$ M	58	31	18

TABELLA VI.

Stabilità del complesso tra componenti mitocondriali e acido deidroascorbico.

	γ DHA + DKG legato ai mitocondri e staccabile mediante idrolisi a freddo con HCl N	γ DHA + DKG legato ai mitocondri e staccabile mediante idrolisi a 100° C con HCl N
Mitocondri controllo	0	0
Mitocondri controllo + DHA .	20	27

L'ultima esperienza è stata fatta per avere un orientamento sul grado di stabilità del legame che unisce l'DHA alle proteine mitocondriali. Non mi pare che, *a priori*, si debba ritenere che tale legame sia particolarmente tenace, dal momento che gli effetti fisiologici antiauxinici dell'acido ascorbico si osservano, *in vivo* come *in vitro*, solo quando esso sia presente in quantità molto maggiore dell'AIA (o di altra auxina artificiale), e dal momento che, in condizioni naturali, l'acido ascorbico è contenuto nei tessuti della pianta in proporzioni assai più elevate dell'AIA. E tuttavia il fatto stesso che il DKG è presente sempre in molto debole quantità e che la sua concentrazione non aumenta sensibilmente nemmeno per somministrazione di AA, nelle quali condizioni aumenta enormemente l'DHA⁽⁸⁾; inoltre, l'osservazione che, di fatto, l'DHA riesca a inibire tanto sensibilmente l'attività di

così numerosi enzimi^(7,9) e ad esercitare una così netta azione antiauxinica⁽¹⁻⁵⁾, tale fatto e tale osservazione, dico, fanno pur pensare che la forza che lega l'DHA alle proteine sia abbastanza consistente. Ed effettivamente i reperti sperimentali (tabella VI) dimostrano come l'idrolisi a freddo con HCl a concentrazione normale sia appena sufficiente a liberare circa i 3/4 dell'DHA totale legato alle proteine mitocondriali, considerando come totale la somma delle due frazioni d'DHA che è possibile staccare dai mitocondri per successiva idrolisi prima a freddo, poi a 100° C.

CONCLUSIONI.

1. L'DHA somministrato a mitocondri isolati e ripetutamente lavati di porzioni apicali del germoglio di pisello si fissa ad essi in forte quantità e con tenacità tale che soltanto l'idrolisi con HCl N a 100° C riesce a staccarlo totalmente, mentre l'idrolisi a freddo non ne libera che i 3/4 di quello fissato. Tale risultato di fissazione è significativamente inibito dal pretrattamento dei mitocondri con pClHgB, ciò che permette di concludere, in accordo a reperti precedenti⁽¹⁵⁾ che il legame avvenga a livello dei radicali sulfidrilici delle proteine mitocondriali.

2. L'idrolisi acida a caldo di mitocondri pretrattati con AA mette in libertà una modesta quantità di AA che era stato fissato dalle proteine mitocondriali; ma assai maggiore è la quantità di DHA che viene contemporaneamente liberata e che i mitocondri avevano trattenuto sulle loro proteine dopo averlo preparato a spese di AA. Trascurabile è, invece, la quantità di DKG che si fissa sulle proteine mitocondriali.

3. Sebbene nelle condizioni sperimentali, peraltro in assenza di mitocondri, l'DHA tenda a trasformarsi rapidamente in DKG, la medesima trasformazione non vien subita che in misura estremamente minore, e pressoché trascurabile, dall'DHA legato alle proteine mitocondriali. Si mette così in evidenza come l'DHA tenda a legarsi alle proteine del plasma mitocondriale a livello dei gruppi sulfidrilici; come il legame che così si forma abbia carattere di notevole stabilità; e come l'DHA così legato a radicali proteici non sia più suscettibile a trasformarsi se non con lentezza ed in piccola misura a DKG.

4. Tali reperti, in sintesi, indicano che – sia *in vivo* che *in vitro* – l'AA può essere, e di fatto è, rapidamente trasformato in DHA; e come a questo punto tenda ad arrestarsi la catena di successive trasformazioni dell'acido ascorbico che – in assenza di proteine plasmatiche – si concluderebbe con la sua rapida trasformazione in DKG. In ciò sta il significato fisiologico delle mie ricerche; le quali chiariscono come avvenga che la somministrazione di AA a tessuti vegetali si concreti in un loro enorme arricchimento in DHA mentre praticamente invariato rimane il loro contenuto sia in AA che in DKG; e come, di conseguenza, i risultati fisiologici della somministrazione di AA a tessuti vegetali – *in vivo* come *in vitro* – siano di tipo nettamente antiauxinico.

Fisiologia vegetale. — *Dimostrazione dell'esistenza, in tessuti caratteristici di piante superiori ed in piante inferiori, della via ossidoriduttiva: trifosfopiridinnucleotide-glutatione-ascorbico* (*). Nota (**)
di GIANNINO LAUDI, presentata dal Socio S. TONZIG.

In un precedente lavoro (Marrè e Laudi⁽¹⁾) è stata dimostrata la presenza, in estratti di tessuti di piantine eziolate di pisello, di una serie di sistemi enzimatici catalizzanti il trasporto dell'idrogeno da diversi substrati respiratori all'ossigeno, tramite prima il TPN ed in seguito il glutatione e l'acido ascorbico (fig. 1). In un'ulteriore ricerca (Marrè e Laudi⁽²⁾) la via ossido-

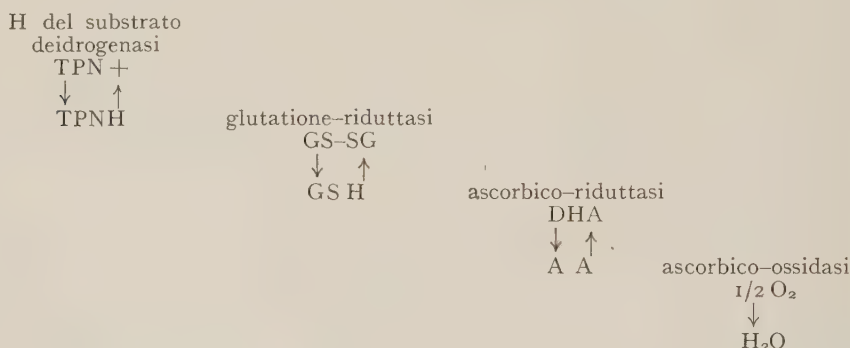


Fig. 1. — Schema del sistema enzimatico che trasporta l'idrogeno dal substrato all'ossigeno attraverso: TPN, glutatione ed ascorbico.

riduttiva suddetta si è ritrovata presente anche in cloroplasti isolati di spinacio in cui essa convoglia l'idrogeno labilizzato dalla fotolisi dell'acqua, prima su un accettore primario ed in seguito su TPN, glutatione, ascorbico ed ossigeno. Con le presenti ricerche io ho voluto stabilire se il complesso degli enzimi che catalizzano le successive fasi della catena ossidoriduttiva fosse presente anche negli organismi vegetali inferiori ed in alcuni altri tessuti delle piante superiori per poterne così dimostrare la generalità e l'importanza. Infatti un sistema respiratorio che, all'altezza del TPN, diverga dalla normale via flavoproteine-citocromi, appare dotato di particolare importanza per la cellula sia per la probabile produzione di energia che ne sembra derivare, sia per la possibilità di regolare il ricambio di metaboliti essenziali quali il glutatione e l'acido ascorbico.

L'acido deidroascorbico, derivato dall'ossidazione dell'ascorbico, ad esempio⁽³⁾ esplica, in quantità attive molto basse ed in preparati mitocon-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1955.

(1) E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Lincei, Cl. Sc. Fis. », ser. VIII, 16, 649 (1954).

(2) E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Lincei, Cl. Sc. Fis. », ser. VIII, 18, 402 (1955).

(3) E. MARRÈ, G. LAUDI e O. ARRIGONI in corso di stampa.

driali o in preparati enzimatici purificati, una drastica inibizione sulla riduzione del TTC da particolari sistemi deidrogenasici quali la glucosio-6-P deidrogenasi. A questi dati se ne possono aggiungere altri ⁽⁴⁾ sull'influenza sul consumo di ossigeno da parte del deidroascorbico ed altri ancora raccolti da esperienze *in vivo* che tendono a dimostrare il potere inibente del deidroascorbico sulla respirazione.

Per queste ragioni e per le altre esposte più sopra sembra importante la possibilità da parte della cellula vegetale di diminuire la quantità attiva, cioè in grado di agire sui vari sistemi enzimatici, di deidroascorbico riducendolo attraverso la sequenza di passaggi ad ascorbico: di qui l'interesse di avere ulteriori dati sulla diffusione generale dei sistemi specificamente coinvolti nella regolazione del rapporto ascorbico ridotto-deidroascorbico.

MATERIALI E METODI. — Avendo come scopo la dimostrazione della via respiratoria che passa attraverso glutathione ed ascorbico come fatto generale, e quindi l'indicazione della sua importanza fisiologica, ho cercato di includere nelle mie indagini da un lato piante appartenenti a taluni fra i principali gruppi sistematici; e, dall'altro, gli organi fondamentali della pianta superiore. Ho così studiato l'esistenza della via ossidoriduttiva in questione sia nel fusto, nella foglia, nella radice e negli organi di riserva di pisello o — rispettivamente — di patata, sia in specie rappresentanti i gruppi delle alghe, dei funghi, delle pteridofite, delle monocotiledoni e delle dicotiledoni ⁽⁵⁾.

Ho volutamente tralasciato di controllare l'attività ascorbico-ossidativa dei vari materiali che avevo in esame data la vastità della letteratura su questo enzima e la pratica onnipresenza dello stesso, o di sistemi equivalenti.

I vari materiali usati, dopo essere stati triturati in mortaio con sabbia di quarzo in presenza di tampone al TRIS 0,1 M, pH 7,2, venivano centrifugati a $800 \times g$, per eliminare residui di tessuto e cellule intere. Si procedeva all'aggiunta delle varie sostanze componenti l'incubato; le provette venivano quindi poste in un essiccatore che veniva evacuato mediante una efficiente pompa ad olio. Dopo un periodo che variava da 60 a 120 minuti primi, ad ogni provetta veniva aggiunto un volume di acido metafosforico 5%, per bloccare l'attività ascorbico-ossidativa e quindi la riossidazione dell'ascorbico ridotto al sistema. Eliminate, mediante centrifugazione, le proteine denaturate e reso così limpido il liquido in prova, si dosava l'aumento in ascorbico ridotto col metodo del 2,6-diclorofenoloindofenolo secondo la tecnica di Tillmans ed Hirsch.

Come reagenti sono stati usati: fruttosio 1-6-fosfato, glucosio-6-fosfato, trifosfopiridinucleotide e glutathione ossidato della Sigma, glutathione ridotto della Schwartz. L'acido deidroascorbico era ottenuto dall'ascorbico Merk

(4) S. TONZIG, F. TREZZI, G. LAUDI e E. MARRÈ, «Memorie Acc. Lincei», ser. VIII, vol. 4, sez. III, fasc. 3 (1955).

(5) Le ricerche si sono sperimentalmente dimostrate impossibili nelle Gimnosperme probabilmente a causa della resine che contengono e che annullano completamente, negli estratti, l'attività enzimatica.

mediante aggiunta di acqua di bromo in lieve eccesso e susseguente lavaggio con azoto.

In ogni caso i dati in tabella risultano dalla media di due determinazioni.

ESPERIENZE E RISULTATI. — I dati della tabella I dimostrano l'efficienza del sistema che passa attraverso glutatione ed ascorbico sia negli apici di pisello eziolati sia negli stessi apici inverditi. È anche da porre in particolare evidenza il nettissimo aumento di attività riduttrice del deidroascorbico negli apici inverditi rispetto a quella degli apici eziolati. Tale risultato sembra di notevole interesse in quanto potrebbe suggerire una partecipazione specifica del sistema ossidoriduttivo in questione ai processi connessi con la funzione fotosintetica. Esso viene a completare ed a collegare i precedenti reperti circa la maggiore attività, nella foglia verde rispetto a quella eziolata, di deidrogenasi a TPN ⁽⁶⁾ con quelli circa la particolarissima abbondanza, nei cloroplasti isolati, di enzimi capaci di trasportare idrogeno (elettroni) dal TPN al glutatione e da questo all'ascorbico ⁽²⁾. Il dato presente dimostra infatti come in estratti di tessuti clorofilliani le singole attività dei sistemi deidrogenasici a TPN e di quelli implicati nella ossidoriduzione del glutatione e dell'ascorbico possano coordinarsi tra loro a catalizzare una catena di reazioni che raggiunge qui un livello di efficienza singolarmente elevato.

TABELLA I.

Riduzione del DHA da parte di estratti grezzi di apici eziolati ed inverditi di piantine di pisello (Pisum sativum).

Concentrazione dell'estratto, in tampone al TRIS 0,1 M, pH 7,2, 5 %: Gl-6-P, 3 mg; TPN, 20 γ; GSH, 100 γ; DHA, 300 γ. Vuoto 120 min. pr.

Composizione dell'incubato	γ AA ritrovati	
	eziolati	inverditi
Estratto + DHA	52	95
Estratto + DHA + GSH	68	118
Estratto + DHA + Gl-6-P + TPN . . .	169	271
Estratto + DHA + Gl-6-P + TPN + GSH .	200	300

Anche negli apici radicali di pisello (tabella II) il sistema risulta attivamente operante la riduzione del DHA, in seguito alla aggiunta di tutto il sistema, raggiungendo l'80 %.

(6) E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, «N. Giorn. Bot. It., n. s., 61», 378 (1954).

TABELLA II.

Riduzione del DHA da parte di estratti grezzi di apici radicali di pisello (Pisum sativum).

Concentrazione dell'estratto, in TRIS come Tabella I, 8 %:

Gl-6-P, 2 mg; TPN, 20 γ ; GSH, 200 γ ; DHA, 200 γ .

Vuoto 120 min. pr.

Composizione dell'incubato	γ AA ritrovati
Estratto + DHA	4
Estratto + DHA + GSH	12
Estratto + DHA + Gl-6-P + TPN	32
Estratto + DHA + Gl-6-P + TPN + GSH .	156

Nelle prove con estratti di tuberi di patata (tabella III) solo l'aggiunta di tutti i componenti dell'incubato esalta la riduzione del DHA, mentre le aggiunte parziali non hanno, praticamente, effetto.

TABELLA III.

Riduzione del DHA da parte di estratti grezzi di tubero di patata. (Solanum tuberosum).

Concentrazione dell'estratto, in TRIS come tabella I, 20 %,

Gl-6-P, 2 mg; TPN, 20 γ ; GSH, 200 γ ; DHA, 200 γ . Vuoto 120

min. pr.

Composizione dell'incubato	γ AA ritrovati
Estratto + DHA	4
Estratto + DHA + GSH	5
Estratto + DHA + Gl-6-P + TPN	7
Estratto + DHA + Gl-6-P + TPN + GSH .	102

La modesta riduzione da parte di *Physarella* (tabella IV) si spiega con la difficoltà di poter disporre di quantitativi di materiale tali da permettere elevate concentrazioni dell'estratto: ciò malgrado, i risultati sembrano ben significativi ai fini della dimostrazione dell'esistenza, anche in questi organismi, della via ossidoriduttiva in questione.

TABELLA IV.

*Riduzione del DHA da parte di estratti grezzi
di Physarella oblonga (Myxomycetes).*

Concentrazione dell'estratto, in TRIS come tabella I, 5 %:
Gl-6-P, 4 mg; TPN, 20 γ; GSH, 100 γ; DHA, 250 γ. Vuoto 60
min. pr.

Composizione dell'incubato	γ AA ritrovati
Estratto—DHA	4
Estratto—DHA—GSH	9
Estratto — DHA — Gl-6-P—TPN	4
Estratto—DHA—Gl-6-P—TPN—GSH . . .	13

Nella tabella V sono esposti i dati della riduzione del DHA da parte di *Saccharomyces cerevisiae* essiccato; il forte aumento nell'attività di riduzione del DHA determinato dall'aggiunta simultanea di TPN e di GSH dà la prova dell'efficienza del sistema in questo materiale.

TABELLA V.

*Riduzione del DHA da parte di estratti grezzi
di Saccharomyces cerevisiae.*

Concentrazione dell'estratto, in TRIS come tabella I, 20 %:
Gl-6-P, 3 mg; TPN, 15 γ; GSH, 100 γ; DHA, 600 γ. Vuoto 120
min. pr.

Composizione dell'incubato	γ AA ritrovati
Estratto—DHA	60
Estratto—DHA—GSH	76
Estratto—DHA—Gl-6-P—TPN	439
Estratto — DHA — Gl-6-P — TPN — GSH . .	510

Anche con estratto di *Scenedesmus*, in presenza del sistema completo, la riduzione del DHA raggiunge i suoi valori più alti, e ciò anche nel caso che il glutatione sia stato aggiunto nella sua forma ossidata (tabella VI). I risultati ottenuti su questo materiale sono peraltro solo debolmente significativi: essi sembrano da interpretarsi piuttosto come un'indicazione della presenza, in *Scenedesmus*, della via metabolica in questione che come una dimostrazione sua definitiva.

TABELLA VI.

*Riduzione del DHA da parte di estratti grezzi di
Scenedesmus quadricauda (Chlorococcales).*

Concentrazione dell'estratto, in TRIS come tabella I, 15 %:
 Gl-6-P, 3 mg; TPN, 50 γ ; GSH, 50 γ ; GSSG, 50 γ ; DHA, 250 γ .
 Vuoto 120 min. pr.

Composizione dell'incubato	γ AA ritrovati
Estratto + DHA	32
Estratto + DHA + GSH	32
Estratto + DHA + Gl-6-P + TPN + GSH .	44
Estratto + DHA + Gl-6-P + TPN + GSSG . .	37

L'estratto di foglie di *Polypodium* (tabella VII) risponde notevolmente alla aggiunta di GSH ed all'aggiunta del sistema completo, mentre l'aggiunta di Gl-6-P e TPN determina effetti relativamente modesti, ciò che può essere presumibilmente messo in relazione con l'abbondanza di substrati endogeni negli estratti del materiale in questione.

TABELLA VII.

*Riduzione del DHA da parte di estratti grezzi
di foglia di Polypodium aureum (Filicales).*

Concentrazione dell'estratto, in TRIS come tabella I, 8 %:
 Gl-6-P, 2 mg; TPN, 20 γ ; GSH, 200 γ ; DHA, 200 γ . Vuoto 120
 min. pr.

Composizione dell'incubato	γ AA ritrovati
Estratto + DHA	6
Estratto + DHA + GSH	58
Estratto + DHA + Gl-6-P + TPN	9
Estratto + DHA + Gl-6-P + TPN + GSH .	70

Conclusioni analoghe, anche se l'aggiunta di substrato e di coenzima ha qui maggior effetto, si possono trarre dalla tabella VIII relativa gli estratti di foglie di *Alopecurus pratensis*.

TABELLA VIII.

Riduzione del DHA da parte di estratti grezzi di foglie di Alopecurus pratensis (Monocotyledones).

Concentrazione dell'estratto, in TRIS come tabella I, 20 %:

Gl-6-P, 4 mg; TPN, 40 γ ; GSH, 100 γ ; DHA, 250 γ .

Vuoto 60 min. pr.

Composizione dell'incubato	γ AA ritrovati
Estratto + DHA	5
Estratto + DHA + GSH	8
Estratto + DHA + Gl-6-P + TPN	14
Estratto + DH + Gl-6-P + TPN + GSH . .	33

Da quanto sopra esposto si può concludere: *a*) che gli estratti dei vari materiali in esame possono ridurre il DHA aggiunto; *b*) che questa loro capacità è condizionata dalle aggiunte di Gl-6-P e TPN, e di GSH, la simultanea aggiunta di questi tre fattori realizzando la massima attività di riduzione dell'acido deidroascorbico.

Mi sembra che questi risultati valgano a dimostrare la reale esistenza della via ossidoriduttiva TPN-glutazione-ascorbico nei vari tessuti e nelle varie specie esaminati, come è già stato dimostrato per gli estratti di apici di pisello eziolati e per i cloroplasti di spinacio, in precedenti lavori ^(1,2).

RIASSUNTO E CONCLUSIONI.

Si è studiata la diffusione nel regno vegetale della via ossidoriduttiva che trasporta l'idrogeno dal substrato all'ossigeno attraverso il TPN, il glutazione e l'acido ascorbico.

Dalla serie delle esperienze eseguite si può concludere:

1° La via respiratoria in esame è presente in tutti gli organi principali della pianta;

2° La via respiratoria in esame è presente in specie vegetali appartenenti ai diversi e più fondamentali gruppi sistematici.

Questa via respiratoria sembra avere un notevole significato biologico, anche a prescindere dal suo possibile significato energetico. Essa infatti: permette il passaggio dell'idrogeno dal substrato all'ossigeno, non passando attraverso la classica via flavoproteine-citocromi e tende a mantenere ad un alto livello la concentrazione dell'acido ascorbico nella forma ridotta, in contrasto coll'azione ossidativa dell'ossidasi dell'acido ascorbico, che è generalmente presente.

Zoologia. — *Osservazioni preliminari sulle cellule vitelline e gli ovociti di « Fasciola hepatica » L.* (*). Nota (**) di FULVIO RANZOLI, presentata dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Le ricerche condotte negli ultimi anni da Vannini e collaboratori⁽¹⁾, sull'attività dell'apparato nucleolare durante la maturazione degli ovociti in svariati gruppi animali, hanno contribuito a chiarire alcune delle funzioni che detto costituente cellulare esplica, nella formazione del gamete femminile e nell'elaborazione di sostanze di riserva. Nel quadro di tali ricerche mi è sembrato interessante prendere in considerazione il caso di un Platelmina in cui gli ovociti non accumulano tuorlo, mentre le sostanze nutritive di riserva, per lo sviluppo dell'embrione e quelle per la genesi del guscio delle uova, si formano nel citoplasma delle cellule vitelline. Lo scopo che mi propongo è di vedere quale sia il comportamento del nucleolo o di altri costituenti nucleari o citoplasmatici delle due differenti categorie di cellule, che compongono le uova mature con guscio.

La scelta di *Fasciola hepatica* quale oggetto di studio è dovuta alla sua facile reperibilità e al fatto che ben si presta alle indagini citologiche. Senza riassumere in questa breve nota introduttiva il vasto materiale bibliografico, riguardante in particolar modo la *Fasciola*, ricorderò i lavori di Henne-guy⁽²⁾ sulla formazione dell'uovo, la maturazione e la fecondazione; di Schubmann⁽³⁾ sull'origine e le differenze tra cellule vitelline e ovociti fino allo sviluppo embrionale; di Vialli e della sua scuola⁽⁴⁾, che hanno rivelato la presenza di sostanze fenoliche nei granuli vitellini. Altre ricerche sui granuli vitellini e sulla parte che essi esplicano, assieme al secreto della ghiandola di Mehlis, nella costituzione del guscio delle uova, sono state condotte da Stephenson, da Smyth e da Yosufzai⁽⁵⁾, mentre Sander-

(*) Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Modena diretto dal prof. Enrico Vannini. Lavoro eseguito con un sussidio del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1955.

(1) E. VANNINI, *Il nucleolo nella vita della cellula*, « Boll. Zool. », vol. 21, in corso di stampa (1954).

(2) L. F. HENNEGUY, *Sur la formation de l'oeuf, la maturation et la fécondation de l'oocyte chez le « Distomum hepaticum »*, « C. R. Acad. Sci. », vol. 134, p. 1235 (1902); *Recherches sur le mode de formation de l'oeuf ectolécithe du « Distomum hepaticum »*, « Arch. anat. microsc. », vol. 9, p. 47 (1906).

(3) W. SCHUBMANN, *Ueber die Eibildung und Embryonalentwicklung von « Fasciola hepatica » L.*, « Zool. Jahrb. Anat. », vol. 21, p. 571 (1905).

(4) M. VIALLI, *Ricerche istochimiche sui vitellogeni dei platelminti*, « Boll. Zool. », vol. 4, p. 134 (1933); M. G. ROMANINI, *Contributo alla conoscenza istochimica dei vitellogeni di « Distoma hepaticum »*, « Mon. zool. it. », vol. 56, p. 16 (1947).

(5) W. STEPHENSON, *Physiological and histochemical observations on the adult liver fluke « Fasciola hepatica » L.* — III. *Egg-shell formation*, « Parasitology », vol. 38, p. 128 (1947); J. D. SMYTH, *Egg-shell formation in Trematodes and Cestodes as demonstrated by the methyl or malachite green techniques*, « Nature », vol. 168, p. 322 (1951); H. K. YOSUFZAI, *Female repro-*

son ⁽⁶⁾ ha affrontato il problema della fecondazione e della ginogenesi. Mi limito pertanto a esporre i primi risultati ottenuti, con alcuni cenni sui metodi usati e a trarre alcune conclusioni preliminari, riservando per un lavoro successivo una trattazione più estesa e completata da ulteriori osservazioni.

Il materiale vivente, ottenuto dalla dissezione del fegato di pecore infestate, venne fissato in alcool formolico acetico e incluso in paraffina. Le sezioni, di 7μ , furono colorate con le abituali tecniche istologiche e trattate secondo i metodi di Feulgen con contrasto in verde luce per rivelare i desossinucleoprotidi (DNP), di Brachet (verde metile-pironina) per i ribonucleoprotidi (RNP), di Mac Manus (acido periodico-Schiff) per i polisaccaridi o sostanze PAS-positive.

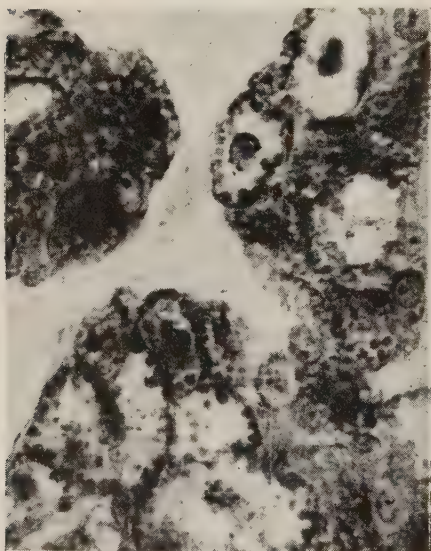


Fig. 1. - Cellule vitelline nei vitellogeni. Verde metile-pironina; 740 \times .



Fig. 2. - Cellule vitelline nei vitellogeni. Mac Manus; 740 \times .

Lo studio dei particolari anatomici dell'apparato riproduttore femminile, compiuto mediante una completa seriazione di fette frontali e trasversali, mi ha permesso di notare alcuni interessanti dettagli strutturali, su cui ora non intendo dilungarmi. Ho inoltre potuto identificare la posizione relativa delle parti in cui sarebbero stati reperibili gli stadi successivi delle trasformazioni, cui vanno incontro le cellule vitelline e gli ovociti, dal momento in cui si formano fino a quando si trovano riuniti in uova, provviste di guscio e pronte per venire espulse.

ductive system and egg-shell formation in « Fasciola hepatica », « Nature », vol. 169, p. 549 (1952); H. K. YOSUFZAI, Cytological studies on the oogenesis of « Fasciola hepatica » L., « La Cellule », vol. 55, p. 167 (1953).

(6) A. R. SANDERSON, *Maturation and probable gynogenesis in the liver fluke, « Fasciola hepatica » L., « Nature », vol. 172, p. 110 (1953).*

Nei vitellogeni (figg. 1 e 2), le cellule vitelline più precoci si trovano in posizione marginale ed hanno un nucleo tondeggianti, compatto, pieno di zolle Feulgen-positive, che con il metodo di Brachet assumono il verde metile. Il nucleolo e altre piccole granulazioni, Feulgen-negative, sono invece pironinofile; materiali pironinofili si trovano anche nel citoplasma. Queste cellule, trattate con il metodo di Mac Manus, presentano una completa PAS-negatività.

In altre cellule, un po' più grandi, il carattere del nucleo si mantiene simile a quello descritto, solo che il nucleolo è più fortemente pironinofilo. Nel citoplasma compaiono numerose sferule che assumono intensamente il verde luce, ma che sono, sia pure debolmente, colorate dal verde metile e lievemente PAS-positive. I materiali pironinofili sono soprattutto addensati

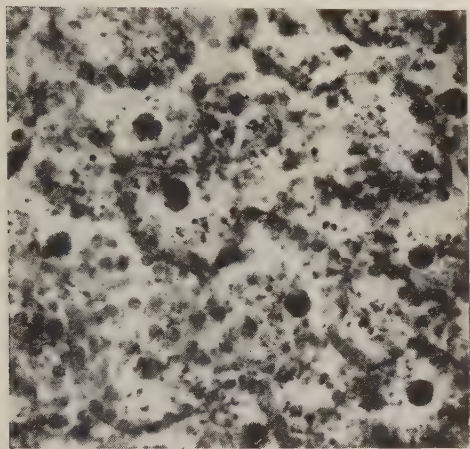


Fig. 3. - Cellule vitelline nella riserva vitellina. Verde metile-pironina; 740X.

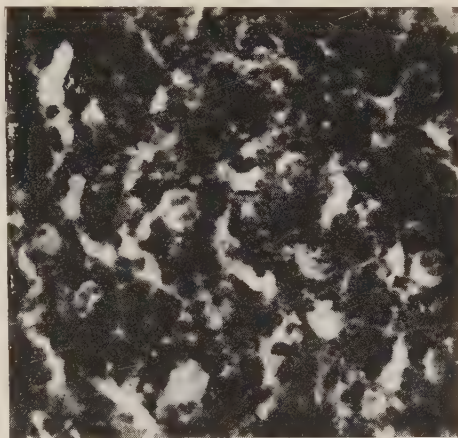


Fig. 4. - Cellule vitelline nella riserva vitellina. Mac Manus; 740X.

in uno stretto alone perinucleare, con due ammassi più grossi in posizioni diametralmente opposte; il tutto è PAS-negativo.

Nelle cellule vitelline più grosse, situate al centro dei vitellogeni, il nucleo è rigonfio e la cromatina, Feulgen-positiva, più dispersa; il nucleolo e le piccole granulazioni descritte sono sempre pironinofili. I materiali pironinofili perinucleari sono ancora visibili; le sferule citoplasmatiche, Feulgen-negative ma debolmente colorate dal verde metile, sono disposte alla periferia delle cellule e mostrano la parte centrale pironinofila e una debole PAS-positività. Il citoplasma presenta delle zone intensamente PAS-positive, che non assumono nessuna altra colorazione, ma che sono nettamente visibili, nei preparati non colorati, in contrasto di fase. Sono pure visibili piccole granulazioni fortemente PAS-positive, che assumono il verde luce e la pironina. La digestione salivare fa scomparire l'intensa PAS-positività dalle zone e granulazioni citoplasmatiche, dimostrando che esse contengono glicogeno. La debole PAS-positività delle sferule invece resiste alla digestione salivare.

Nella riserva vitellina (figg. 3 e 4), le cellule sono più voluminose che nei vitellogeni, mentre il nucleo appare contratto con la cromatina addensata,

Feulgen-positiva; il nucleolo è grosso, pironinofilo e PAS-negativo. Il citoplasma ha perduto la pironinofilia attorno al nucleo, mentre la PAS-positività, dovuta a glicogeno, si è estesa ed è aumentata.

Il trattamento con ribonucleasi fa scomparire la pironinofilia da tutti i costituenti cellulari, tranne che dalle minute granulazioni nucleari e dal centro delle sferule citoplasmatiche: solo per questi ultimi costituenti essa non è quindi indice di un contenuto in RNP. Tutte le cellule vitelline, diversamente da quanto affermò Schubmann⁽⁷⁾, sono provviste di membrana citoplasmatica, pironinofila e PAS-negativa.

I gonociti che si trovano nell'ovario presentano tutti gli stadi di maturazione, da ovogoni a ovociti in secondo periodo di accrescimento. Il materiale cromatinico nucleare è perciò visibile sotto forma di cromosomi mitotici, meiotici e piumosi: questi ultimi sono solo debolmente Feulgen-positivi. Il nucleolo accresce fortemente la sua pironinofilia con il progredire della maturazione, mentre, nello stesso tempo, aumenta la quantità dei materiali pironinofili filamentosi nel citoplasma. La colorabilità con il metodo di Mac Manus è nulla per gli ovogoni e diviene sensibile per il nucleolo, il citoplasma e la membrana cellulare, negli ovociti in secondo periodo di accrescimento. La pironinofilia scompare completamente dopo trattamento con ribonucleasi.

Nell'ovidotto gli ovociti hanno le medesime caratteristiche descritte sopra. La pironinofilia però è un po' diminuita nel citoplasma e nel nucleolo, che è ora molto voluminoso e vacuolizzato. Manca completamente il terzo periodo di accrescimento e, quindi, l'accumulo di sostanze di riserva nel citoplasma.

Nell'ootipo e nel tratto iniziale dell'utero confluiscono gli spermatozoi, le cellule vitelline e gli ovociti, che si riuniscono a formare le uova con il loro guscio (figg. 5 e 6). Le cellule vitelline, studiate con le colorazioni di Feulgen e del verde metile-pironina, hanno le caratteristiche tintoriali descritte per la riserva vitellina, ma non presentano più le sferule citoplasmatiche.

Con il metodo di Mac Manus, il citoplasma risulta ancora infarcito di zolle intensamente PAS-positive, contenenti glicogeno, che non sono colorabili in altra maniera e che non corrispondono alle sferule. L'esame dei preparati dimostra chiaramente che una parte di tali formazioni, senza che si scorgano mai attraversare come tali la parete cellulare, si riversano all'esterno, ove confluiscono in goccioline sempre più grandi; le più voluminose si modificano sostanzialmente, trasformandosi in blocchi sferoidali, PAS-negativi, di tinta gialla simile a quella del guscio delle uova già formate e dovuta a colorazione propria. Tali blocchi, crescendo di volume, rimangono omogenei solo alla loro periferia, mentre al centro acquistano una struttura granulare (che sembra data da goccioline assai stipate e molto rifrangenti); dal loro confluire attorno ad accumuli di cellule vitelline con un ovocita, si va gradualmente formando il guscio omogeneo delle uova. Frattanto, intorno alle cellule vitelline continuano ad apparire goccioline giallastre, derivate dalla tra-

(7) W. SCHUBMANN, op. cit. (1905).

sformazione di materiali PAS-positivi, che vanno ad ispessire e a rafforzare dall'interno il guscio già costituito.

Le cellule vitelline, alla fine di tale intensa attività, appaiono lievemente diminuite di volume; il nucleo è contratto e il nucleolo meno pironinofilo. Nel citoplasma si trovano ancora minute granulazioni pironinofile e altre più voluminose PAS-positive, provviste di glicogeno. La membrana è assottigliata ma sempre visibile.

Il guscio e le goccioline giallastre da cui sta formandosi sono intensamente pironinofili, anche dopo i trattamenti destinati ad asportare i RNP.



Fig. 5. — Due uova con il guscio in formazione; in uno è visibile l'ovocita. Verde metile-pironina; 740X.

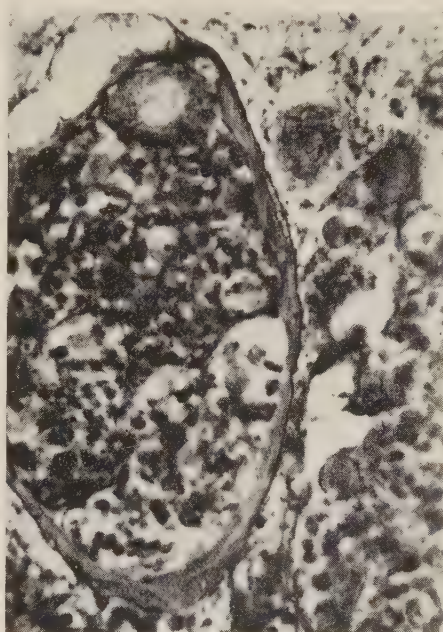


Fig. 6. — Uovo con il guscio in formazione; è visibile l'ovocita. Mac Manus; 740X.

L'ovocita, nelle uova in formazione (figg. 5 e 6), si trova generalmente ad una estremità e il suo aspetto non è sensibilmente modificato rispetto all'ultima descrizione. Il nucleo, tuttavia, non è più così regolarmente sferoidale, ma ha un contorno un po' irregolare. Durante il tragitto delle uova con guscio nell'utero, la pironinofilia del nucleolo e del citoplasma diminuisce gradualmente, mentre aumenta di poco la PAS-positività di quest'ultimo e della membrana cellulare. Frattanto prosegue la maturazione dell'ovocita: nel tratto medio e terminale dell'utero esso raggiunge la metafase della prima divisione maturativa; la membrana nucleare si dissolve, le tetradi diventano evidenti e intensamente Feulgen-positive. Il pronucleo maschile, tuttora in stato di quiescenza, è visibile come un ammasso cromatinico tondeggiante; il citoplasma conserva una pironinofilia diffusa e una lieve PAS-positività, che scompare dopo digestione salivare.

Dalle osservazioni finora compiute e sommariamente esposte, si possono trarre le prime conclusioni ed affacciare le prime ipotesi sull'attività e sul significato funzionale dei costituenti cellulari presi in esame, mettendole, per quanto è possibile, in relazione con i dati degli Autori precedenti.

Le cellule vitelline, sin dalle prime fasi del loro sviluppo, presentano un nucleolo carico di RNP. In un tempo immediatamente successivo tali sostanze si trovano abbondanti anche nel citoplasma, raccolte soprattutto intorno al nucleolo. Ciò ben si accorda con l'interpretazione che la comparsa di RNP citoplasmatici sia in relazione con l'attività nucleolare. Nelle cellule che si trovano in queste condizioni, inizia la produzione e l'accumulo degli inclusi sferoidali, probabilmente in conseguenza dell'arricchimento del citoplasma in RNP: infatti questi si rarefanno dopo che tali sferule si sono formate in gran numero. Tale successione di fenomeni sembra dimostrare la partecipazione dell'apparato nucleolare alle attività anaboliche che si svolgono nelle cellule vitelline, in modo analogo a quanto è stato constatato in molti altri casi. Da notare che le sferule, la cui genesi sembra in relazione alla presenza nel citoplasma di RNP, ne sono del tutto prive; la pironinofilia, peraltro debole, essendo dovuta ad altra causa.

Una seconda fase dell'attività dei RNP ancora presenti nel citoplasma, potrebbe forse consistere nella comparsa delle zone intensamente PAS-positive nelle cellule vitelline più grandi, in cui le sferule si sono accumulate alla periferia. Questo assetto permette di escludere, almeno per ora, una derivazione dei materiali PAS-positivi dalle sferule citoplasmatiche; tale ipotesi sembra confermata dalla costante difficoltà di colorazione dei primi, che tuttavia sono riconoscibili in contrasto di fase. Il fatto è ancor più evidente nella riserva vitellina, dove il citoplasma risulta infarcito di zolle PAS-positive, mentre alla periferia delle cellule si trovano le sferule, colorabili facilmente con gli abituali mezzi istologici. I RNP sono a questo punto assai rarefatti, forse perché utilizzati totalmente dal citoplasma e non più rimpiazzati dal nucleolo.

I fenomeni che si svolgono nelle cellule vitelline nel loro insieme sono abbastanza corrispondenti a quelli che avvengono negli ovociti in terzo periodo di accrescimento, in cui invece si elabora il tuorlo.

Gli ovociti si sviluppano nell'ovario con le modalità consuete. Durante il secondo periodo di accrescimento, come di norma, il nucleolo si ingrandisce fortemente e il citoplasma si infarcisce di materiali interpretabili come RNP. In seguito, quando gli ovociti raggiungono le massime dimensioni, il contenuto in RNP diminuisce, ma non si osserva la comparsa di tuorlo; pertanto, sebbene manchi il terzo periodo di accrescimento, caratteristico degli ovociti della maggior parte degli animali, il secondo periodo si svolge in modo regolare.

Il meccanismo della costituzione, nell'ootipo e nel tratto iniziale dell'utero, di uova contenenti qualche decina di cellule vitelline e un ovocita, ha attratto da tempo l'attenzione degli studiosi. La maggior parte di essi ha descritto la presenza di globuli o granuli nelle cellule vitelline ed ha ammesso

la loro diretta partecipazione alla genesi del guscio ⁽⁸⁾, non avendo, generalmente, osservato quelle formazioni che io ho indicato come zolle PAS-positive contenenti glicogeno. Vialli, Stephenson e Romanini ⁽⁹⁾ hanno dimostrato la presenza di polifenoli nelle sferule delle cellule vitelline, ma solo quest'ultima, confermando con il metodo di Bauer i dati di Ortner-Schönbach ⁽¹⁰⁾, ha rilevato che non esiste identità fra i granuli che contengono glicogeno e quelli che danno le reazioni dei fenoli: questi potrebbero quindi essere le sferule citoplasmatiche, mentre i primi potrebbero essere le zolle o, successivamente, le gocce PAS-positive.

In base alle mie osservazioni penso sia giustificato ritenere che il secreto PAS-positivo delle cellule vitelline abbia una parte fondamentale nel contribuire alla formazione del guscio, mentre le sferule, visibili già nei vitellogeni in cellule di medie dimensioni, non sembrano parteciparvi direttamente. Prime a formarsi sono le sferule; in un secondo tempo prendono origine, in un'altra parte del citoplasma, le zolle PAS-positive; nella riserva vitellina sono presenti sia le sferule, disposte solo alla periferia, sia, contemporaneamente, le zolle di materiali PAS-positivi contenenti glicogeno, che infarcono tutta la cellula. Poi le sferule vanno scomparendo dalle cellule vitelline, quando queste hanno raggiunto l'ootipo, mentre la PAS-positività aumenta ancora. Si potrebbe pensare che la scomparsa delle sferule preceda l'emissione dei polifenoli attraverso la parete delle cellule vitelline. Rimane aperto il problema della riunione e rielaborazione dei polifenoli con le sostanze PAS-positive, per formare le goccioline giallastre e, successivamente, il guscio delle uova; questo, secondo Stephenson ⁽¹¹⁾, sarebbe di natura sclerotinica e deriverebbe dalla ossidazione dei polifenoli in chinoni e dal successivo legame di questi con sostanze di natura proteica.

Dopo la formazione del guscio e il rafforzamento di questo dall'interno, le cellule vitelline, avendo terminato un periodo di intensa attività, sono destinate, con il loro contenuto di glicogeno, al nutrimento dell'embrione. L'ovocita, che passa direttamente dal secondo periodo di accrescimento alla metafase della prima divisione, maturativa, non si carica mai di tuorlo; il suo contenuto in RNP viene evidentemente utilizzato per la costruzione del citoplasma ovulare specifico e non per quella di sostanze nutritive di riserva. Si può pensare pertanto che l'aumento della PAS-positività del citoplasma degli ovociti, durante il percorso delle uova nell'utero, derivi dall'assorbimento di sostanze provenienti dalle cellule vitelline e che queste esercitino, durante lo sviluppo degli embrioni, quelle funzioni che in altri gruppi di organismi sono svolte dai lipoprotidi del tuorlo.

(8) W. STEPHENSON, op. cit. (1947); J. D. SMYTH, op. cit. (1951); H. K. YOSUFZAI, op. cit. (1952, 1953); ecc.

(9) M. VIALLI, op. cit. (1933); W. STEPHENSON, op. cit. (1947); M. G. ROMANINI, op. cit. (1947).

(10) P. ORTNER-SCHÖNBACH, *Zur Morphologie des Glykogens bei Trematoden und Cestoden*, « Arch. Zellf. », vol. 11, p. 413 (1913).

(11) W. STEPHENSON, op. cit. (1947).

Fisiologia. — *Sulla determinazione del grado di disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa*^(*). Nota^(**) di GIUSEPPE ALIBRANDI, presentata dal Socio C. CIACCIO.

L'adeguata stimolazione faradica dei centri sensitivo-motori della zona sigmoidea della corteccia cerebrale produce nei cani l'insorgenza di accessi epilettiformi tranne che negli animali neonati, nei giovanissimi ed in una limitatissima percentuale di adulti (circa il 2% secondo Amantea)⁽¹⁾.

La sistematica determinazione del grado di eccitabilità faradica della corteccia cerebrale dei cani capaci di presentare accessi di epilessia ha permesso ad Amantea di dimostrare che nel 25% dei casi si nota una eccitabilità assai più elevata⁽¹⁾. In questo gruppo di cani, caratterizzati di solito, secondo Amantea, da un carattere mordace e violento, l'esplorazione verso l'epilessia sperimentale riflessa⁽²⁾ eseguita stricninizzando un determinato centro sensitivo motore corticale e stimolando quindi la corrispondente zona cutanea riflessogena suole risultare positiva⁽¹⁾.

Nel gruppo di questi animali da Amantea chiamati predisposti si sono osservate sicure differenze nel grado di disposizione. Dai casi di debole predisposizione in cui gli accessi si ottengono con molta difficoltà e possono addirittura restare circoscritti a pochi gruppi muscolari (accessi di epilessia jacksoniana) si giunge, per gradi, ai casi di decisa disposizione in cui possono evocarsi con facilità numerosi accessi ed ai casi di fortissima disposizione in cui gli accessi possono provocarsi anche senza la previa stricninizzazione centrale od in cui, in maniera talora apparentemente spontanea, s'instaura uno « status epilepticus ».

Dalle osservazioni di Amantea⁽³⁾ è pure noto che l'adeguata somministrazione di morfina determina artificialmente negli animali non predisposti condizioni che rendono possibile l'insorgenza di accessi di epilessia riflessa. Negli animali predisposti la morfina facilita l'insorgenza dell'accesso e pertanto Amantea ha sostenuto che dalla dose di morfina necessaria per ottenere il massimo effetto epilettogeno possa indirettamente dedursi il grado di disposizione⁽¹⁾.

La misura dell'eccitabilità faradica dei centri corticali sigmoidei per quanto rappresenti un mezzo assai grossolano rispetto alla determinazione della cronassia degli stessi^{(4) (5)} riesce tuttavia, come sopra abbiamo detto, a mettere in evidenza differenze talora notevoli tra i vari animali. Questa

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale della Università di Messina.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1955.

(1) G. AMANTEA, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1926, vol. I, fasc. IV.

(2) G. AMANTEA, « Il Policlinico Sez. Med. », 1920; « Pflüger's Arch. f. d. ges. Phys. », 1921, 188, 287; « Boll. R. Acc. Med. », Roma, 1920 e 1923-24.

(3) G. AMANTEA, « Boll. R. Acc. Med. », Roma, 1923-24.

(4) L. LAPICQUE, *L'excitabilité en fonction du temps*, Parigi 1926,

(5) M. OZORIO DE ALMEIDA e G. MARTINO, « Arch. Fisiol. », 32, 593 (1933).

misura potrebbe già rappresentare pertanto un indiretto criterio per la determinazione del grado di disposizione. L'elevata eccitabilità elettrica dei centri corticali non è però necessariamente legata all'esistenza dello stato di disposizione. Infatti la soglia dell'eccitabilità elettrica può notevolmente essere abbassata da alcuni mezzi farmacologici, quali la stricnina, senza che ciò induca uno stato di artificiale disposizione ⁽⁶⁾.

La stimolazione elettrica della corteccia cerebrale è inoltre capace, a causa dei fenomeni di facilitazione da essa determinati, di accrescere il grado di eccitabilità dei centri e può inoltre, in animali fortemente predisposti, determinare lo scoppio di accessi di epilessia faradica ancor prima che si riesca a determinare la soglia dei centri.

Per questi motivi volendo misurare il grado di disposizione dell'animale, specialmente se questo deve essere utilizzato ulteriormente, può essere inopportuno determinare la soglia dell'eccitabilità faradica oppure ricorrere all'uso della morfina che pur inducendo uno stato di disposizione produce nel sistema nervoso dell'animale alterazioni funzionali complessivamente ben diverse da quelle indotte dal fattore disponente naturale.

L'analisi dei fattori capaci di indurre un artificiale stato di disposizione in cani non predisposti ^(3, 7, 8, 9, 10) ha indotto A. Alibrandi a formulare l'ipotesi che lo stato di disposizione sia naturale che artificiale sia condizionato da un abnormemente elevato valore dell'effetto postumo degli eccitamenti che attingono i centri sensitivo-motori ⁽¹¹⁾. Così gli effetti di impulsi centripeti susseguentisi ad un determinato intervallo possono, sommandosi, riuscire epilettogeni negli animali a livello della cui corteccia cerebrale essi perdurino abnormemente (animali predisposti) mentre non riescono epilettogeni negli animali a livello della cui corteccia essi non riescano a sommarsi o a sommarsi adeguatamente (animali non predisposti) ⁽¹²⁾.

(6) Il fatto che la stricnina, pur elevando notevolmente l'eccitabilità faradica corticale, non sia capace di indurre un artificiale stato di disposizione è, secondo le vedute di A. Alibrandi, dovuto alla sua azione elettiva in senso positivo sul solo effetto primario degli eccitamenti afferenti (F. BREMER, « Arch. internat. Physiol. », 58, 53 (1943)). Le sostanze invece, quali la prostigmina ed i fosfati, capaci di accrescere elettivamente l'effetto centrale postumo degli eccitamenti afferenti non solo abbassano la soglia dell'eccitabilità elettrica corticale ma possono anche nello stesso tempo indurre uno stato di artificiale disposizione.

(7) G. MARTINO, « Arch. Fisiol. », 29, 412 (1931); *ibidem*, 31, 186 (1932).

(8) A. ALIBRANDI, questi « Rendiconti », 4, 240 (1948).

(9) A. ALIBRANDI, « Arch. Fisiol. », 49, 105 (1949).

(10) A. ALIBRANDI, « Atti Soc. Lomb. Sc. Med. e Biol. », 5, 120 (1949-50).

(11) A. ALIBRANDI, questi « Rendiconti », 12, 337 (1952).

(12) Nel nostro laboratorio avevamo già da lungo tempo costantemente osservato come la frequenza epilettogena critica delle correnti, sia sinusoidali che quadrate, applicate alla corteccia cerebrale del cane fossero in stretta dipendenza col grado di disposizione dell'animale. A parità di ogni altra condizione gli accessi di epilessia faradica insorgono negli animali predisposti ad una frequenza notevolmente più bassa di quella occorrente a provocare l'epilessia negli animali non predisposti. Il rapporto tra grado di disposizione e grado della tendenza alla sommazione degli impulsi è quindi di tutta evidenza. Il Battelli sin dal 1900 aveva pure osservato come la frequenza della corrente stimolante avesse una grande

Basandosi su queste vedute una razionale determinazione del grado di disposizione verso l'epilessia riflessa avrebbe potuto essere appunto rappresentata dalla determinazione del valore della frequenza critica della stimolazione cutanea riflessogena.

Da qui l'origine delle esperienze di cui ora riferiamo brevemente i risultati.

In cani preparati secondo la tecnica di Amantea la stimolazione della zona cutanea riflessogena eseguita mediante un impulsatore elettronico ha dimostrato che a parità di concentrazione del fattore preparante agente a livello del centro ed a parità di dimensioni e di forma dello stimolo elettrico agente su un determinato punto della zona cutanea riflessogena la frequenza epilettogena critica (cioè la più bassa frequenza degli stimoli portati sulla cute capace di rivelarsi epilettogena) è in stretto rapporto col grado di disposizione dell'animale. I gradi intermedi di disposizione possono così essere determinati con molta esattezza. Le sostanze attive in senso positivo sul fenomeno dell'«after-discharge» centrale diminuiscono il valore della frequenza epilettogena critica, le sostanze capaci di agire in senso negativo su questo fenomeno aumentano invece tale valore.

Queste semplici esperienze da un lato confermano le vedute di A. Alibrandi sulla genesi dello stato di disposizione⁽¹⁾ e dall'altro forniscono un metodo per saggiare razionalmente lo stato dei centri nonché l'azione di alcuni dei farmaci agenti su di essi.

Patologia. — *Sulla etiologia virale di una meningo-encefalite benigna riscontrata nelle Marche*⁽²⁾. Nota^(**) di ITALO ARCHETTI, ADALBERTO FELICI, VITTORIO MIGLIORI e FRANCO RUSSI, presentata dal Corrisp. D. MAROTTA.

Da alcuni anni si riscontra nelle Marche, e particolarmente nella provincia di Ancona, una forma di meningo-encefalite asettica, benigna, a carattere epidemico e a comparsa prevalentemente estiva.

Tale malattia, ad etiologia ancora sconosciuta, è stata ripetutamente riscontrata da uno di noi sin dal 1948⁽¹⁾.

Essendosi quest'anno manifestata una nuova epidemia di tale affezione, abbiamo voluto indagare sul problema etiologico della malattia stessa.

importanza nei riguardi dell'effetto epilettogeno: correnti di basso voltaggio prive di effetto epilettogeno a frequenza bassa diventano epilettogene se se ne aumenta soltanto la frequenza. (F. BATTELLI, *Travaux du Laboratoire de Physiologie de l'Université de Genève*, 1900, p. 43). Dalle osservazioni del Battelli appariva chiaro come, a parità di ogni altra condizione, l'effetto epilettogeno di una corrente alternata aumenti, sino ad un certo limite (150 periodi) con l'aumentare della frequenza, ma che la frequenza epilettogena critica potesse dipendere dalla individualità dell'animale è stato per la prima volta intravisto dalla nostra Scuola⁽²⁾.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità, Laboratorio di Microbiologia, e nell'Ospedale Civile di Ancona.

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1955.

(1) F. RUSSI, «Acc. Med.», 5, 232 (1948).

Sono stati presi sinora in considerazione 230 pazienti, le cui feci, liquor e gargarizzati sono stati seminati su colture *in vitro* di cellule renali di scimmia.

Da queste colture abbiamo isolato 100 ceppi di un agente virale a netta e caratteristica azione citopatogena.

Tali ceppi vennero isolati dalle sole feci in 14 casi; dal solo liquor in 28 casi; dal solo gargarizzato in 12 casi. Vennero contemporaneamente isolati dalle feci e dal liquor in 6 casi, dalle feci e dal gargarizzato in 9 casi, dal liquor e dal gargarizzato in 8 casi.

Stiamo ora studiando i vari ceppi isolati allo scopo di identificarli prima, e di stabilire poi il loro valore etiopatogenetico nella affezione riscontrata. Dalle prime indagini espletate ci stiamo orientando verso la diagnosi di meningite asettica da virus del gruppo Coxsackie.

Biologia. — *Azione di frazioni di estratti embrionali di «Bufo» su larve ed espianti di Urodeli e di «Discoglossus»* (*). Nota (**) di MALTESE CONCETTA e POLLICITA MARIA, presentata dal Socio G. COTRONEI.

È noto che se si eseguono trapianti di abbozzi di organi tra embrioni di Anuri e Urodeli, alcune combinazioni si dimostrano «compatibili», altre invece «incompatibili». È stato precisato, in questa ultima condizione, che la «incompatibilità» è dovuta a sostanze tossiche che danneggiano o l'ospite o il trapianto (Bytinski-Salz, 1928 ⁽¹⁾; Cotronei e Perri, 1934 ⁽²⁾; Twitty, 1937 ⁽³⁾; Reverberi, 1939 ⁽⁴⁾; Giacomelli 1940 ⁽⁵⁾).

Recenti risultati hanno mostrato che le sostanze tossiche in questione sono presumibilmente di natura proteica (Maltese, 1955) ⁽⁶⁾; ed è stato dato inizio, col metodo della coltivazione di abbozzi di organi embrionali in estratti xenospecifici, allo studio del meccanismo con cui si esercita l'azione tossica sui tessuti. (Pollicita, 1955) ⁽⁷⁾.

Il presente lavoro è continuazione di quelle ricerche.

PREPARAZIONE E FRAZIONAMENTO DELL'ESTRATTO EMBRIONALE. — Alcune migliaia di uova (circa 3500) di *Bufo bufo* o *Discoglossus pictus*, a diversi stadi di sviluppo (blastula, gastrula, neurula, bottone codale) furono liberate dalla gelatina con acido tioglicolico al 2% neutralizzato con idrato di sodio.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Palermo e Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 4 ottobre 1955.

(1) H. BYTINSKI-SALZ, «Roux' Arch.», 114, 666 (1928).

(2) G. COTRONEI e T. PERRI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», 20 (1934).

(3) C. V. TWITTY, «J. Exp. Zool.», 76, 67 (1937).

(4) G. REVERBERI, «Arch. Zool. It.», 26 (1939).

(5) A. GIACOMELLI, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», 15, 1195 (1940).

(6) C. MALTESE, «Ricerca Scientifica», 25, 92 (1955).

(7) M. POLLICITA, «Ricerca Scientifica», 25, 95 (1955).

Dopo ripetuti lavaggi esse vennero omogeneizzate a freddo (4°C): quindi, sempre a freddo, vennero estratte per 16 ore con $0,65\%$ NaCl in $0,01\text{ M}$ buffer fosfato a pH 7,3 (secondo il metodo di Gregg e Ballentine, 1946).

L'estratto venne dializzato e quindi centrifugato ($24.000 \times \text{g}/20$ minuti); si ottennero tre strati: una pellicola di grassi al polo centripeto, uno strato jalino nel mezzo e una parte ricca di pigmento al polo centrifugo: fu utilizzato lo strato jalino.

La estrazione frazionata di esso fu compiuta con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ a concentrazioni diverse (30% - 40% - 50% di saturazione). Dopo 12 ore di soggiorno a 0°C , il precipitato veniva allontanato mediante centrifugazione, e il supernatante veniva dializzato.

In ciascuno degli estratti frazionati fu determinato l'azoto (micro-Kjeldahl-seguito da Nesslerizzazione) e fatta la reazione del biureto.

La determinazione dell'azoto in tutte le frazioni ha dato valori via via decrescenti dall'estratto grezzo alla frazione ottenuto col solfato al 50% di saturazione.

La reazione del biureto è positiva sia nell'estratto grezzo sia nelle frazioni col solfato al 30% e 40% saturazione; la colorazione risulta meno intensa in quest'ultima frazione. Nella frazione ottenuta col solfato al 50% la reazione è negativa.

Gli estratti frazionati diluiti furono saggiati o su embrioni interi o su territori embrionali presuntivi (ectoderma cefalico; bottone codale; territorio neuro-somitico).

ESPERIENZE.

A) Azione degli estratti su embrioni in toto.

I. Embrioni di *Triton cristatus* allo stadio 46 di Harrison furono messi a soggiornare: a) in estratto grezzo di *Bufo bufo*; o rispettivamente nei supernatanti dopo precipitazione con: b) 30% ; c) 40% ; d) 50% di saturazione $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$.

Gli estratti e supernatanti erano diluiti 1:10 (una parte di estratto contro 9 parti di acqua di fonte).

Come controllo servirono embrioni di *Bufo* in estratto acquoso omospecifico.

a) Larve di *Triton* in estratto grezzo di *Bufo*. Dopo 15 minuti circa (temperatura ambiente 24°C) presentano delle alterazioni a carico della circolazione e del sistema neuro-muscolare. La circolazione si rallenta, i battiti cardiaci si fanno aritmici e più radi; in corrispondenza della aorta si formano dei coaguli sanguigni. Dopo circa 80 minuti si ha arresto completo della circolazione.

Contemporaneamente si osservano contrazioni tetaniche dei muscoli del dorso, degli arti, delle branchie e della testa; si nota una diminuita sensibilità agli stimoli meccanici e una caratteristica torsione del corpo sul fianco sinistro. Tali fenomeni si accentuano sempre di più fino all'arresto completo di qualsiasi funzione, cui segue la morte.

°
o 40° di saturazione.

b) Larve di *Triton* in estratto di *Bufo* trattato con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ al 30° o 40° di saturazione.

Le larve presentano tutte le alterazioni descritte precedentemente.

c) Larve di *Triton* in estratti di *Bufo* trattato con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ a 50° di saturazione: in questo estratto non si nota nelle larve alcun effetto tossico.

II. Larve di *Axolotl* allo stadio 46 di Harrison in estratto grezzo di *Bufo* ed in estratto trattato con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ al 30°, 40° e 50° di saturazione.

In questa serie di esperienze le larve di *Axolotl* presentano le stesse alterazioni descritte precedentemente per *Triton*: cioè gli estratti al 30° e al 40° di saturazione si dimostrano tossici, mentre quello al 50° è innocuo.

III. Larve di *Discoglossus pictus* in estratto grezzo di *Bufo*, o in estratti ottenuti con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ al 30°, 40° di saturazione. Presentano paralisi completa seguita da morte come nei casi precedenti. La frazione al 50° non è tossica.

B) *Azione degli estratti su abbozzi di organi in condizione di espianto.*

I. Frammenti di ectoderma cefalico, prelevati da gastrule iniziali di *Discoglossus pictus*, sono stati coltivati in estratto grezzo di *Bufo* e in estratti ottenuti con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ al 30°, 40°, 50° di saturazione (diluito con Ringer 1:1000).

Come controlli servirono gli abbozzi coltivati in Ringer o in estratto grezzo omospecifico.

a) Gli abbozzi coltivati in estratto grezzo, dopo solo 24 ore presentano ispessimento dell'epidermide e sfaldamento delle cellule, cui segue la degenerazione.

b) Gli abbozzi di organi in estratto ottenuto con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ al 30° al 40° di saturazione presentano un comportamento analogo al precedente.

c) Gli abbozzi in estratto da $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ al 50° non subiscono alcuna degenerazione ma durano in ottime condizioni per alcuni giorni.

Lo studio istologico di questi preparati ha messo in evidenza per i casi a) e b) un notevole rigonfiamento delle cellule epidermiche: queste circondano una massa di cellule indifferenziate ricche di tuorlo. Per il caso c) lo strato epidermico è di spessore normale ed internamente ad esso si notano organizzazioni specifiche (tubo neurale).

II. Territori neuro-somitici di *Discoglossus pictus* (stadio neurula), sono stati coltivati in estratto grezzo di *Bufo* o in estratto con $(\text{NaH}_4)_2\text{SO}_4$ al 30°, 40°, 50° di saturazione.

a) In estratto grezzo si sono accresciuti ben poco, hanno presentato movimenti ciliari molto lenti e non hanno dimostrato alcuna sensibilità agli stimoli meccanici.

b) In estratti al 30° e al 40° di saturazione si sono comportati in modo simile al caso precedente.

c) In estratto al 50 % di saturazione, invece si sono accresciuti notevolmente, hanno presentato attivi movimenti ciliari e contrazioni muscolari.

Lo studio istologico ha mostrato nei casi a) e b) cellule epiteliali straordinariamente ingrandite; all'interno un accenno di differenziamento di tubo neurale, corda e somiti: le cellule di queste strutture contengono però una quantità notevole di tuorlo. Nel caso c) si notano delle strutture bene organizzate e la quantità di tuorlo presente nelle cellule è minima.

III. Bottone codale di *Axolotl* (St. 37-38 Harrison) è stato coltivato in estratto grezzo di *Bufo*, o in estratto ottenuto con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ al 30 %, 40 % o 50 % di saturazione.

a) In estratto grezzo o in estratto $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ al 30 % o 40 % di saturazione, già dopo 24 ore di trattamento i pezzi, carnosi e opachi, si sono incurvati e le cellule epidermiche hanno cominciato a sfaldarsi.

b) In estratto al 50 % di saturazione i pezzi si accrebbero, e divennero molto trasparenti e sensibili agli stimoli. La pigmentazione fu del tutto normale.

Nelle sezioni istologiche dei pezzi trattati come in a) fu notato ingrandimento delle cellule epidermiche e presenza di tuorlo. Le strutture tipiche erano presenti ma non bene organizzate.

CONCLUSIONI. - I risultati della presente indagine possono così compendersi:

La sostanza tossica è presente nelle frazioni (supernatanti) ottenute dopo trattamento con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ al 30 % e 40 % di saturazione. Dopo precipitazione al solfato di ammonio al 50 % di saturazione invece, il supernatante non presenta più tossicità.

In esperimenti precedenti era stato dimostrato che gli estratti acquosi di *Bufo*, dallo stadio di blastula fino a bottone codale, contengono delle sostanze tossiche per gli embrioni e per gli abbozzi di organi di *Triton*, *Axolotl* e *Discoglossus*. Si era inoltre formulata l'ipotesi che si trattasse probabilmente di una sostanza di natura proteica.

I fatti che: a) il principio attivo non viene precipitato da solfato di ammonio al 30 % e 40 % di saturazione; b) la reazione del biureto è positiva e più intensa nei supernatanti a più bassa concentrazione di $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$; c) la quantità di azoto presente nelle varie frazioni è decrescente dall'estratto grezzo ai vari supernatanti; sono a favore di questa ipotesi.

Esperimenti non riferiti in questo lavoro hanno mostrato che gli estratti embrionali di *Discoglossus* non hanno effetto tossico su embrioni di Urodeli. Gli estratti di *Discoglossus* ricavati invece dopo metamorfosi, si manifestano tossici: questi ultimi dati dovranno però essere più validamente confermati.

I risultati riferiti in questo lavoro concordano dunque con i risultati ottenuti con il metodo dei trapianti, in cui le combinazioni *Discoglossus* \times *Triton* non presentano alcuna incompatibilità, mentre le combinazioni *Bufo* \times *Triton*, *Bufo* \times *Discoglossus*, *Bufo* \times *Axolotl*, sono incompatibili.

Biologia. — *Su trapianti xenoplastici di arto* (*). Nota (**) di MARIA DURANTE (***), presentata dal Socio G. COTRONEI.

È noto che gli arti degli Urodeli hanno la capacità di rigenerare. Questo fatto, verificato sia su larve che su animali adulti, ha suscitato una serie di problemi, il cui interesse e la cui soluzione occupano tutt'ora gli studiosi. Alcuni di tali problemi sono i seguenti: 1° l'origine delle cellule che costituiscono il blastema di rigenerazione; 2° la velocità del processo rigenerativo; 3° la forma del rigenerato. Questi problemi prendono un significato tutto particolare nel caso in cui l'arto rigenerante è xenospecifico.

1° Che le cellule del blastema siano le stesse che si trovano sulla superficie di amputazione e non provengano da lontane regioni del corpo è stato mostrato in diverse maniere: arti aploidi su ospiti diploidi (Hertwig, 1927) ⁽¹⁾, danno, dopo amputazione, nuovi arti di rigenerazione con cellule aploidi, fatta eccezione per l'epidermide; un arto di Salamandra che sia stato trapiantato xenoplasticamente su Rana (Guyénot, 1927) ⁽²⁾ dà, dopo amputazione, un rigenerato che è tipicamente di Salamandra.

Dell'origine delle cellule del blastema di rigenerazione si è occupato recentemente Heath (1953) ⁽³⁾.

2° Per quanto riguarda il ritmo di accrescimento del rigenerato vanno ricordate le recenti esperienze di Anton (1955): ⁽⁴⁾ questo Autore scambiò l'abbozzo dell'arto anteriore di *Triton vulgaris* con quello di *Triton cristatus*. L'arto eterospecifico che si sviluppò dal trapianto fu successivamente amputato: la rigenerazione che ne seguì si svolse con il ritmo di sviluppo della specie *cristatus*.

3° Per quanto riguarda la forma, gli arti xenoplastici, secondo le citate esperienze di Guyénot ⁽²⁾, rigenerano con le caratteristiche di origine, senza che l'ospite eserciti su di esso alcuna influenza: ciò fu verificato anche da me (Durante 1954) ⁽⁵⁾ nel caso di trapianto di arto di *Triton cristatus* su *Discoglossus pictus*.

Dalla revisione bibliografica dei problemi sollevati dai fenomeni di rigenerazione comparve come, soprattutto, due problemi erano stati poco analizzati nelle combinazioni xenoplastiche: 1°, quello della forma del rigenerato;

(*) Centro di studio per la Citofisiologia sperimentale di Palermo.

(**) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1955.

(***) Ringrazio il prof. Giuseppe Reverberi per aver guidato le presenti ricerche e per la concessione di una borsa di studio del C.N.R.

(1) G. HERTWIG, « Roux' Arch. », *III*, 292 (1927).

(2) E. GUYÉNOT, « Rev. Suisse de Zool. », *34*, 1 (1927).

(3) H. D. HEATH, « J. Exp. Zool. », *122*, 339 (1953).

(4) H. J. ANTON, « Experientia », *11*, 154 (1955).

(5) M. DURANTE, « Rivista di Biol. » (1954).

2°, quello del destino terminale di tali arti rigenerati. A questo scopo fu impiantata la presente ricerca, con la quale si trapiantò l'abbozzo dell'arto di *Triton cristatus* sul fianco di embrioni di *Discoglossus pictus* (stadio di neurula): quando il trapianto xenoplastico, accrescendosi, dette luogo alla prima biforcazione dell'autopodio, esso venne amputato (fig. 1 a). Fu poi seguito il processo rigenerativo. Alcune esperienze furono fatte usando Axolotl invece di Triton. Dall'altra parte, il frammento amputato fu tra-

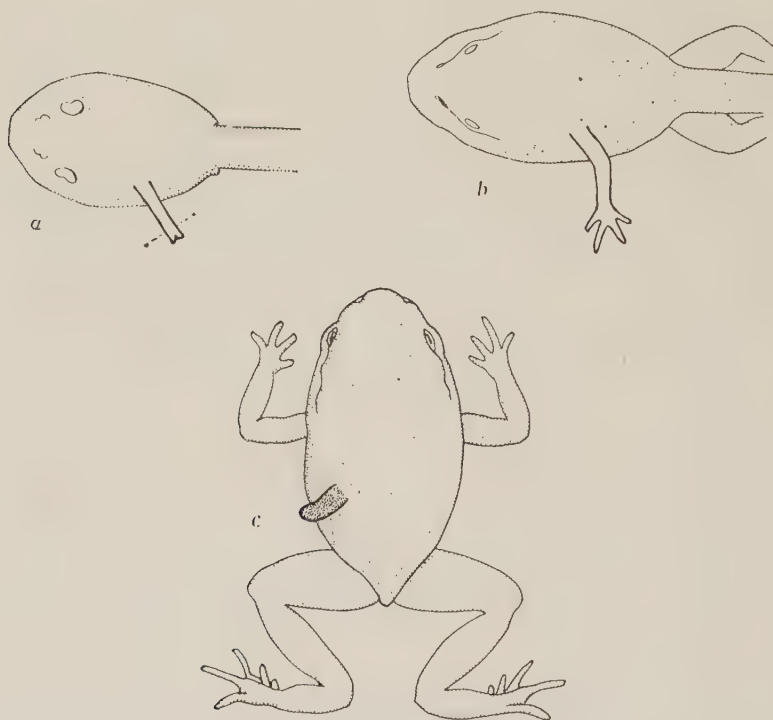


Fig. 1. - a) L'arto di Triton trapiantato su *Discoglossus* dopo un iniziale sviluppo viene amputato: b) l'arto dopo l'amputazione rigenera: c) e circa 50 giorni dopo la metamorfosi dell'ospite si riassorbe.

piantato su di un altro embrione di *Discoglossus* e anche di esso fu seguito il processo rigenerativo e il destino ulteriore (fig. 2 a). In totale furono utilizzati 27 casi.

RISULTATI.

A) L'arto amputato riprende lentamente il suo accrescimento. A termine esso dà origine a un arto completo. Esso è slanciato, esile, chiaro; cioè tipico di Triton (fig. 1 b).

La parte amputata ritrapiantata (fig. 2 a), dopo una fase statica (15-20 giorni) si sviluppò anch'essa in arto, costituito di zeugopodio, autopodio e in qualche caso anche stilopodio (fig. 2 b). Anche quest'arto è abbastanza

ben formato, per quanto talvolta le digitazioni siano meno lunghe ed esili che le normali. Nel complesso la forma è di *Triton cristatus*: anche in questo caso cioè l'ospite non ha influenzato l'arto xenoplastico.

B) Come già detto il trapianto xenoplastico di abbozzo di arto di Triton su Discoglossus, se amputato, rigenera un arto più o meno perfetto di Triton. Questo arto si mantiene a lungo sull'ospite: solo dopo 28-30 giorni dopo la metamorfosi dell'ospite comincia a riassorbirsi: diventa prima

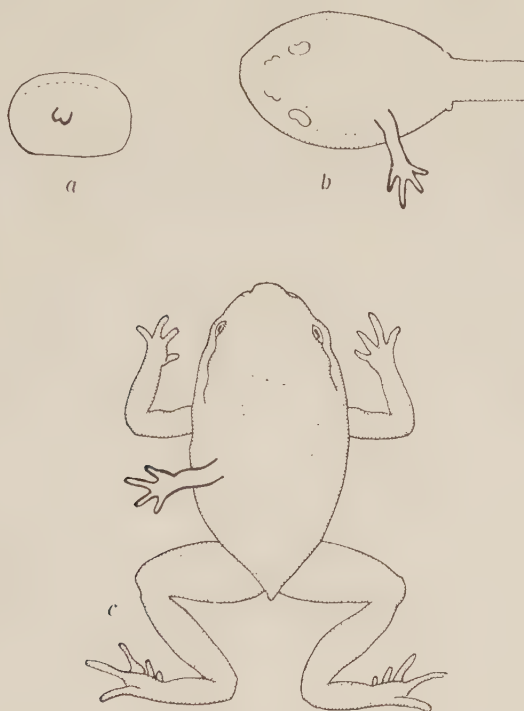


Fig. 2. - *a*) Il frammento derivato dall'amputazione di un arto di Triton trapiantato su Discoglossus, viene ritrapiantato su una neurula di Discoglossus: *b*) si sviluppa: *c*) e solo dopo 28-30 giorni comincia la propria involuzione.

scuro per accumulo di pigmento, turgido, poi gradatamente si involge. Al 50° giorno dopo la metamorfosi, l'arto è quasi completamente involuto (fig. 1 *c*).

Anche il frammento derivato dall'amputazione, ritrapiantato si sviluppa in arto, e anch'esso perdura a lungo sul fianco dell'ospite. Circa 28 giorni dopo la metamorfosi di questo (fig. 2 *c*) comincia a riassorbirsi. I due arti, che derivano dalla stessa gemmula di Triton, vivono dunque un periodo di tempo disuguale: quando il primo inizia la propria involuzione, il secondo, derivato dalla sua amputazione, è in perfetta vitalità; la sua involuzione interviene circa 20 e anche 25 giorni dopo.

A maggior chiarezza di quanto esposto riferisco uno dei protocolli di esperimento.

2/3. - Trapianto di gemma di arto di *Triton cristatus* sul fianco sinistro di una neurula di *Discoglossus pictus*.

22/3. - Dalla gemma si è sviluppato un arto di *Triton* presentante l'inizio delle prime digitazioni. La circolazione sanguigna nell'interno del trapianto xenoplastico è regolare. La pigmentazione è del tipo Urodelo, solo alla base ci sono cromatofori di *Discoglossus*. L'arto viene amputato: dalla ferita fuoriesce molto sangue; la circolazione si arresta. In *a* è riportato il destino del pezzo residuo, in *b* il destino del pezzo amputato:

a) 30/3. - L'arto ha rimarginato la ferita ed è in via di rigenerazione: si è ricostituito l'abbozzo dell'autopodio; si è ristabilita la circolazione.

13/4. - L'arto rigenerato è in ottime condizioni: ha tutte le caratteristiche dell'Urodelo di origine, soltanto è poco meno slanciato; presenta stilo- zeugo- e autopodio con le dita ancora non molto lunghe; circolazione attiva, nessuna sensibilità.

22/4. - L'arto continua il suo sviluppo ed è in condizioni ottimali; l'ospite ha superato la metamorfosi.

25/5. - L'arto è entrato in involuzione: si è molto inscurito, è diventato turgido e le digitazioni prima esili e lunghe, si sono accorciate. La circolazione prima molto ben evidente, adesso, forse per l'accumulo di pigmento, non è più visibile.

28/6. - L'arto di rigenerazione si è totalmente involuto.

b) 22/3. - La particella asportata con amputazione, viene trapiantata su una neurula di *Discoglossus pictus*.

30/3. - Il trapianto ha attecchito senza subire nessun cambiamento: non si è né accresciuto, né ridotto. Non presenta nessun elemento sanguigno. Alcuni cromatofori dell'ospite sono slittati alla sua base.

22/4. - La particella di arto, dopo essere stata in fase statica per qualche tempo adesso appare un poco allungata, e presenta l'abbozzo di una terza digitazione; nel suo interno grumi sanguigni.

20/5. - Si è sviluppato un arto abbastanza ben formato: si nota uno stilopodio molto ridotto, lo zeugo- e l'autopodio; la circolazione è piuttosto lenta; la pigmentazione è del tipo Urodelo.

28/6. - L'ospite ha superato la metamorfosi da 20 giorni: l'arto accenna a riassorbirsi.

CONCLUSIONI. - Dalle esperienze su descritte si rileva che:

1° Arti di Urodeli (*Axolotl* e *Triton*) in condizione di trapianto xenoplastico su *Discoglossus* conservano le capacità rigenerative. Il rigenerato ha tutte le caratteristiche di forma e grandezza tipiche degli Urodeli.

2° Frammenti ricavati dall'amputazione di un arto xenoplastico, ritrapiantati, si sviluppano anch'essi in arto che ha tutte le caratteristiche del territorio d'origine.

3° Il riassorbimento dell'arto xenoplastico è in dipendenza della metamorfosi dell'ospite.

Istologia. — *Ricerche istochimiche sul pigmento delle cellule nervose del « Thalamus » di Uomo* (*). Nota di GIAN CARLO ZORZOLI, presentata (**) dal Socio A. PENSA.

Nel citoplasma della maggior parte delle cellule del sistema nervoso centrale dell'Uomo è presente di solito una più o meno abbondante quantità di pigmento: pare accertato che in alcune localizzazioni si tratti di pigmento melanico (*Substantia nigra*; *Locus coeruleus*-I); generalmente però il pigmento delle cellule nervose viene considerato una lipofuscina o cromolipide. In questi ultimi anni io stesso (e collaboratori^(1, 2, 3)) ho sottoposto a ricerche istochimiche il cromolipide delle cellule nervose radicolari del midollo spinale di Uomo, e delle cellule della zona ventricolare o rossa delle *Substantia nigra* del mesencefalo di uomo, ed ho rilevato che questo pigmento (pur con lievi variazioni da granulo a granulo) presenta le seguenti reazioni:

Prove di solubilità in alcool, acetone, xilolo, cloroformio, piridina fredda ed a 60° C	—	
Sudan Nero B	+	
R. di Bauer	—	(incerta)
R. Acido Periodico-Schiff	+	
R. Acido Performico-Schiff	+	
R. Plasmale	—	
R. Pseudoplasmale	—	
R. Argentaffine	+	(non sempre intensa)
R. di Schmorl	+	(incerte o debole per il p. della <i>Substantia nigra</i>)
R. per il ferro	—	
R. di Hale	—	
Metacromasia	—	
Basofilia	+	(a pH 4 circa)
Depigmentazione (H ² O ² —Cloro-Bromo)	—	
R. di Hueck	—	(per la melanina)
Fluorescenza	+	(arancione)

(*) Ricerche eseguite presso i « National Institutes of Health - Laboratory of Pathology and Histochemistry. Dir. dott. R. D. Lillie - Bethesda Md. U.S.A. » ed il « Centro di Studio del Sistema Nervoso del Consiglio Nazionale delle Ricerche ed Università di Pavia, Direttore prof. A. Pensa ».

(*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

(1) G. C. ZORZOLI e E. RAVIOLA, « Boll. S.I.B.S. », 30, 541 (1954).

(2) G. C. ZORZOLI, « Mon. Zool. it. », 57-78 (1949); « Boll. Soc. Med. Chir. Pavia », 64, 1401 (1950).

(3) G. C. ZORZOLI e E. CASASCO « Boll. S.I.B.S. », 29, 965, (1953).

Questi reperti istochimici sarebbero da riferire ad un tipico cromolipide.

Recentemente Aragona ⁽⁴⁾ ha studiato il pigmento dei nuclei ipotalamici anteriori nell'Uomo, ed ha notato che esso è insolubile nei comuni solventi, si colora con il metodo di Ciaccio e con il Sudan III, dà le reazioni di Bauer e di Gomori, si colora debolmente con il solo reattivo di Schiff ed ha proprietà riducente sull'argento ammoniacale. L'A. è incerto se attribuire queste reazioni ad un galattolipide, ad un cromolipoide o ad una sostanza estranea al pigmento, anche se compenetrata ad esso. In verità le ricerche istochimiche meno recenti, sui pigmenti delle cellule nervose, sono quanto mai numerose; per brevità rimando agli indici bibliografici delle ricerche ora citate, che ne riportano una ampia documentazione.

È noto che nel talamo ottico di Uomo generalmente le cellule nervose dei vari gruppi descritti sono ricche di pigmento, ed in alcune di esse, grosse, multipolari, è evidente in posizione paranucleare un ammasso morulare di granuli ben distinti e particolarmente grossi, di colore arancione chiaro. Siccome questa condizione facilita lo studio istochimico della sostanza presente nei granuli, ho rivolto le mie ricerche su queste cellule con l'intendimento di meglio precisare la natura del pigmento.

Le reazioni istochimiche mi hanno dato i seguenti risultati:

Solubilità in acqua, alcool, acetone, xilolo, cloroformio, piridina fredda a 60° C	—	
Depigmentazione (H ² O ² — Cloro- Bromo)	—	
Sudan nero B — Sudan III	+	
R. di Bauer	+	
R. Acido Periodico — Schiff	+	
R. Acido Performico — Schiff	+	
R. Acido Peracetico — Schiff	+	
R. plasmale	+	
R. pseudoplasmale	+	
R. di Schmorl	—	
R. argentaffine	+	(debole)
R. di Bignardi	+	
R. di Hale	—	
R. per il ferro ferroso o ferrico	—	
Metacromasia	—	
Acido resistenza	+	
Basofilia (Blu di Toluidina).	+	(punto isoelettrico apparente pH 4)
R. di Hueck	—	(per la melanina)
R. per i carotinoidi (H ² SO ⁴ — Iodio)	—	

(4) F. ARAGONA, *Il Cervello*, 26, 234 (1950).

R. di Albert e Leblond	+	
Blocco delle aldeidi con 2-4-dinitro- fenilidrazina-R. pseudoplasmale	—	
Blocco delle aldeidi con 2-4-dinitrofe- nilidrazina - R. Acido Periodico Schiff	+	debole
Blocco delle aldeidi con 2-4-dinitrofe- nilidrazina-R. Acido Performico Schiff	+	debole
Procedimento di Acetilazione - R. Acido Periodico - Schiff	—	incerto
Procedimento di Acetilazione - R. Acido Performico - Schiff . . .	+	
Procedimento di Acetilazione - R. pseudoplasmale	+	incerto
Procedimento di Bromurazione - R. Acido Periodico - Schiff	+	
Procedimento di Bromurazione - R. Acido Performico - Schiff . . .	+	
Procedimento di Bromurazione - R. pseudoplasmale	+	
Proc. di Acetilazione-Proc. di Bromu- razione-R. Acido Periodico-Schiff	—	incerto
Proc. di Acetilazione-Proc. di Bromu- razione-R. Acido Performico - Schiff	—	incerto
Blocco delle aldeidi con 2-4-dinitro- fenilidrazina-Proc. di Acetilazio- ne-Procedimento di Bromurazio- ne-Acido Periodico-Schiff . . .	—	
Blocco delle aldeidi con 2-4-dinitro- fenilidrazina-Proc. di Acetila- zione-Proc. di Bromurazione -R. Acido Performico - Schiff	—	
Blecco delle aldeidi con 2-4-dinitro- fenilidrazina-Proc. di Acetila- zione-Proc. Bromurazione-R. pseudoplasmale	—	
Trattamento con acido cromatico 4 % per 24 h - Acido Periodico-Schiff	—	
Trattamento con acido cromatico 4 % per 24 h - Acido Performico- Schiff	—	
Trattamento con acido cromatico 4 % per 24 h - R. pseudoplasmale	—	

Fluorescenza	+	(arancione)
Birifrangenza	—	
R. per il colesterolo	—	

Questi reperti da me ottenuti fanno propendere per l'ipotesi che il pigmento allo studio sia un tipico cromolipide.

In una precedente Nota, in seguito ad una ampia valutazione dei reperti istochimici offerti da numerosi pigmenti cromolipidi, ho proposto, in via del tutto preventiva, una classificazione di questi, appunto in base ai risultati delle reazioni istochimiche, in quattro distinti gruppi ⁽⁵⁾.

Un primo gruppo (al quale apparterebbe il pigmento delle cellule interstiziali dell'ovaio umano) offrirebbe negativa la R. pseudoplasmale, negativa la R. di Schmorl; molto debolmente positiva la argentaffinità, e positive le reazioni Acido Periodico-Schiff ed Acido Performico-Schiff.

Un secondo gruppo (al quale apparterebbe il pigmento delle cellule interstiziali del testicolo umano) darebbe negativa la R. pseudoplasmale, e positive tutte le sopra citate reazioni.

Un terzo gruppo (nel quale verrebbe compreso il cromolipide della zona reticolare della corteccia del surrene umano) offrirebbe negativa la R. pseudoplasmale, negativa (o incerta) la R. Acido Performico-Schiff, positiva (non intensa) la R. Acido Periodico-Schiff; positive la argentaffinità e la R. di Schmorl.

Un quarto gruppo (nel quale verrebbero compresi il pigmento delle « cellule a cromolipidi » della cistifellea del luccio, ed alcuni granuli del pigmento ceroidale) darebbe positiva anche la R. pseudoplasmale.

Il pigmento oggetto di queste ricerche apparterebbe a questo ultimo gruppo di cromolipidi.

Certo difficile a questo proposito è lo stabilire la natura chimica della sostanza, o meglio la funzione chimica responsabile di questa reazione. È dato acquisito dalla Biochimica che nel corso della autoossidazione dei lipidi insaturi si può giungere alla produzione di aldeidi e di acidi attraverso alla formazione di perossidi.

Si può ammettere che aldeidi siano responsabili della reazione pseudoplasmale di questo pigmento.

Si può anche pensare che perossidi organici possano ridurre il reattivo di Schiff, in modo da produrre la tipica reazione pseudoplasmale: è un'ipotesi degna di essere presa in considerazione ma che necessita di approfondite indagini e di conferme.

A proposito della autoossidazione dei lipidi insaturi, si può anche pensare che questa avvenga ad opera dell'ossigeno atmosferico, in periodo post-mortale, e più probabilmente durante l'allestimento delle sezioni istologiche da sottoporre alle reazioni istochimiche, e che quindi sia un artefatto dovuto alla tecnica seguita. A questo proposito Lison ⁽⁶⁾ dedica un breve capitolo

(5) G. C. ZORZOLI, « Bollettino S.I.B.S. », 28, 1078 (1952).

(6) L. LISON, *Histochimie et Cytochimie animales*, Gauthier-Villards Ed., Paris, 1953.

nel suo Trattato, e chiama Reazione O^2 -Schiff quella reazione pseudoplasmale che si verifica in corrispondenza di alcuni lipidi (ad esempio della zona fascicolata del surrene) qualora le sezioni vengano a lungo lasciate nell'acqua, mentre questa reazione pseudoplasmale non si verifica se si eseguisce la reazione immediatamente dopo allestita la sezione al microtomo ⁽⁷⁾. Nel mio caso ho notato che la reazione pseudoplasmale si verifica anche se le sezioni di Talamo ottico vengono sottoposte alla reazione pseudoplasmale immediatamente dopo il taglio. Se una ossidazione da parte dell'ossigeno atmosferico perciò si verifica, deve in questo caso essere estremamente rapida, il che non credo sia da ammettere. Si può tuttavia supporre che trattandosi di materiale umano, prelevato circa 24 o più ore dopo la morte, il pigmento allo studio abbia subito una autoossidazione in periodo post-mortale: è questa una supposizione della quale tener conto, anche se non molto probabile.

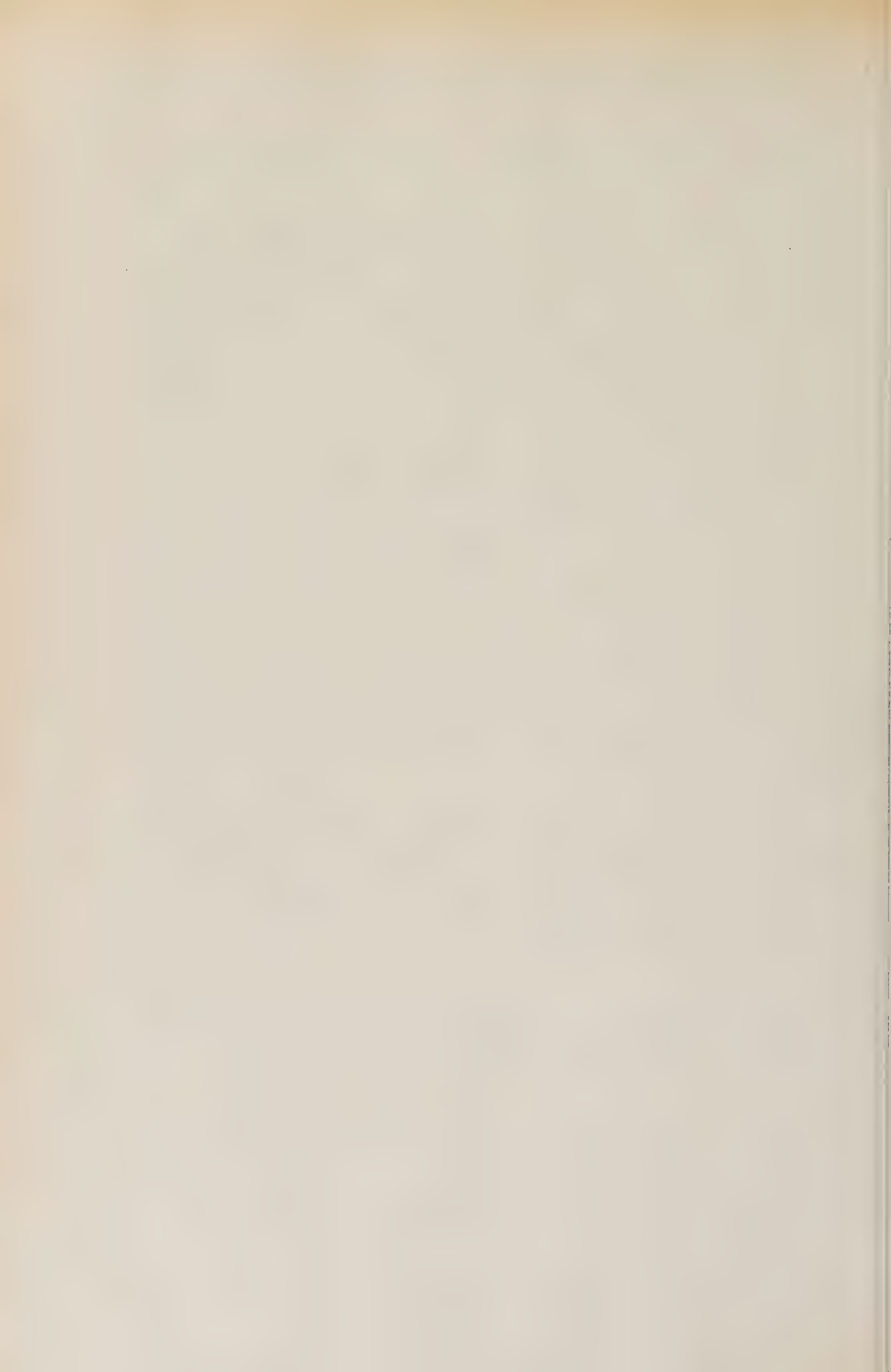
D'altra parte il pigmento allo studio presenta positiva la reazione Acido Periodico-Schiff: questa reazione fa supporre che in esso siano presenti gruppi glicolici, o chetolici, o amino alcoolici. Esso presenta anche positiva la reazione Acido Performico-Schiff, specifica per i lipidi insaturi, provvisti cioè di legami etilenici. La colorazione con Sudan nero B confermerebbe poi la natura lipica di esso.

Si può perciò concludere che il pigmento presente nelle cellule del Talamo ottico dell'Uomo, variamente distribuito a seconda dei gruppi cellulari, ed in particolare quello di alcune grosse cellule rappresentato da un ammasso morulare di granuli relativamente grossi, sia un tipico cromolipide, che offre tra l'altro anche la reazione pseudoplasmale; esso perciò può venire incluso in quello da me definito come IV gruppo di cromolipidi, giusto la classificazione da me precedentemente proposta.

Un'ultima considerazione vorrei esporre: recentemente Hyden e Lindstrom ⁽⁸⁾ hanno studiato dal punto di vista istofisico (microspettrografia con luce ultravioletta e con raggi X; spettrografia di fluorescenza) il pigmento di alcune cellule nervose di Uomo, e concluso che il complesso cromoforo di questo è probabilmente costituito da pterine. Mi riservo di interessarmi in seguito di questo reperto, con ricerche di carattere istochimico.

(7) Una analoga reazione è stata recentemente osservata, nell'ovaio di ratto, da H. WANDLER DEANE e JEAN S. ANDREWS, « Journal of Histo- and Cytochemistry », I, 283 (1953).

(8) H. HYDEN e B. LINDSTROM, « Disc. Faraday Soc. », 9, 436 (1950).



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 novembre 1955

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Integrazione dei sistemi degeneri di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti*^(*). Nota di MAURO PICONE e ALDO GHIZZETTI, presentata^(**) dal Socio M. PICONE.

1. Siano $f_{hk}(D)$ ($h, k = 1, 2, \dots, p$) polinomi in $D = d/dx$, a coefficienti costanti (reali o complessi), e $\varphi_k(x)$ ($h = 1, 2, \dots, p$) assegnate funzioni (reali o complesse) della variabile reale x , derivabili quante volte si voglia nell'intervallo (a, b) . La ricerca di funzioni $y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, p$), della stessa classe nell'intervallo (a, b) , verificanti il sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

$$(I) \quad \sum_{k=1}^p f_{hk}(D) y_k = \varphi_h(x), \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

si effettua facilmente⁽¹⁾ se il determinante $\|f_{hk}(D)\|$ non è identicamente nullo, ma non è stata, fino ad oggi, trattata in tutta generalità nell'altro caso, nel quale diremo che il sistema è *degenere*. Eppure tale caso offre interesse perché comprende quello di m equazioni differenziali in n incognite con $m \neq n$. Se infatti è $m < n$ basta aggiungere $n - m$ equazioni con coefficienti e termini noti tutti nulli; se è $m > n$ basta aggiungere $m - n$ incognite con coefficienti tutti nulli.

In questa Nota esporremo uno studio del predetto caso degenere ed, a tale scopo, cominceremo coll'introdurre alcune locuzioni.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) Vedi M. PICONE e G. FICHERA, *Trattato di Analisi matematica*, vol. II, cap. V.

Diremo che l'incognita y_k *figura* nell'equazione h -esima quando il corrispondente polinomio $f_{hk}(D)$ non è identicamente nullo. Nelle condizioni in cui intendiamo metterci, possono esistere incognite che non figurano in alcuna equazione ed equazioni nelle quali non figura alcuna incognita.

Diremo che il sistema (I) ha *caratteristica* q (con $0 \leq q \leq p$) se nella matrice quadrata $\|f_{hk}(D)\|$ tutti i minori di ordine superiore a q sono identicamente nulli ed inoltre (se $q > 0$) esiste un minore di ordine q non identicamente nullo. Nel caso di un sistema degenerare si ha $0 \leq q < p$.

Diremo infine che il sistema (I) è un *sistema a scala* quando le p incognite si possono ripartire in un certo numero $n + 1$ di gruppi G_1, \dots, G_n, G , rispettivamente costituiti da v_1, \dots, v_n, v incognite⁽²⁾, in modo che le v_i incognite del gruppo G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) figurino tutte nella i -esima equazione, ma non nelle equazioni successive a questa (pur potendo figurare nelle equazioni precedenti), e che le v incognite del gruppo G non figurino in alcuna equazione. Converrà supporre inoltre che le incognite siano ordinate in modo da incontrare dapprima quelle di G_1 , poi quelle di G_2, \dots , quelle di G_n ed infine le incognite di G .

È evidente che per un siffatto sistema la caratteristica risulta uguale a n ; ne segue che, se esso è degenerare (cioè se $n < p$), nelle ultime $p - n$ equazioni non può figurare alcuna incognita.

2. Il risultato del nostro studio si può riassumere nel teorema seguente:

I. - *Se il sistema (I) è degenerare, dettane q la caratteristica, condizione necessaria e sufficiente affinché esso abbia soluzioni è che i termini noti $\varphi_h(x)$ verifichino certe $p - q$ distinte equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti⁽³⁾. Soddisfatte queste condizioni, certe $p - q$ incognite rimangono affatto arbitrarie e le rimanenti q si ottengono, una volta fissate quelle, integrando un sistema non degenerare di q equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.*

Dim. - Il teorema è quasi evidente se il sistema considerato è a scala. Infatti, per la compatibilità di un tale sistema, è evidentemente *necessario* che, con le notazioni del n. 1, siano soddisfatte le $p - n$ condizioni

$$(2) \quad \varphi_{n+1}(x) = 0, \quad \varphi_{n+2}(x) = 0, \dots, \varphi_p(x) = 0.$$

Ma queste condizioni sono anche *sufficienti*. Infatti da esse deriva intanto che le ultime $p - n$ equazioni sono soddisfatte identicamente, onde basta preoccuparsi di soddisfare le prime n . E questo è evidentemente possibile, fissando ad arbitrio $v_1 - 1$ incognite comunque scelte del gruppo $G_1, \dots, v_n - 1$ incognite comunque scelte del gruppo G_n e tutte le v incognite del gruppo G (cioè complessivamente $(v_1 - 1) + \dots + (v_n - 1) + v = p - n$ incognite) e ricavando successivamente le rimanenti n (una in ciascuno dei gruppi

(2) Si suppone naturalmente $n \geq 0, v \geq 0, n + v > 0, v_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) se $n > 0, v_1 + \dots + v_n + v = p$.

(3) Tali equazioni possono essere, tutte o in parte, di ordine zero, cioè puramente algebriche e lineari.

G_1, \dots, G_n) attraverso la risoluzione di un sistema di n equazioni, a scala e non degenera.

Dimosteremo ora il teorema in generale, facendo vedere che un qualsiasi sistema (I), di caratteristica q , può sempre trasformarsi in un equivalente sistema a scala, nelle stesse incognite e con la stessa caratteristica $n = q$, ed inoltre che, in tale trasformazione, i termini noti $\varphi_h(x)$ vengono sostituiti da altri del tipo

$$(3) \quad \psi_h(x) = \sum_{k=1}^p \omega_{hk}(D) \varphi_k(x), \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

con $\omega_{hk}(D)$ polinomi a coefficienti costanti, il cui determinante $\|\omega_{hk}(D)\|$ risulta identicamente uguale a 1 oppure a -1 .

Osserviamo subito che, ammessa possibile la predetta trasformazione, le condizioni di compatibilità del sistema (I), supposto degenera, saranno, a norma delle (2), espresse dalle $\psi_{q+1}(x) = 0, \psi_{q+2}(x) = 0, \dots, \psi_p(x) = 0$. Queste forniscono precisamente $p - q$ equazioni differenziali (o algebriche) lineari a coefficienti costanti nelle $\varphi_h(x)$ ed è chiaro che, in forza della $\|\omega_{hk}(D)\| = \pm 1$, si tratta di *effettive* equazioni, *distinte fra loro*.

Passiamo ora a descrivere l'annunciata trasformazione del sistema (I), il quale sarà anche indicato come sistema (S_0) .

Esclusa l'eventualità in cui i polinomi $f_{hk}(D)$ siano tutti identicamente nulli (e quindi il sistema sia già a scala, con $n = 0$), il nostro sistema può presentare i due seguenti casi:

1° Caso) *esiste qualche incognita che figura in una sola equazione;*

2° Caso) *esiste qualche incognita che figura in almeno due equazioni, ma nessuna che figuri in una sola.*

Esaminiamo il 1° Caso, indicando con $y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_{s_1}}$ le incognite di cui si è detto, che saranno complessivamente distribuite in un certo numero $r_1 \leq s_1$ di equazioni. È chiaro allora che, portando queste r_1 equazioni ai primi r_1 posti e permutando in pari tempo le incognite in modo da collocare nei primi s_1 posti (ed in ordine opportuno) le $y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_{s_1}}$, il nostro sistema (S_0) risulta scritto in modo che le sue prime r_1 equazioni costituiscono un sistema (T_1) ove figurano disposte a scala le prime s_1 incognite (con $s_1 \geq r_1$), mentre le rimanenti $p - r_1$ equazioni formano un sistema (S_1) ove possono figurare al più le altre $p - s_1$ incognite. Diremo brevemente che (S_0) risulta scritto nella forma $(T_1) + (S_1)$.

Se in (S_1) tutti i coefficienti $f_{hk}(D)$ sono identicamente nulli, allora $(T_1) + (S_1)$ è a scala. Nel caso opposto (S_1) può presentare il 1° o il 2° dei due casi sopradetti. Se si verifica il 1° caso, possiamo ripetere su (S_1) il ragionamento fatto su (S_0) e cioè permutare equazioni ed incognite in modo da avere un primo gruppo (T_2) di r_2 equazioni ove figurano disposte a scala s_2 incognite (con $s_2 \geq r_2$), seguito da un sistema (S_2) di $p - r_1 - r_2$ equazioni ove possono figurare al più le rimanenti $p - s_1 - s_2$ incognite. Con ciò (S_0) risulta scritto nella forma $(T_1) + (T_2) + (S_2)$.

Su (S_2) si può ora ripetere quello che si è detto per (S_1) e così proseguire fino a quando o si arriva a scrivere (S_0) sotto forma di un sistema a scala, oppure si arriva a scriverlo sotto una forma $(T_1) + (T_2) + \dots + (T_l) + (S_l)$, ove in $(T_1), (T_2), \dots, (T_l)$ figurano disposti a scala successivi gruppi di incognite e dove (S_l) è un sistema, nelle rimanenti incognite, che presenta il 2° Caso ⁽⁴⁾. In quest'ultima eventualità possiamo inglobare il caso, finora escluso, in cui il sistema iniziale (S_0) presenti il 2° Caso (basta supporre $l = 0$).

Dopo ciò è evidente che, per dimostrare la trasformabilità di ogni sistema (1) in un sistema a scala, basterà provare che è possibile tale trasformazione per un sistema (S) di r equazioni in s incognite (con $r \geq s$) per il quale si verifichi il 2° Caso (onde è certamente $r \geq 2$). Conseguiremo tale scopo facendo vedere che (S) si può trasformare in un sistema equivalente per il quale si verifichi il 1° Caso.

Il sistema considerato (S) sia:

$$(4) \quad \sum_{k=1}^s F_{hk}(D) y_k = \Phi_h(x), \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

e, per fissare le idee, supponiamo che l'incognita y_1 figuri in almeno due equazioni. Ciò significa che fra i polinomi $F_{11}(D), F_{21}(D), \dots, F_{r1}(D)$ due almeno sono non identicamente nulli. Permutando se occorre le equazioni (4), possiamo supporre che questi polinomi siano ordinati in modo che ai primi posti figurino quelli non identicamente nulli, con gradi non decrescenti, ed agli ultimi posti quelli, eventuali, che sono identicamente nulli. Dividiamo allora per $F_{11}(D)$ i rimanenti polinomi $F_{h1}(D)$, ($h = 2, \dots, r$), ed indichiamo con $q_h(D)$ e $r_h(D)$ i quozienti ed i resti di tali divisioni. Allora le (4) si possono scrivere nel modo seguente:

$$(5) \quad \begin{cases} F_{11}(D) y_1 + \sum_{k=2}^s F_{1k}(D) y_k = \Phi_1(x), \\ [F_{11}(D) q_h(D) + r_h(D)] y_1 + \sum_{k=2}^s F_{hk}(D) y_k = \Phi_h(x), \quad (h = 2, \dots, r) \end{cases}$$

e quindi, sottraendo dalla h -esima equazione quella ottenuta dalla prima applicandogli l'operatore $q_h(D)$:

$$(6) \quad \begin{cases} F_{11}(D) y_1 + \sum_{k=2}^s F_{1k}(D) y_k = \Phi_1(x), \\ r_h(D) y_1 + \sum_{k=2}^s [F_{hk}(D) - q_h(D) F_{1k}(D)] y_k = \Phi_h(x) - q_h(D) \Phi_1(x), \quad (h = 2, \dots, r) \end{cases}$$

(4) Si noti che in (S_l) il numero delle equazioni non è inferiore al numero delle incognite.

È evidente che il sistema (6) è equivalente a (4). Se tutti i resti $r_h(D)$ sono identicamente nulli [oppure se una almeno delle incognite y_2, \dots, y_s figura in una sola delle (6)], il sistema (6) presenta il 1° Caso e la nostra tesi è provata. Se invece almeno uno degli $r_h(D)$ non è identicamente nullo [e ciascuna delle y_2, \dots, y_s figura in due o più equazioni (6)], il sistema (6) presenta ancora il 2° Caso; però, tenuto conto che i gradi degli $r_h(D)$ non identicamente nulli sono tutti minori del grado di $f_{11}(D)$, si vede che il sistema (6) presenta rispetto a (4) il vantaggio che si è abbassato il grado minimo dei coefficienti dell'incognita y_1 . Ripetendo allora su (6) il calcolo fatto su (4), o arriviamo a far figurare y_1 (o qualche altra incognita) in una sola equazione, oppure otteniamo un altro abbassamento del grado minimo dei coefficienti di y_1 . Così proseguendo, è ovvio che dopo un numero finito di trasformazioni si arriverà certamente ad avere un sistema in cui almeno y_1 figura in una sola equazione, cioè ad un sistema che presenta il 1° Caso (5).

Possiamo così concludere che ogni sistema (1) può essere trasformato in un equivalente sistema a scala, attraverso un susseguirsi di operazioni che consistono nel permutare le incognite o le equazioni, o nell'aggiungere ad un'equazione delle altre ai cui due membri siano applicati degli operatori polinomiali di derivazione. È evidente che queste operazioni non alterano mai la caratteristica del sistema e che, alla fine, i termini noti sono effettivamente del tipo (3).

Si osservi ora che, anche nel sistema iniziale (1), i termini noti sono dello stesso tipo (3) (la matrice $\|\omega_{hk}(D)\|$ essendo la matrice unitaria) e che, in ciascuna delle trasformazioni dianzi descritte, tale matrice si modifica successivamente in modo che il suo determinante può al più cambiare di segno. Ne segue che nelle (3) è certamente $\|\omega_{hk}(D)\| = \pm 1$ e con ciò il teor. I è completamente dimostrato.

3. Il teor. I costituisce manifestamente un'estensione, ai considerati sistemi di equazioni differenziali, delle note elementari proprietà dei sistemi di equazioni algebriche e lineari. Si potrebbe pensare a prima vista che sia possibile formulare il teorema in termini analoghi a quelli del teorema di Rouché, ma ciò non è, per due ragioni. Anzitutto, uguagliando a zero i determinanti analoghi a quelli di Rouché, si ottengono condizioni *necessarie*, ma in generale *non sufficienti* per la compatibilità del sistema. In secondo luogo non è più vero (in generale) che, soddisfatte le condizioni di compatibilità, *tutte* le soluzioni di q equazioni differenziali (corrispondenti alle righe di un minore di ordine q non identicamente nullo della matrice $\|f_{hk}(D)\|$) verifichino senz'altro le rimanenti $p - q$ equazioni; in generale, soltanto una parte di esse gode di tale proprietà e riesce quasi impossibile svolgere, in tutta generalità, la discussione necessaria per assicurare l'esistenza di tale parte.

(5) In sostanza si procede come se si cercasse il massimo comun divisore dei polinomi $F_{11}(D), F_{21}(D), \dots, F_{r1}(D)$ col metodo delle divisioni successive. Alla fine y_1 compare una sola volta, con coefficiente uguale al predetto m. c. d.

Matematica. — *Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche.*
Nota I (*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

Nel Corso su *Proprietà locali e globali di varietà e di trasformazioni differenziabili*, da me tenuto a Pavia dal 26 settembre al 5 ottobre 1955 per invito del «Centro Internazionale Matematico Estivo», ho avuto modo di esporre un vasto assieme di risultati di carattere differenziale, analitico od algebrico — soltanto in parte precedentemente noti — i quali suggeriscono a loro volta nuove ricerche e fanno presagire ulteriori sviluppi. Sebbene quelle mie lezioni debbano fra non molto apparire ciclostilate presso l'Istituto Matematico dell'Università di Roma, reputo non inutile di stralciare da esse lo studio di alcune proprietà inerenti ai *punti fissi delle trasformazioni analitiche*, in vista degli importanti legami che questo soggetto ha con vari rami della matematica, quali per esempio la teoria dell'iterazione e quella dei sistemi di equazioni differenziali.

Per brevità, ometterò nel seguito ogni accenno ad ulteriori problemi ed a possibili applicazioni. Alcune considerazioni complementari ed indicazioni bibliografiche sugli argomenti trattati si troveranno nel testo ciclostilato delle suddette lezioni.

§ I. — IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA.

Sia T una trasformazione analitica di una V_n complessa in sè, dotata di un punto fisso, O . Nel seguito ci limiteremo al caso in cui la T sia invertibile nell'intorno di O (e cioè abbia in O jacobiano non nullo), e supporremo che l'omografia indotta da T nella stella ∞^{n-1} delle rette tangenti in O a V_n risulti generale. È allora possibile di scegliere nell'intorno di O su V_n coordinate permissibili — tutte nulle in O — tali che, in quell'intorno, la T si rappresenti con equazioni della forma

$$(I) \quad \begin{cases} u = ax + a_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l \\ v = by + b_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l \\ \dots\dots\dots \\ w = cz + c_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l. \end{cases}$$

Nelle (I), le (x, y, \dots, z) , (u, v, \dots, w) sono le coordinate di due punti omologhi in T ; inoltre nei secondi membri sono sottintese le somme rispetto ai vari indici, i quali sono interi non negativi variabili in modo che, posto per abbreviare

$$(2) \quad k = i + j + \dots + l,$$

sempre si abbia

$$(3) \quad k \geq 2.$$

(*) Presentata nella seduta del 12 novembre 1955.

Le altre lettere che figurano in detti secondi membri designano numeri complessi soggetti alla condizione che le serie di potenze rappresentate da quei secondi membri convergano in un intorno n -dimensionale del punto O , il che si esprimerà brevemente dicendo che tali serie convergono. In particolare, gli n coefficienti a, b, \dots, c sono degli invarianti topologici di T in O , nel senso che non dipendono dalla scelta delle coordinate, e si può assegnar loro un semplice significato geometrico; essi non sono altro che le radici caratteristiche della matrice jacobiana di T in O , sicchè – nelle ipotesi attuali – tali coefficienti risultano tutti diversi da zero, e (in base a quel significato geometrico) li si denomina i coefficienti di dilatazione di T in O .

L'invarianza di questi coefficienti risulta anche incidentalmente dalle seguenti considerazioni. Il più generale cambiamento di coordinate permessi, conservante la forma delle equazioni (1), si ottiene componendo fra loro una trasformazione del tipo

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = x + \alpha_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l \\ Y = y + \beta_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l \\ \dots\dots\dots \\ Z = z + \gamma_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l \end{array} \right.$$

con una trasformazione moltiplicativa, definita cioè col moltiplicare le singole coordinate per arbitrari fattori costanti non nulli. Ora è evidente che, se si opera un cambiamento di quest'ultimo tipo, nelle (1) i coefficienti a, b, \dots, c rimangono inalterati, mentre ciascuno dei rimanenti coefficienti viene soltanto moltiplicato per un determinato fattore costante non nullo. Se invece al posto delle (x, y, \dots, z) si assumono le (X, Y, \dots, Z) date dalle (4), il che naturalmene esige che nello stesso tempo in luogo delle (u, v, \dots, w) si debbano considerare le

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = u + \alpha_{ij\dots l} u^i v^j \dots w^l \\ V = v + \beta_{ij\dots l} u^i v^j \dots w^l \\ \dots\dots\dots \\ W = w + \gamma_{ij\dots l} u^i v^j \dots w^l, \end{array} \right.$$

basta eliminare le (x, y, \dots, z) , (u, v, \dots, w) fra le (1), (4), (5) per ottenere le equazioni di T nelle nuove coordinate sotto la forma

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = aX + A_{ij\dots l} X^i Y^j \dots Z^l \\ V = bY + B_{ij\dots l} X^i Y^j \dots Z^l \\ \dots\dots\dots \\ W = cZ + C_{ij\dots l} X^i Y^j \dots Z^l. \end{array} \right.$$

L'eliminazione in questione si ottiene precisamente esprimendo nelle (5) le (u, v, \dots, w) in funzione delle (x, y, \dots, z) mediante le (1), e sosti-

tuendo qui alle (x, y, \dots, z) le serie di potenze nelle (X, Y, \dots, Z) ottenute risolvendo le (4); e va rilevato che tutto ciò ha senso a prescindere dalla convergenza delle (4). Vuol dire che, se queste serie non convergono (in un intorno n -dimensionale del punto O), i secondi membri delle (6) risultano serie di potenze formali nelle (X, Y, \dots, Z) , che potranno convergere o meno; queste ultime però certamente convergono se così è delle (4). Nel caso particolare in cui tutti i coefficienti A, B, \dots, C possano venir assunti uguali allo zero le (6) riduconsi alle

$$(7) \quad U = aX, \quad V = bY, \quad \dots, \quad W = cZ,$$

onde si dirà che la T è allora *linearizzabile* nell'intorno di O , distinguendosi fra linearizzabilità *formale* o *sostanziale* a seconda che si prescinde o meno dalle condizioni di convergenza per la trasformazione (4) che riduce le equazioni di T alla forma lineare (7).

Gli sviluppi precedenti ricevono una diversa interpretazione, ove si assumano le (6) come le equazioni di una trasformazione Θ di una W_n in sè, dotata di un punto fisso $\Omega(0, 0, \dots, 0)$, e si pensino le (4) [o (5)] come rappresentanti una corrispondenza fra l'intorno di O su V e l'intorno di Ω su W_n . Quando le (6) risultino ottenibili dalle (1), (4), (5) col suddetto procedimento di eliminazione, si dirà che - in quegli intorni - le trasformazioni T, Θ sono fra loro *equivalenti*; e si distinguerà fra *equivalenza formale* o *sostanziale*, secondochè si prescinde o meno dalla convergenza dei secondi membri delle (4).

Il problema che ora si pone, e che risolveremo in casi abbastanza estesi in questa Nota ed in due Note successive, è quello di *determinare se due date trasformazioni dotate ciascuna di un punto fisso sono fra loro formalmente o sostanzialmente equivalenti nell'intorno dei relativi punti fissi*. Per l'equivalenza di ogni tipo è necessario che le due trasformazioni abbiano in detti punti gli stessi coefficienti di dilatazione; ma questa condizione non è generalmente sufficiente per l'equivalenza sostanziale. Il suddetto problema comprende quello della *linearizzabilità* (formale o sostanziale) di T nell'intorno di O e, più generalmente, quello della *riduzione a forma canonica* delle equazioni di T nell'intorno di O .

Nello studio delle questioni testè indicate riesce comoda la seguente terminologia. Designati come dianzi con a, b, \dots, c i coefficienti di dilatazione di T in O , in generale nessuno di essi potrà venir scritto nella forma

$$a^i b^j \dots c^l$$

dove i, j, \dots, l denotino n interi non negativi aventi somma maggiore dell'unità. Se così avviene di fatto, diremo che T è *aritmeticamente generale* in O ; mentre il caso contrario si esprimerà dicendo che T è *aritmeticamente particolare* nel punto O . Chiameremo infine *peso* di un coefficiente $a_{ij\dots l}, \dots, c_{ij\dots l}, \alpha_{ij\dots l}, \dots, \gamma_{ij\dots l}, A_{ij\dots l}, \dots, C_{ij\dots l}$ la somma (2) degli indici; in virtù della (3), esso risulta in ogni caso maggiore dell'unità.

§ II. — EQUIVALENZA FORMALE DI TRASFORMAZIONI ARITMETICAMENTE GENERALI.

Dimostreremo ora che:

Due trasformazioni dotate ciascuna di un punto fisso in cui ammettano gli stessi coefficienti di dilatazione risultano sempre fra loro equivalenti dal punto di vista formale, ove si supponga ch'esse siano aritmeticamente generali.

Ne seguirà che:

Una trasformazione analitica dotata di un punto fisso — ove sia aritmeticamente generale — non ammette ivi alcun invariante topologico indipendente dai coefficienti di dilatazione, e risulta sempre formalmente linearizzabile.

Basterà provare che (a prescindere da ogni condizione di convergenza), assegnate comunque le (1), (6), è possibile di determinare i coefficienti $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ in guisa che le (1) si mutino precisamente nelle (6) in forza delle (4), (5). Mostreremo anzi che questa condizione determina tali coefficienti in modo univoco.

La suddetta condizione può intanto venir esplicitata nel modo seguente. Si esprimano nelle (6) le $(X, Y, \dots, Z), (U, V, \dots, W)$ mediante le (4), (5), ciò che fornisce le equazioni

$$\begin{aligned} u + \alpha_{ij\dots l} u^i v^j \dots w^l &= a (x + \alpha_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l) + \\ + A_{pq\dots r} (x + \alpha_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l)^p (y + \beta_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l)^q \dots (z + \gamma_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l)^r, \\ v + \beta_{ij\dots l} u^i v^j \dots w^l &= b (y + \beta_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l) + \\ + B_{pq\dots r} (x + \alpha_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l)^p (y + \beta_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l)^q \dots (z + \gamma_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l)^r, \\ &\dots\dots\dots \\ w + \gamma_{ij\dots l} u^i v^j \dots w^l &= c (z + \gamma_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l) + \\ + C_{pq\dots r} (x + \alpha_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l)^p (y + \beta_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l)^q \dots (z + \gamma_{ij\dots l} x^i y^j \dots z^l)^r. \end{aligned}$$

Se ora si sostituiscono nei primi membri alle (u, v, \dots, w) le espressioni (1), si tratterà di soddisfare alle equazioni che da qui si ottengono identificando i coefficienti dei termini simili nei due membri.

È subito visto che i termini di grado inferiore al secondo hanno sempre nei due membri uguali coefficienti. Basterà quindi limitarci ai coefficienti dei termini in $x^i y^j \dots z^l$ di grado $k = i + j + \dots + l \geq 2$, ciò che fornisce equazioni del tipo

$$(8_k) \quad \left\{ \begin{aligned} (a - a^i b^j \dots c^l) \alpha_{ij\dots l} &= P_{ij\dots l} \\ (b - a^i b^j \dots c^l) \beta_{ij\dots l} &= Q_{ij\dots l} \\ &\dots\dots\dots \\ (c - a^i b^j \dots c^l) \gamma_{ij\dots l} &= R_{ij\dots l}, \end{aligned} \right.$$

dove — a differenza che nelle precedenti equazioni — non v'è da sommare rispetto agli indici. Senza che occorra dare l'espressione esplicita dei

secondi membri $P_{ij\dots l}, Q_{ij\dots l}, \dots, R_{ij\dots l}$, rileviamo soltanto ch'essi risultano ben determinati polinomi nei coefficienti di dilatazione a, b, \dots, c , nelle $\alpha_{pq\dots r}, \beta_{pq\dots r}, \dots, \gamma_{pq\dots r}, A_{pq\dots r}, B_{pq\dots r}, \dots, C_{pq\dots r}$ aventi peso $p + q + \dots + r \leq k$, ed inoltre - se $k > 2$ - nelle $\alpha_{pq\dots r}, \beta_{pq\dots r}, \dots, \gamma_{pq\dots r}$ di peso inferiore a k .

In forza della supposta generalità aritmetica di T in O, ciascuna delle espressioni entro parentesi nei primi membri delle (8_k) risulta diversa da zero. Ne consegue che, dando a k successivamente i valori $2, 3, 4, \dots$, le (8_k) (ove i, j, \dots, l prendono tutti i valori interi positivi o nulli soddisfacenti alla $i + j + \dots + l = k$) vengono a definire per ricorrenza - in modo univoco e senza ambiguità - tutte le $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ dei singoli pesi $2, 3, 4, \dots$; e ciò dimostra l'asserto.

Uno studio approfondito delle (8_k) permetterebbe di trattare il problema dell'equivalenza formale, anche nel caso di trasformazioni aritmeticamente particolari. Tale problema ha un chiaro significato geometrico, in quanto - per l'equivalenza delle T, Θ negli intorni differenziali d'un dato ordine N dei punti O, Ω - basta che risultino compatibili le equazioni fornite dalle (8_k) per $k = 2, 3, \dots, N$. Senza qui insistere su ciò, osserviamo ancora (perchè ciò ci verrà utile nel § III) che i termini dei suddetti polinomi P, Q, \dots , R che non dipendono dalle A, B, \dots , C hanno per coefficienti degli interi positivi e contengono le $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ a grado non superiore al primo.

Matematica. — *Un'osservazione sul lemma di Sperner.* Nota (*) del Corrisp. GIUSEPPE SCORZA DRAGONI.

In questa Nota mi propongo di dedurre dal lemma di Sperner, senza passare attraverso il teorema di Brouwer sul punto unito, il fatto, anch'esso notissimo, che *non è possibile retrarre il simpleso n -dimensionale ($n > 0$) sul proprio contorno*, cioè che non è possibile definire una trasformazione univoca e continua di quel solido simpliciale su quel contorno, la quale su quel contorno subordini l'identità. Veramente io ho già sviluppato questa deduzione, per il caso bidimensionale, in alcune conferenze lette presso l'Istituto matematico dell'Università di Catania⁽¹⁾; ed allora mi limitai ad affermare che la deduzione aveva valore anche nel caso generale. In questa Nota, dopo qualche richiamo (nn. 1 e 2), mi propongo (n. 3) di far vedere con quanta semplicità quel ragionamento si lasci trasportare dal caso bidimensionale a quello n -dimensionale; chiudo (n. 4) con un'osservazione complementare.

(*) Presentata nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) Ed in corso di stampa nella rivista «Le Matematiche».

1. Nello spazio reale euclideo n -dimensionale ambiente, sia x un semplice euclideo ad n dimensioni ⁽²⁾. Allora i vertici, a_0, \dots, a_n , di x sono linearmente indipendenti ed x coincide coll'involucro convesso, o baricentrico, $[a_0, \dots, a_n]$ dei propri vertici.

Si denoti indi con X il complesso costituito dalle facce (proprie ed improprie) di x e con K una suddivisione simpliciale di X ; per esempio, K potrà esser la suddivisione baricentrica propria, K_1 , di X , oppure quella, K_2 , di K_1 , oppure quella, K_3 , di K_2 , ecc.

Si denotino con b_1, \dots, b_r i diversi vertici di K . E ad ogni vertice, b_s , di K si associ un vertice, $t(b_s)$, di x in tal guisa, che $t(b_s)$ appartenga a tutte quelle facce di x che contengano b_s . Allora, in particolare, $t(b_s)$ coincide con b_s , se b_s è esso stesso un vertice di x , e $t(b_s)$ può esser uno qualunque dei vertici a_0, \dots, a_n di x , se b_s è interno ad x .

Se ad ogni singolo semplice $[b_i, \dots, b_j]$ di K associamo l'involucro convesso $[t(b_i), \dots, t(b_j)]$ dei punti, non necessariamente a due a due distinti, $t(b_i), \dots, t(b_j)$, nasce una trasformazione che muta i semplici di K in semplici di X , subordinando la t sui vertici di K ; epperò anche questa nuova trasformazione verrà designata colla lettera t .

Ebbene, secondo il lemma di Sperner, questa t trasforma almeno un semplice di K nel semplice x stesso ⁽³⁾; anzi, è dispari il numero di tutti i semplici di K mutati da t nel semplice x .

Se si trasforma ogni singolo semplice $[b_i, \dots, b_j]$ di K mediante una affinità dello spazio ambiente, la quale muti rispettivamente b_i, \dots, b_j nei loro trasformati mediante la t , nasce una trasformazione, τ , affine a tratti, del semplice x in se stesso. Ed il lemma di Sperner porge subito che, se n è positivo, τ dilata (almeno) uno dei semplici di K fino a farlo coincidere con x ; epperò si comprende come il lemma di Sperner debba singolarmente prestarsi a dedurre la irretraibilità del semplice x sul proprio contorno, sempre qualora n sia positivo.

2. Poniamo dunque che n sia positivo e consideriamo il complesso, Y , delle faccie di x diverse dalla faccia impropria x stessa. Diciamo S_w quella stella baricentrica propria del complesso Y che ha come centro a_w ⁽⁴⁾. Allora gli insiemi S_0, \dots, S_n costituiscono una pavimentazione chiusa del complesso Y ⁽⁵⁾ e la loro intersezione è vuota ⁽⁶⁾.

Ne segue notoriamente ⁽⁷⁾ che si può determinare il numero positivo σ in tal guisa, che se una porzione del contorno di x ha un dia-

(2) Seguo, di massima, la terminologia usata da ALEXANDROFF ed HOPF nella loro *Topologie* [Springer, Berlino (1935)]. In particolare i semplici, che saranno sempre intesi nel senso di semplici euclidei, saranno chiusi, in quanto insiemi di punti dello spazio ambiente.

(3) Loc. cit. nota ⁽²⁾, p. 376.

(4) Loc. cit. nota ⁽²⁾, p. 147.

(5) Loc. cit. nota ⁽²⁾, p. 147: pavimentazione nel senso di *Überdeckung*.

(6) Loc. cit. nota ⁽²⁾, p. 149, *Zusatz I*.

(7) Loc. cit. nota ⁽²⁾, p. 101, lemma di Lebesgue.

metro minor di σ , essa è priva di punti comuni con almeno uno degli insiemi S_w .

3. Ciò premesso, sia, per assurda ipotesi, f una retrazione di x sul proprio contorno.

Se si sceglie l'intero m in maniera opportuna, è lecito supporre che tutti i semplici di K_m abbiano il diametro minore di un numero positivo prefissato a piacere. Epperò, attesa la continuità uniforme della f , se si sceglie il numero naturale m in guisa opportuna, le immagini dei semplici di K_m nella f fanno tutte un diametro minor di σ .

Se P è un vertice di K_m , il punto $f(P)$, appartenendo al contorno di x , appartiene almeno ad una delle stelle S_w . Se $f(P)$ appartiene ad S_o , si associ a P il vertice a_o ; se $f(P)$ appartiene ad S_x , senza appartenere ad S_o , si associ a P il vertice a_x ; \dots ; se $f(P)$ appartiene ad S_n , senza appartenere ad $S_o + \dots + S_{n-1}$, si associ a P il vertice a_n .

La trasformazione, che così nasce, dei vertici di K_m in vertici di x soddisfa alle ipotesi del lemma di Sperner, perché P coincide con $f(P)$, se P appartiene al contorno di x (e perché S_w non contiene mai punti della faccia di x opposta al vertice a_w). E nel caso attuale quel lemma porge che almeno uno dei semplici n -dimensionali di K_m ha la propria immagine nella f dotata di punti comuni con ogni singolo insieme S_o, \dots, S_n . Epperò i diametri delle immagini, nella f , dei semplici di K_m non possono essere tutti minori del numero σ . E l'assurdo prova appunto che x non si può retrarre sul proprio contorno.

4. La nota equivalenza del teorema di irretraibilità a quello di Brouwer sul punto unito ⁽⁸⁾ e la dimostrazione data da Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz ⁽⁹⁾ per quest'ultimo suggeriscono, per il primo, di procedere anche come segue.

Siano Σ_w l'immagine di S_w nella f^{-1} ed F_w la faccia di x opposta al vertice a_w . Allora gli insiemi $\Sigma_o, \dots, \Sigma_n$ sono chiusi, perché chiusi son gli insiemi S_o, \dots, S_n e perché f è continua ⁽¹⁰⁾. Inoltre Σ_w contiene a_w e non contiene punti di F_w , perché f trasforma in sé tanto a_w quanto F_w . Ed ancora, gli insiemi $\Sigma_o, \dots, \Sigma_n$ costituiscono ovviamente una pavimentazione del semplice x . Pertanto l'intersezione $\Sigma_o \dots \Sigma_n$ è diversa da zero ⁽¹¹⁾; il che è assurdo, perché vuota risulta l'intersezione $S_o \dots S_n$, come s'è già ricordato.

(8) Loc. cit. nota ⁽¹⁾, n. 3, per indicazioni bibliografiche.

(9) Loc. cit. nota ⁽²⁾, p. 377.

(10) Loc. cit. nota ⁽²⁾, p. 53.

(11) Loc. cit. nota ⁽²⁾, p. 378, teorema di Sperner.

Geometria. — *Sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo.* Nota (*) del Socio E. BOMPIANI.

1. OGGETTO DELLA RICERCA. — È nota la rappresentazione (minima) degli E_1 di un piano proiettivo sopra una V_3^6 di S_7 .

Dette (in un assegnato riferimento) $x^i, i = 1, 2, 3$, le coordinate omogenee di un punto, u_i le coordinate omogenee di una retta per il punto, quindi $x^i u_i = 0$ (condizione d'incidenza), la totalità degli E_1 è descritta dal punto di coordinate

$$(1.1) \quad \xi_{.j}^i = x^i u_j, \quad \xi_{.i}^i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

ed è quindi una V_3^6 sezione (generica) della V_4^6 di S_8 di C. Segre prodotto dei punti di due piani (che è rappresentata dalle stesse $\xi_{.j}^i$ tolta la condizione d'incidenza).

Questa formulazione esplicita è dovuta ad F. Severi ⁽¹⁾ che ha mostrato, servendosi della sua teoria della base, che detta rappresentazione dà il modello minimo della totalità degli E_1 del piano. Tale varietà era già occorsa tuttavia da un diverso punto di vista ad F. Enriques ⁽²⁾, ed era stata studiata da G. Scorza ⁽³⁾ il quale aveva già accennato (proprio in fine al primo suo lavoro citato) all'interpretazione precedente di essa.

Sono stato condotto ad occuparmi di nuovo di questa varietà per lo studio della rappresentazione degli elementi differenziali del 2° e del 3° ordine del piano; e mi è occorso di trovare, oltre alle proprietà note che nell'interpretazione assunta della V_3^6 divengono immediate, nuove proprietà di cui mi varrò per quella rappresentazione.

2. ALCUNE CONFIGURAZIONI ELEMENTARI DI E_1 . — a) L'insieme degli $\infty^1 E_1$ aventi per centro un punto si rappresenta in una *retta*, che diremo del *primo* sistema; l'insieme degli E_1 aventi una retta fissata si rappresenta

(*) Presentata nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) F. SEVERI, *I fondamenti della geometria numerativa*, « Ann. di Mat. », ser. IV, t. XIX, pp. 153-242; in particolare nn. 58-61.

(2) F. ENRIQUES, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche*, « Rend. Acc. Lincei », ser. V, vol. 3, 1894, pp. 481-487; *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche*, « Math. Ann », Bd. 46, pp. 179-199.

(3) G. SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche*, « Rend. Acc. Lincei », ser. V, vol. XVII, 1908, pp. 10-11; *Le varietà a curve sezioni ellittiche*, « Ann. di Mat. », ser. III, t. XV, 1908, pp. 1-57 (in particolare pp. 19-35); *Determinazione delle varietà a tre dimensioni di S_r ($r \geq 7$) i cui S_3 tangenti si tagliano a due a due*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XXV, 1908, pp. 1-12.

La Memoria degli « Annali di Matematica » s'indicherà con S.

in una *retta*, che diremo del *secondo* sistema (questi due sistemi formano la base, di Severi, per le curve di V_3^6).

Esistono ∞^2 rette di ciascun sistema; per ogni punto $\hat{\Omega}$ di V_3^6 , rappresentante un \hat{E}_1 , passa una retta \hat{g}_1 del primo e una \hat{g}_2 del secondo sistema; il loro piano si dirà *piano congiunto* ad $\hat{\Omega}$. Due rette dello stesso sistema sono sghembe e determinano *una* retta dell'altro sistema ad esse incidente ⁽⁴⁾.

b) L'insieme degli $\infty^1 E_1$ aventi i centri sopra una retta e le rette passanti per un punto (non appartenente alla retta) è una *conica*, determinata da due suoi punti; e in particolare da un punto e dalla tangente ivi ⁽⁵⁾. Vi sono ∞^4 di queste coniche; due generiche non hanno punti comuni; per un punto $\hat{\Omega}$ di V_3^6 passano ∞^2 di queste coniche: le loro tangenti riempiono la stella di centro $\hat{\Omega}$ nello S_3 ivi tangente ad eccezione delle rette nel fascio appartenente al piano congiunto ad $\hat{\Omega}$.

Due punti *non* appartenenti ad un piano congiunto (quindi alle rette di V_3^6 in esso) determinano sempre *una* conica (nel caso opposto i due punti o stanno sopra una stessa retta di V_3^6 o su due rette di sistemi diversi fra loro incidenti).

Due rette di sistemi opposti e *non* incidenti determinano *una* conica, come si dirà appresso, e viceversa.

c) L'insieme degli $\infty^2 E_1$ le cui rette passano per un punto è una rigata cubica R^3 di S_4 avente per direttrice la retta g_1 che rappresenta il punto, e per generatrici le rette dell'altro sistema appoggiate a g_1 ; le ∞^2 coniche di essa rappresentano (su di essa) le ∞^2 rette del piano non passanti per il punto.

L'insieme degli $\infty^2 E_2$ aventi i centri sopra una retta danno luogo analogamente ad una rigata cubica avente per direttrice una g_2 e per generatrici le rette g_1 appoggiate a g_2 .

Una g_1 e una g_2 non incidenti sono sempre riferite proiettivamente e le due rigate da esse determinate si segano in una conica, riferita proiettivamente ad ambedue. E viceversa una conica determina le generatrici dei due sistemi per i suoi punti, che coprono le rigate cubiche dette con direttrici g_1 e g_2 (e poiché gli S_4 delle due rigate stanno in S_6 si ritrova l'ordine 6 di V_3^6).

Lo S_6 delle due rigate cubiche per una conica contiene, in ogni punto di questa tre rette appartenenti allo S_3 tangente in esso alla V_3^6 , quindi è tangente lungo tutta la conica ⁽⁶⁾.

Viceversa presi due punti di V_3^6 se essi determinano una conica i loro S_3 tangenti, per appartenere ad S_6 , s'incontrano in un punto; se i due punti appartengono ad un piano congiunto gli S_3 tangenti in essi s'incontrano pure in un punto (a cui il piano è congiunto) o in una retta (quella che

(4) S. p. 20.

(5) S. p. 23.

(6) S. p. 21.

li congiunge); quindi in ogni caso gli S_3 tangenti a V_3^6 sono a due a due incidenti ⁽⁷⁾.

d) Due punti congiunti da una conica determinano uno S_5 (nello S_6 tangente lungo la conica), quello dei piani ad essi congiunti. Se si considerano le rette di un sistema uscenti dai due punti e la retta dell'altro sistema ad esse incidente viene determinato un 6-latero di rette di V_3^6 (alternativamente dell'uno e dell'altro sistema) di cui i due punti dati sono una coppia di vertici opposti. Le altre due coppie di vertici opposti determinano altre due coniche e gli S_6 tangenti lungo queste tre coniche passano per lo stesso S_5 . Per ogni conica, nello S_6 da essa determinato vi sono ∞^2 di questi S_5 .

3. ALCUNI LUOGHI DETERMINATI DA V_3^6 . — Le conclusioni precedenti seguono immediatamente dalla interpretazione della V_3^6 come rappresentante gli E_x del piano.

Per controllare alcune delle cose dette e procedere ad altre deduzioni conviene servirsi della rappresentazione analitica (I.I). Avendo in vista di studiare l'intorno di un $\overset{\circ}{E}_x$, che possiamo sempre scegliere (per l'arbitrarietà del riferimento) di centro in $O(0, 0, 1)$ e di retta $x^2 = 0$, porremo per brevità di notazione

$$(3.1) \quad \begin{cases} v_0 = \xi_{.2}^3, & v_1 = \xi_{.2}^1, & v_2 = \xi_{.1}^3, & v_3 = \xi_{.2}^2, & v_4 = \xi_{.3}^3, & v_5 = \xi_{.1}^1 \\ v_6 = \xi_{.1}^2, & v_7 = \xi_{.3}^2, & v_8 = \xi_{.1}^1 \text{ con } v_3 + v_4 + v_8 = 0 \end{cases}$$

e ci serviremo della *carta*, su cui si rappresenta la V_3^6 *aperta* togliendole le rigate cubiche corrispondenti a $x^3 = 0$ e $u_2 = 0$,

$$(3.2) \quad \begin{cases} v_0 = 1, & v_1 = x, & v_2 = u, & v_3 = y, & v_4 = -y - ux, & v_5 = -x(y + ux) \\ v_6 = uy, & v_7 = -y(y + ux), & v_8 = ux. \end{cases}$$

L' $\overset{\circ}{E}_x$ si rappresenta nel punto $\overset{\circ}{\Omega}$, $v_0 \neq 0$, $v_i = 0$ per $i \neq 0$. La retta $\overset{\circ}{g}_1$ (rappresentante gli E_x di centro O) è $(v_0, v_2) \neq 0$ ⁽⁸⁾; la $\overset{\circ}{g}_2(E_x \text{ con retta } x^2 = 0)$ è $(v_0, v_1) \neq 0$; il piano congiunto ad $\overset{\circ}{\Omega}$ è $(v_0, v_1, v_2) \neq 0$; lo $\overset{\circ}{S}_3$ tangente in $\overset{\circ}{\Omega}$ è

$$(3.3) \quad v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 (= v_8) = 0 \quad (9).$$

La rigata $R_{(1)}^3$ delle rette del 2° sistema appoggiate a $\overset{\circ}{g}_1$ sta nello $S_4^{(1)}$: $v_4 = v_5 = v_7 = 0$ ed è descritta dal punto

$$(3.4) \quad v_0 = -x^1 x^3, \quad v_1 = -(x^1)^2, \quad v_2 = x^2 x^3, \quad v_3 = -x^1 x^2, \quad v_6 = (x^2)^2$$

(7) S. p. 23.

(8) Indico con questa notazione che sono per essa tutte nulle le coordinate non scritte in parentesi.

(9) In generale scarteremo la coordinata v_8 in base all'identità $v_3 + v_4 + v_8 = 0$.

il luogo dei piani tangenti ad $R_{(1)}^3$ nei punti di $\overset{\circ}{g}_1$ (cioè dei piani congiunti ai punti di $\overset{\circ}{g}_1$) è il cono quadrico (di $S_4^{(1)}$)

$$(3.5) \quad v_1 v_6 + v_3^2 = 0 \quad , \quad v_4 = v_5 = v_7 = 0.$$

Gli analoghi luoghi per $\overset{\circ}{g}_2$ (spazio $S_4^{(2)}$, rigata $R_{(2)}^3$ e luogo dei piani congiunti ai punti di $\overset{\circ}{g}_2$) si ottengono scambiando $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ ordinatamente in $v_2, v_1, v_4, v_3, v_6, v_5$.

Il luogo degli S_3 tangenti nei punti di $\overset{\circ}{g}_1$, appartiene allo $S_5^{(1)} \subset S_4^{(1)}$: $v_5 = v_7 = 0$ ed è il cono quadrico $\Gamma_4^{(1)}$

$$(3.6) \quad v_1 v_6 = -v_3 (v_3 + v_4).$$

Analogamente si ha uno $S_5^{(2)} \supset S_3^{(2)}$ e in esso un cono $\Gamma_4^{(2)}$ che si ottengono con lo scambio precedentemente indicato.

La calotta del 2° ordine di centro $\overset{\circ}{\Omega}$ di $R_{(1)}^3$ sta nello $S_3^{(1)} \subset S_4^{(1)}$:

$$v_4 = v_5 = v_6 = v_7 = 0.$$

Analogamente si ha lo $S_3^{(2)} \subset S_4^{(2)}$: $v_3 = v_5 = v_6 = v_7 = 0$.

Questi spazi $S_3^{(1)}, S_3^{(2)}$ e lo spazio $\overset{\circ}{S}_3$ tangente a V_3^6 in $\overset{\circ}{\Omega}$, (3.3) stanno nello $\overset{\circ}{S}_4$: $v_5 = v_6 = v_7 = 0$ e formano fascio intorno al piano congiunto ad $\overset{\circ}{\Omega}$; ne segue che ogni S_3 di questo fascio è ormai determinato da un birapporto. In particolare lo S_3^* coniugato armonico di $\overset{\circ}{S}_3$ rispetto ad $S_3^{(1)}, S_3^{(2)}$ è ben determinato (in ogni punto di V_3^6) ed ha (in $\overset{\circ}{\Omega}$) le equazioni

$$(3.7) \quad v_3 - v_4 = v_5 = v_6 = v_7 = 0.$$

Questo S_3^* , di cui vedremo in seguito l'interesse per la geometria degli elementi differenziali, si dirà *spazio congiunto* al punto $\overset{\circ}{\Omega}$.

È pure determinato in ogni punto di V_3^6 uno spazio S_6 : quello relativo ad $\overset{\circ}{\Omega}$ è lo $S_6 = S_5^{(1)} \cup S_5^{(2)}$ ed ha equazione $v_7 = 0$.

4. RAPPRESENTAZIONE DELLA V_3^6 SOPRA UN SUO SPAZIO TANGENTE. - Il fatto che due S_3 tangenti a V_3^6 siano sempre incidenti dà luogo ad una rappresentazione, già considerata da G. Scorza⁽¹⁰⁾, della V_3^6 sopra un suo spazio tangente.

Qui vogliamo darne la rappresentazione analitica assumendo come S_3 tangente quello $\overset{\circ}{S}_3$ in $\overset{\circ}{\Omega}$.

(10) S. p. 23 e sg.

La carta (3.2), fornisce lo S_3 tangente a V_3^6 in un punto di parametri x, y, u : basterà formare la matrice con le v_i , con le coordinate del punto in esame e dei suoi punti derivati. Per avere le coordinate del punto di intersezione con \hat{S}_3 , che indicheremo con $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ (e $\mu_4 = -\mu_3$) basterà nella matrice precedente scrivere al posto delle v_i queste coordinate (e le rimanenti zero). Scrivendo che la matrice così ottenuta ha rango 4 si hanno le equazioni che determinano le μ_i ; di esse si constata che effettivamente tre sole sono indipendenti (come dev'essere per l'incidenza degli S_3 tangenti). La loro risoluzione dà

$$\rho\mu_0 = 2y + ux, \quad \rho\mu_1 = x(y + ux), \quad \rho\mu_2 = uy, \quad \rho\mu_3 = y(y + ux).$$

Se ora si ripassa a coordinate omogenee x^i, u_i si trova

$$(4.1) \quad \rho\mu_0 = x^2 u_2 - x^3 u_3, \quad \rho\mu_1 = -x^1 u_3, \quad \rho\mu_2 = x^2 u_1, \quad \rho\mu_3 = -x^2 u_3$$

che si invertono nelle

$$(4.2) \quad \begin{cases} \sigma x^1 = 2\mu_1 \mu_3, & \sigma x^2 = 2\mu_3^2, & \sigma x^3 = \mu_0 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \\ \tau u_1 = 2\mu_2 \mu_3, & \tau u_2 = \mu_0 \mu_3 - \mu_1 \mu_2, & \tau u_3 = -2\mu_3^2 \end{cases}$$

che naturalmente soddisfano alla $x^i u_i = 0$.

Da queste ultime si passa alle v_i , date a meno di un fattore da

$$(4.3) \quad \begin{cases} v_0 = \mu_0^2 \mu_3^2 - \mu_1^2 \mu_2^2, & v_1 = 2\mu_1 \mu_3 (\mu_0 \mu_3 - \mu_1 \mu_2), & v_2 = 2\mu_2 \mu_3 (\mu_0 \mu_3 + \mu_1 \mu_2) \\ v_3 = 2\mu_3^2 (\mu_0 \mu_3 - \mu_1 \mu_2), & v_4 = -2\mu_3^2 (\mu_0 \mu_3 + \mu_1 \mu_2), & v_5 = -4\mu_1 \mu_3^3 \\ v_6 = 4\mu_2 \mu_3^3, & v_7 = -4\mu_3^4, & v_8 = -4\mu_1 \mu_2 \mu_3^2. \end{cases}$$

Queste relazioni individuano la rappresentazione cercata e fanno passare da un punto dello \hat{S}_3 tangente in $\hat{\Omega}$ al punto corrispondente di V_3^6 . Si vede che gli unici punti che fanno eccezione sono quelli per cui $\mu_2 = \mu_3 = 0$ oppure $\mu_1 = \mu_2 = 0$, cioè quelli delle generatrici \hat{g}_1, \hat{g}_2 come si sapeva geometricamente.

Le (4.3) s'invertono (non in modo unico date le relazioni fra le v_i su V_3^6) nelle altre (in cui si sottintende un fattore di proporzionalità nelle μ)

$$(4.4) \quad \mu_0 = v_4 - v_3, \quad \mu_1 = v_5, \quad \mu_2 = -v_6, \quad \mu_3 = v_7.$$

Il sistema delle sezioni iperpiane di V_3^6 si rappresenta in un sistema ∞^7 di superficie del 4° ordine aventi in $\hat{\Omega}$ un punto (almeno) doppio unipolare con piano tangente il piano congiunto ad $\hat{\Omega}$, passanti per \hat{g}_1, \hat{g}_2 .

Per definire completamente questo sistema bisogna caratterizzare le calotte del 2° ordine delle due falde tangenti in $\hat{\Omega}$ ($\mu_0 = 1$)

$$(4.5) \quad \mu_3 = \mu_1 \mu_2 + \dots, \quad \mu_3 = -\mu_1 \mu_2 + \dots$$

fra loro a contatto armonico.

Allo scopo si consideri la $R_{(1)}^3$ relativa alla $\overset{\circ}{g}_1$ e si osservi che per il suo $S_4^{(1)}$ è $S_4^{(1)} \cup \overset{\circ}{S}_3 \equiv S_5^{(1)}$. La proiezione della calotta di $R_{(1)}^3$ in $\overset{\circ}{\Omega}$ fatta da una retta generica di $\overset{\circ}{S}_5^{(1)}$ su S_3 è proprio la prima delle calotte; la seconda si ottiene o usufruendo del contatto armonico o operando analogamente sulla $R_{(2)}^3$ relativa a $\overset{\circ}{g}_2$.

Servendosi delle (4.4) si ha subito la rappresentazione in S_3 dei due sistemi di rette di V_3^6 . Per esempio per le rette del primo sistema (E_1 , con centro in un punto y) si ha

$$\mu_0 = 2y^3 u_3 + y^1 u_1, \quad \mu_1 = y^1 u_3, \quad \mu_2 = -y^0 u_1, \quad \mu_3 = y^2 u_3$$

cioè in coordinate p_{ik} di retta (asse) entro $\overset{\circ}{S}_3$ la congruenza

$$(4.6) \quad p_{03} + p_{12} = 0, \quad p_{01} p_{23} = -p_{03}^2.$$

Il secondo sistema di rette (E_1 aventi in comune la retta tangente) si rappresenta nella congruenza

$$(4.7) \quad p_{03} - p_{12} = 0, \quad p_{02} p_{13} = p_{03}^2.$$

Analogamente per gli $\infty^2 E_1$ le cui rette passano per un punto y si ha $\xi_j^i y^j = 0$ quindi su V_3^6 la $R_{(1)}^3$ segata da

$$v_8 y^1 + v_1 y^2 + v_5 y^3 = 0, \quad v_6 y^1 + v_3 y^2 + v_7 y^3 = 0, \quad v_2 y^1 + v_0 y^2 + v_4 y^3 = 0$$

che per le (4.4) si rappresenta nella quadrica

$$(4.8) \quad 2\mu_2 \mu_3 y^1 + (\mu_0 \mu_3 - \mu_1 \mu_2) y^2 - 2\mu_3^2 y^3 = 0.$$

E così gli E_1 con i centri sopra una retta v , $\xi_j^i v_i = 0$, danno luogo ad una $R_{(2)}^3$ di V_3^6 nello S_4

$$v_8 v_1 + v_6 v_2 + v_2 v_3 = 0, \quad v_1 v_1 + v_3 v_2 + v_0 v_3 = 0, \quad v_6 v_1 + v_7 v_2 + v_4 v_3 = 0$$

che si rappresenta nella quadrica

$$(4.9) \quad 2\mu_1 \mu_3 v_1 + 2\mu_3^2 v_2 + (\mu_0 \mu_3 + \mu_1 \mu_2) v_3 = 0.$$

Anche le due reti di quadriche (4.8) e (4.9) sono geometricamente caratterizzate in base alle generatrici $\overset{\circ}{g}_1, \overset{\circ}{g}_2$ e alle calotte (4.5).

Le residue intersezioni (cioè tolte $\overset{\circ}{g}_1$ e $\overset{\circ}{g}_2$) delle coppie di quadriche prese nelle due reti sono le coniche immagini delle ∞^4 coniche di V_3^6 determinate dalle coppie di rette non incidenti appartenenti a sistemi diversi.

Meccanica quantica. — *Costruzione di un sistema fondamentale di operatori fisici differenziali, per ogni universo a gruppo base semplice.* Nota (*) del Corrisp. LUIGI FANTAPPIÈ.

1. È ben noto che l'equazione di Schrödinger, punto di partenza di tutta la moderna meccanica ondulatoria, viene fondata, a sua volta, sui principi della meccanica *classica*, e non su un sistema chiuso di postulati della stessa meccanica ondulatoria (o quantica). Si ha bisogno cioè di ricorrere, proprio all'inizio, a una teoria estranea, per prendervi a prestito le espressioni che ci sono necessarie, sostituendovi poi ai «momenti» gli operatori di «derivazione», che li rappresentano nella meccanica quantica. Così, per esempio, nel caso più semplice dell'assenza di campo, l'equazione di Schrödinger, generalizzata relativisticamente per le particelle senza *spin*, si ottiene dalla relazione (1)

$$(1) \quad \frac{E^2}{c^2} - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \mu^2 c^2$$

che lega l'energia E e i momenti p_k alla massa di quiete μ (c essendo la velocità della luce). Da questa equazione della fisica *macroscopica* (relativistica), l'equazione cercata della *meccanica ondulatoria* si ricava infatti mediante la sostituzione di dette grandezze con gli operatori che le rappresentano

$$(2) \quad E \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_k \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

nella forma della nota equazione (di Klein-Gordon)

$$(3) \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = \square \psi = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \mu^2 c^2 \psi.$$

Risolverla, significa dunque trovare le *autofunzioni* ψ e gli *autovalori*

$$(4) \quad \lambda = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \mu^2 c^2$$

dell'operatore \square di D'Alembert. Gli autovalori di quest'operatore, e cioè i *valori esatti*, che può assumere la grandezza quantica rappresentata da detto operatore, non sono quindi altro, a meno di un fattore costante, che i possibili valori μ^2 del quadrato della massa di quiete delle particelle. In particolare, per $\lambda = \mu = 0$, l'equazione (omogenea) (3) descrive le particelle con massa di quiete *nulla*, e cioè i fotoni; essa si riduce infatti all'*equazione della luce* (o di D'Alembert).

(*) Presentata nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) Cfr. P. JORDAN, *Anschauliche Quantentheorie*, Berlin, Springer, 1936, p. 207.

In questa Nota e in una Nota successiva vogliamo mostrare che l'equazione generalizzata (3) di Schrödinger della fisica relativistica si può invece ottenere senza fare alcun appello ai postulati della fisica *non quantistica*, ma semplicemente come « limite », per $R \rightarrow \infty$ (R = raggio dell'universo) di una analoga equazione differenziale del 2° ordine della teoria di « relatività finale » ⁽²⁾ il cui primo membro, a meno di un fattore costante, non è altro che *il più semplice operatore fisico* (applicato alla funzione incognita), fra quelli che abbiamo determinato in precedenti lavori ⁽³⁾, per ogni « universo » *quantico*, caratterizzato da un gruppo *base* G^r (semplice), che definisce l'*uguaglianza* tra due enti o fenomeni fisici di un tale universo (che indichiamo appunto con $\mathfrak{M}G^r$). Faremo infatti vedere in questa Nota che, per ogni universo a gruppo *base semplice*, e quindi anche, in particolare, per l'universo $\mathfrak{M}Fn_{3+1}^{10}$ (immagine del nostro universo sensibile, nella teoria di « relatività finale », in cui il gruppo « base » è il cosiddetto *gruppo finale* Fn_{3+1}^{10} , che al limite, per $R \rightarrow \infty$, si riduce proprio al *gruppo di Lorentz* Lz_{3+1}^{10} , gruppo base della teoria di relatività ristretta), si possono immediatamente costruire alcuni *operatori fisici*, semplicissimi, e cioè alcuni *operatori differenziali*, fondamentali per tutto l'universo. Nella Nota successiva mostreremo poi che, fra questi operatori, quello di *ordine minimo* è proprio l'operatore differenziale di 2° ordine $[\Box]_2$, a cui abbiamo accennato. E l'equazione

$$(5) \quad [\Box]_2 \psi = \lambda \psi$$

dei suoi autovalori e autofunzioni si potrà a buon diritto considerare *la naturale generalizzazione dell'equazione di Schrödinger* a tutti questi universi a gruppo base semplice, dato che quella valida per l'universo $\mathfrak{M}Fn_{3+1}^{10}$ della relatività « finale » si riduce proprio, al limite, per $R \rightarrow \infty$, all'equazione di Schrödinger (3) dell'ordinaria teoria di relatività ristretta, mentre, fuori del limite, la presenza di un nuovo termine, del tutto insospettato, può suggerire anche un più ampio *principio di equivalenza* (oltre che tra massa ed energia) tra *massa, energia e campo*.

2. Ricordiamo perciò (ved. Nota 2^a, citata in ⁽³⁾) che in un universo quantico qualunque $\mathfrak{M}G^r$, definito da un gruppo *base*, o gruppo *dell'uguaglianza*, G^r , il campo naturale di definizione delle « funzioni di stato » $\varphi(\mathbf{x})$ è proprio *il gruppo topologico* G^r stesso, e cioè l'insieme dei « punti » \mathbf{x} , immagini di tutte le trasformazioni T_x di G^r , poiché $|\varphi(\mathbf{x})|^2$ dà precisamente la *densità di probabilità*, perché una qualunque delle particelle « uguali » si trovi nella situazione che si ottiene da quella della particella campione, mediante la trasformazione T_x del gruppo. In questo « spazio » G^r dei punti \mathbf{x} , *il gruppo base*, con cui si

(2) Cfr. la mia Nota *Su una nuova teoria di relatività finale*, « Rend. Lincei », ser. 8^a, vol. 17, 1954.

(3) Cfr. L. FANTAPPIÈ, *Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica, Determinazione di tutte le grandezze fisiche possibili in un universo quantico*, « Rend. Lincei », ser. 8^a, vol. 12, 1952.

passa da un'entità fisica a un'altra entità *uguale*, subordina allora il gruppo *parametrico destro*

$$(6) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \alpha$$

mentre il gruppo *obiettivo*, che descrive gli apparenti cambiamenti dei fenomeni, dovuti ai cambiamenti di posizione dell'osservatore, subordina il gruppo *parametrico sinistro*

$$(7) \quad \mathbf{x}' = \alpha \cdot \mathbf{x}.$$

Poiché ogni operatore *fisico* K deve risultare *invariante* rispetto a questi due gruppi, si vede quindi che gli operatori fisici possibili in un dato universo non sono molti, e possono determinarsi facilmente, a partire dalla *sola struttura* del gruppo G^r stesso. Scegliendo per questo gruppo r *parametri canonici* x_1, x_2, \dots, x_r , che potremo pensare anche come componenti di un « *vettore* » \mathbf{x} , immagine del « *punto* » \mathbf{x} e della trasformazione T_x , si dimostra in particolare (ved. nota citata, n. 3 e 4) che ogni *operatore fisico lineare* K , e quindi anche ogni *grandezza quantica* (scalare), che è sempre rappresentata da un tale operatore, ha sempre la forma notevole

$$(8) \quad K\varphi(\mathbf{x}) = F[\varphi(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x})] = p(\bar{l}) \nabla \varphi(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x})$$

ove l'*indicatrice proiettiva* $p(\bar{l})$ del funzionale lineare F non è una funzione qualunque delle sue r variabili $t_1^1, t_1^2, \dots, t_r^r \equiv \bar{l}$ (contragredienti agli r parametri canonici t_1, t_2, \dots, t_r o x_1, x_2, \dots, x_r), ma una funzione che resta *invariante* per tutte le trasformazioni *duali* di quelle del gruppo aggiunto, che è cioè *invariante per il gruppo duale dell'aggiunto*. Il problema della determinazione di tutte le grandezze quantiche possibili nell'universo $\mathcal{M}G^r$ è così ricondotto al *calcolo delle funzioni invarianti* per questo gruppo duale, le quali si determinano sempre, col metodo classico dato da Lie, *integrando un certo sistema completo di equazioni a derivate parziali del 1° ordine, lineari e omogenee*, che si può subito scrivere, una volta note le *costanti di struttura* del gruppo G^r .

Particolarmente interessanti, tra questi invarianti, sono quelli dati da *polinomi omogenei* (che sono le *più semplici funzioni*)

$$(9) \quad p_s(\bar{l}) = \sum a_{s_1 s_2 \dots s_r} t_1^{s_1} t_2^{s_2} \dots t_r^{s_r}, \quad s_1 + s_2 + \dots + s_r = s$$

poiché ad essi corrispondono, per la formula (8), gli operatori *differenziali* (d'ordine s uguale al grado del polinomio),

$$(10) \quad \mathfrak{D}_s \varphi = p_s(\bar{l}) \nabla \varphi(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) = \frac{1}{s!} \left\{ \sum a_{s_1 s_2 \dots s_r} \frac{\partial^s}{\partial t_1^{s_1} \partial t_2^{s_2} \dots \partial t_r^{s_r}} \varphi(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) \right\}_{t=0}$$

che sono pure i *più semplici operatori* possibili (operatori « *locali* »), esprimendosi con le *sole derivate* della funzione $\varphi(\mathbf{x})$, fino all'ordine s .

3. Ma la determinazione degli invarianti del duale dell'aggiunto, come integrali del sistema a derivate parziali fornito dal Lie, si presenta a tutta

prima tutt'altro che facile! È però stupefacente rilevare che questa determinazione risulta *pressoché immediata e quasi senza calcoli* (oltre al calcolo *algebrico* di alcuni polinomi) nel caso abbastanza generale che il gruppo base G^r sia *semplice*, come per l'appunto è il *gruppo finale* (ma non il gruppo di Lorentz, né il gruppo di Galilei della fisica classica). E infatti, la cosiddetta « equazione caratteristica » del gruppo ⁽⁴⁾

$$(11) \quad (-1)^r \Delta(\rho) = \rho^r - \psi_1(\mathfrak{t}) \rho^{r-1} + \psi_2(\mathfrak{t}) \rho^{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} \psi_{r-1}(\mathfrak{t}) \rho = 0$$

ha per coefficienti $\psi_s(\mathfrak{t})$ dei polinomi omogenei (di grado s) nei parametri canonici, che si determinano facilmente con calcoli puramente algebrici, dalle costanti di struttura del gruppo, e che risultano *sempre invarianti del gruppo aggiunto* di G^r , mentre, se il gruppo G^r è semisemplice, $\psi_1(\mathfrak{t})$ è identicamente nullo, e $\psi_2(\mathfrak{t})$, primo coefficiente polinomiale non identicamente nullo, risulta *una forma quadratica non degenera* negli r parametri canonici. In questo caso è quindi sempre possibile cambiare, se necessario, i parametri canonici, e cioè effettuare su essi una conveniente sostituzione lineare, a coefficienti costanti (reali o immaginari), in modo che, nei nuovi parametri canonici, il primo invariante $\psi_2(\mathfrak{t})$, non identicamente nullo, risulti proprio uguale alla somma dei quadrati

$$(12) \quad \psi_2(\mathfrak{t}) = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_r^2.$$

Poiché, d'altra parte, questa forma è invariante per le trasformazioni, sempre lineari, del gruppo aggiunto, si ha allora che, con questi nuovi parametri canonici, che rendono $\psi_2(\mathfrak{t})$ del tipo (12), e che chiameremo perciò *parametri canonici « ortogonali »*, tutte le trasformazioni del gruppo aggiunto *risultano automaticamente « ortogonali »*, e quindi coincidenti con le loro duali. Si ha cioè che, *nei gruppi semisemplici*, in cui è possibile ridurre il coefficiente $\psi_2(\mathfrak{t})$ alla forma (12), *il gruppo aggiunto, in parametri canonici ortogonali, coincide sempre col suo duale*.

Dunque, con tali parametri, tutti gli invarianti del gruppo aggiunto, e in particolare *tutti i coefficienti dell'equazione caratteristica* (11) *sono anche invarianti del gruppo duale*.

Poiché, d'altra parte, per i gruppi semplici, il numero $r - q$ degli invarianti *indipendenti* non può superare il numero delle radici nulle della (11), (ved. Bianchi, op. cit., p. 249) che, per un teorema di Cartan ⁽⁵⁾ coincide col *rango* l (o « genere ») del gruppo ($r - q \leq l$), mentre l è definito come il numero dei coefficienti della (11), tra loro indipendenti (e quindi $l \leq r - q$) risulta allora che il numero degli invarianti indipendenti del gruppo aggiunto di un gruppo semplice è proprio l , e anzi che *un sistema completo di tali invarianti indipendenti è già offerto, senza ulteriori calcoli, da certi l coefficienti* $\psi_s(\mathfrak{t})$ *dell'equazione caratteristica* (11), e cioè da l polinomi omogenei, già noti,

(4) Cfr. L. BIANCHI, *Gruppi continui finiti*, Pisa, Spoerri, 1918, p. 237 e sg.

(5) Cfr. E. CARTAN, *La géométrie des groupes simples*, in *Oeuvres complètes*, p. 1, vol. 2, p. 212; Paris, Gauthier-Villars, 1952.

mentre tutti gli altri invarianti saranno dati semplicemente da *funzioni arbitrarie di questi l polinomi*.

In conclusione, possiamo dunque dire che, per un gruppo *semplice* G^r di rango l , basta scegliere *parametri canonici ortogonali* e costruire la relativa equazione caratteristica, per avere subito dai coefficienti $\psi_s(t)$ di questa equazione, senza ulteriori calcoli, *un sistema completo di l invarianti del gruppo aggiunto*, e quindi anche *del suo duale* (coincidente con esso), risultando così integrato senza altri calcoli anche il sistema alle derivate parziali, dato dal Lie.

È interessante osservare che, in corrispondenza a questi l invarianti *polinomi* $\psi_s(t)$, avremo dunque nell'universo quantico $\mathfrak{M}G^r$, altrettanti operatori lineari, e cioè *l grandezze quantiche fondamentali, e non più*, rappresentate proprio da l operatori differenziali del tipo (10)

$$(13) \quad |\bar{x}|_s \varphi = \psi_s(t) \nabla \varphi(t \cdot x).$$

Cosmologia. — *Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana.*

Nota III (*) del Corrisp. FRANCESCO ZAGAR.

Ritornando alle relazioni (17) e (18), si può dimostrare infine che una terza classe di soluzioni ha le espressioni

$$(III) \quad u = \kappa_1 \text{Sh}^{\nu_1} \tau, \quad v = \kappa_2 \text{Sh}^{\nu_2} \tau, \quad w = \kappa_3 \text{Sh}^{\nu_3} \tau,$$

con κ_i e ν_i costanti; infatti si ha ora

$$\frac{u'}{u} = \nu_1 \text{Cth} \tau, \quad \frac{u''}{u} = \nu_1 (\nu_1 - 1) \text{Cth}^2 \tau + \nu_1,$$

ed analoghe per v e w , per cui, se con le stesse posizioni (19) si prende

$$(32) \quad X = h \text{Sh}^n \tau, \quad \frac{X'}{X} = n \text{Cth} \tau,$$

si trova che gli esponenti delle (III) devono soddisfare alle identiche condizioni (21) e (21'). Valgono in conseguenza tutte le conclusioni e le relazioni successive del caso precedente [e cioè le relazioni (24)-(31)] con la sola avvertenza che le funzioni trigonometriche circolari devono essere sostituite da quelle iperboliche.

Ci limitiamo a riportare per il seguito le relazioni che danno la soluzione perfezionata e le componenti della velocità di un elemento generico

$$(III') \quad u = \kappa \text{Sh}^{\nu_1} \tau, \quad v = \kappa \text{Sh}^{\nu_2} \tau, \quad w = \kappa \text{Sh}^{\nu_3} \tau,$$

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{\nu_1}{\kappa^{3/2}} \frac{\text{Ch} \tau}{\text{Sh}^{1/2} K \tau} x_1, \dots \\ x_1 = c_1 u, \dots \\ \dot{x}_1 = \dot{c}_1 \frac{\text{Ch} \tau}{\text{Sh}^{1/2} K - \nu_1 \tau}, \dots \end{array} \right. \quad \rho = \frac{1}{4\pi h^2 \kappa^3} \frac{1}{\text{Sh}^K \tau}.$$

(*) Presentata nella seduta del 12 novembre 1955.

Come nei precedenti casi, dovendo essere ρ positivo, le costanti κ devono essere positive, mentre τ varia con t da 0 a ∞ .

Le tre coordinate x_i (e in conseguenza le distanze) aumentano in questo caso da 0 a valori infinitamente grandi, mentre le componenti delle velocità \dot{x}_i possono aumentare o diminuire a seconda del segno dell'esponente $\frac{1}{2} K - v_i$, ma con risultante sempre decrescente da valori infinitamente grandi a zero, come vedremo fra poco. Si ha cioè come nel primo caso soltanto una fase di espansione (però né uniforme, né radiale, come si vedrà) ⁽¹⁾.

Anche qui il gruppo di relazioni (25)–(30), col predetto cambiamento delle funzioni circolari in iperboliche, collega le costanti del problema alle osservazioni. Dato che le posizioni (27) restringono il problema, se si vuole restare nel caso generale conviene calcolare $f(\tau)$, \bar{K} ed i tre esponenti v_i con la (26), la (28) e le prime tre delle (25), dopo di che la (30) fornirà τ , la quarta delle (25) la costante h ed infine la (29) la costante κ^3 .

Il caso particolare più notevole è analogo al primo del caso precedente: $K = 6$ ($n = 2$); $v_1 = v_2 = v_3 = 2$, e cioè il caso isotropo relativo a questa classe di soluzioni, per il quale si ha $u = v = w$, caso chiamato anche iperbolico, dato che la relativa costante di integrazione è positiva. In questo caso speciale è

$$u = v = w = R = \kappa \operatorname{Sh}^2 \tau = \frac{1}{2} \kappa (\operatorname{Ch} 2\tau - 1).$$

$$\frac{dt}{d\tau} = X = \kappa^{3/2} \operatorname{Sh}^2 \tau, \quad t - t_0 = C (\operatorname{Sh} 2\tau - 2\tau),$$

come già noto, ed anche qui si tratta di un caso estremo; dato che il valore di K è il minimo possibile. Un altro caso è del tutto simile a quello discusso per la soluzione (II).

Riepilogando le tre classi di soluzioni, si vede che il carattere generale del problema è quello già trovato per l'ipotesi isotropica: l'espansione è il fenomeno più frequente, essendo la sola manifestazione possibile per i casi iperbolico e parabolico, mentre per il solo caso ellittico è possibile tanto la espansione quanto la contrazione. Ma i caratteri particolari del movimento sono ben differenti dai corrispondenti casi isotropi, in primo luogo perché le traiettorie, anziché linee rette sono sempre curve sghembe, le cui proiezioni sui piani coordinati sono iperbole del tipo

$$x_i = c x_j^u,$$

come può facilmente aversi dalle (16), (31) e (33), cosicché la rappresentazione del campo anisotropo si presenta come nelle figure 2 in luogo del ben noto campo isotropo di correnti radiali rappresentato nella fig. 1.

(1) L'inversione della direzione del tempo e di τ è impossibile, dato che le costanti κ , anche per la prima delle posizioni (27), non possono essere negative, cosicché ρ (per l'espressione data nelle (33)) per τ negativo diventerebbe negativo. La stessa conclusione vale per la prima classe di soluzioni, come si può facilmente verificare.

In secondo luogo anche le velocità dimostrano un andamento più complicato. Infatti in base alle equazioni per \dot{x}_i date dalle (16), (31) e (33), si ha per la velocità radiale

$$\dot{r} = \frac{r\dot{r}}{r} = \frac{1}{r} (x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 + x_3 \dot{x}_3),$$

la sola accessibile alle osservazioni attuali, e per la velocità spaziale $V^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2$, in coordinate polari, rispettivamente per i tre casi iperbolico, parabolico ed ellittico,

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{r}_{ip} = \frac{r}{x^{3/2}} \frac{\text{Ch } \tau}{\text{Sh}^{1/2} K \tau} E(\varphi, \vartheta) & V_{ip} = \frac{r}{x^{3/2}} \frac{\text{Ch } \tau}{\text{Sh}^{1/2} K \tau} F(\varphi, \vartheta) \\ \dot{r}_{par} = \frac{r}{t-t_0} E(\varphi, \vartheta) & V_{par} = \frac{r}{t-t_0} F(\varphi, \vartheta) \\ \dot{r}_{ell} = \frac{r}{x^{3/2}} \frac{\cos \tau}{\text{sen}^{1/2} K \tau} E(\varphi, \vartheta) & V_{ell} = \frac{r}{x^{3/2}} \frac{\cos \tau}{\text{sen}^{1/2} K \tau} F(\varphi, \vartheta) \end{array} \right.$$

$$E(\varphi, \vartheta) = v_1 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + v_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + v_3 \sin^2 \varphi$$

$$F(\varphi, \vartheta) = \sqrt{v_1^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + v_2^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + v_3^2 \sin^2 \varphi},$$

e da queste risulta facilmente tanto per le velocità radiali, quanto per quelle spaziali:

1° Le velocità ora dette di un singolo e determinato elemento diminuiscono col tempo in tutti i casi di espansione da valori infinitamente grandi (per $t=t_0$ e $\tau=0$) a zero (per $\tau=\pi/2$ oppure $t=\infty$ o $\tau=\infty$); mentre in caso di contrazione aumentano da zero ($\tau=\pi/2$) a valori infinitamente grandi ($\tau=\pi$);

2° in tutti i casi in una determinata epoca, cioè per un determinato valore di t e τ , le velocità lungo una direzione fissa (E ed $F = \text{cost.}$) aumentano in proporzione diretta della distanza, il fattore di proporzionalità [cioè il coefficiente di r nelle (34)] essendo variabile con la direzione (dipendendo da E o rispettivamente da F , dunque diverso per velocità radiali e totali).

Da questa proprietà, di avere cioè lungo una stessa direzione la proporzionalità costante tra velocità spaziale e radiale, risulta facilmente che una qualunque retta uscente dall'origine incontra tutte le traiettorie sotto uguale angolo;

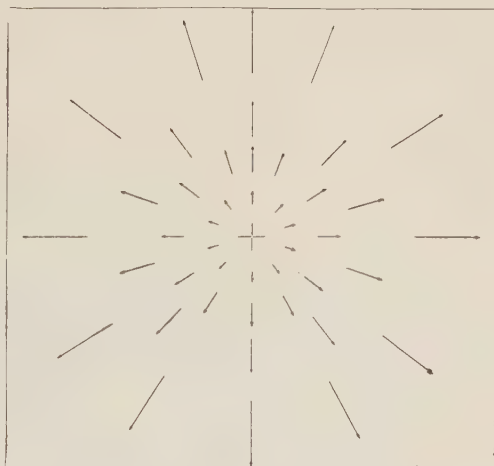


Fig. 1. - Distribuzione delle velocità per il modello isotropo.

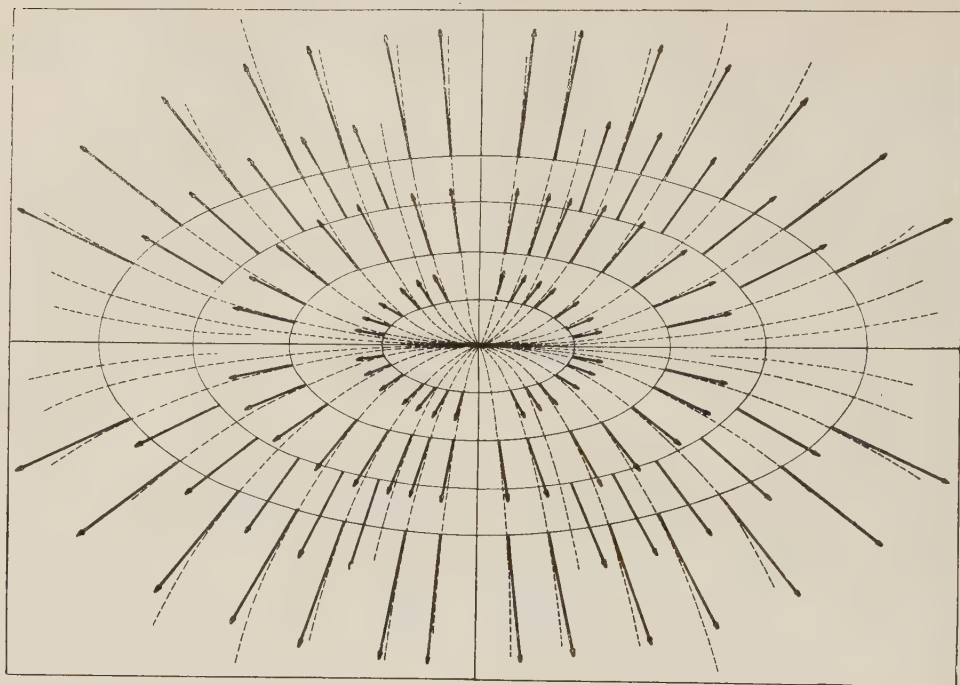


Fig. 2 a. - Traiettorie e velocità totali per il modello anisotropo con $x_2 = cx_1^2$.

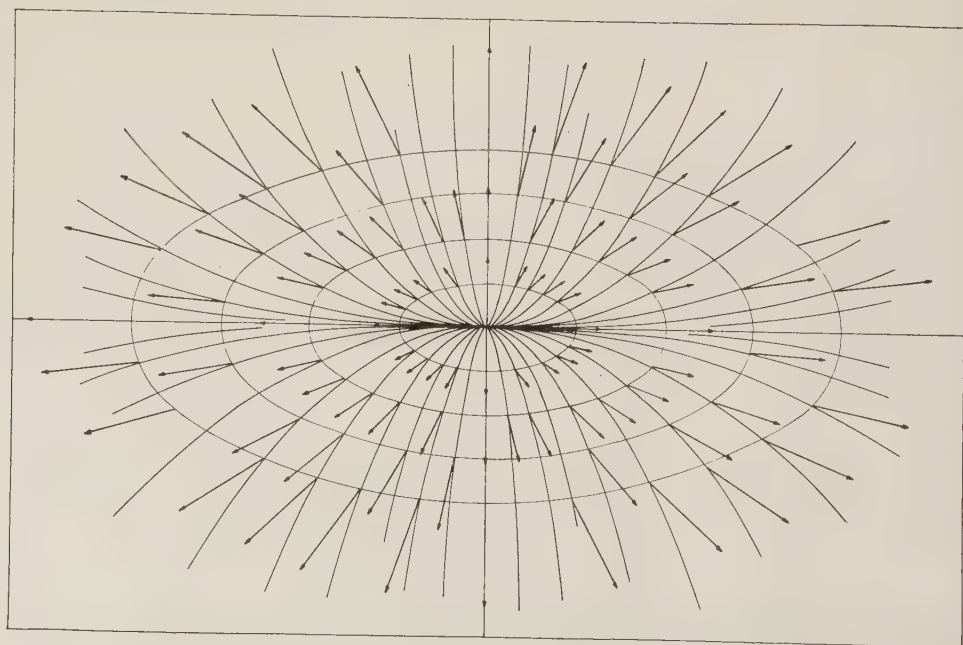


Fig. 2 b. - Velocità radiali per lo stesso modello.

3° in tutti i casi in una determinata epoca i punti con velocità spaziale di intensità uguale stanno sopra una superficie ellissoidica di assi proporzionali a $1/v_i$;

4° in un determinato punto dello spazio (r ed E, F costanti) la velocità della corrente va continuamente diminuendo col tempo in tutti i casi di espansione, mentre aumenta col tempo nel caso di contrazione (caso ellittico per $\pi/2 < \tau < \pi$).

Le fig. 2 rappresentano oltre alle traiettorie anche la distribuzione delle velocità in proiezione.

Da quanto precede risulta infine che nel caso iperbolico e in quello parabolico il processo (di espansione) si svolge in un tempo infinitamente grande (tra $t = t_0$ e $t = \infty$), mentre nel caso ellittico il ciclo completo (di espansione e contrazione) si svolge in un tempo limitato, e cioè per la (24) nel

$$\text{tempo } T = h \int_0^\pi \sin^n \tau \cdot d\tau \quad (\text{nel caso isotropo di } n = 2, T = 2^{-1} \pi h).$$

Per le applicazioni numeriche conviene ancora esprimere le costanti nei tre casi mediante altre grandezze, di significato fisico. A tale scopo osserviamo che dalla prima delle (7) può scriversi

$$\frac{4}{3} \pi C = \frac{4}{3} \pi u v w \rho,$$

e da ciò si vede che $\frac{4}{3} \pi C$ può interpretarsi come la massa dell'Universo contenuta nello spazio ellissoidico di semiassi u, v, w ; indicando con \mathfrak{M} questa massa, si ha

$$C = \frac{3 \mathfrak{M}}{4 \pi}.$$

Per il *caso parabolico* essendo le tre costanti sempre unite nel prodotto, e potendosi perciò porre $\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = \kappa^3$, si ha dalla (9')

$$C = \frac{\kappa^3}{4 \pi k^2} (2 - [v^2]),$$

e da ciò

$$(35) \quad \kappa = \sqrt[3]{\frac{3 \mathfrak{M} k^2}{2 - [v^2]}}.$$

Per il *caso ellittico e iperbolico* è invece per la seconda delle (21)

$$C = \frac{\kappa^3 [v]}{4 \pi k^2 h^2},$$

per cui risulta:

$$(35') \quad \kappa = \sqrt[3]{\frac{3 \mathfrak{M} k^2 h^2}{[v]}}.$$

Chimica. — *Ricerche preliminari sullo spettro ultravioletto di assorbimento di derivati carbonilici del pirrolo*^(*). Nota di GIOV. BATISTA BONINO e ANNA MARIA MARINANGELI, presentata ^(**) dal Socio G. B. BONINO.

Riferiamo brevemente, ed in via preliminare, su alcune ricerche che vorrebbero portare nuovi elementi nella discussione della struttura e della configurazione molecolare dei derivati carbonilici del pirrolo ed in particolare della 2-pirrolaldeide, composto che, come si sa, ha suscitato vive discussioni nella bibliografia chimica in questo ultimo mezzo secolo.

È noto ⁽¹⁾ che a costituire il « doppio legame » fra i due atomi del gruppo carbonilico $C=O$, concorrono anzitutto due elettroni appartenenti ad un orbitale σ di legame (che indicheremo genericamente con $[t_i t_j]$, dove, nel caso di un $C=O$ non coniugato, i, j , indicano rispettivamente gli atomi di C e di O). Tale orbitale σ ammette infiniti piani di simmetria passanti per l'asse del gruppo $C=O$ stesso. Altri due elettroni del gruppo $C=O$ (i cosiddetti « elettroni π ») appartengono invece ad un orbitale « legante » che ammette due soli piani di simmetria passanti per l'asse del gruppo. L'orbitale cioè è simmetrico rispetto ad uno dei due piani e antisimmetrico all'altro (piano nodale). Sia questo secondo piano il piano xy , e indichiamo i due elettroni (e cioè i due orbitali atomici) che costituiranno il legame π con le lettere z . Gli elettroni del legame σ siano indicati con le lettere t .

La configurazione elettronica del gruppo carbonilico $C=O$ allo stato fondamentale sarà perciò descrivibile con tre orbitali simbolicamente indicati

(*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico « Giacomo Ciamician » dell'Università di Bologna.

Dopo la presentazione di questa Nota all'Accademia, e poco prima dell'arrivo delle prime bozze per la correzione, è apparsa nel fascicolo di novembre della « Gazzetta Chimica Italiana » una Nota di R. Andrisano e G. Pappalardo sullo spettro U. V. di alcuni derivati pirrolici fra cui la 2-pirrolaldeide e la N-metilpirrolaldeide. Le esperienze dei citati Autori sono eseguite su soluzioni in alcool dei detti composti. Non abbiamo potuto tener conto per ora di questi risultati, come pure di quelli già da noi ottenuti, pure in soluzione alcoolica, ed abbiamo riportato e discussi, in questa Nota, i nostri risultati ottenuti invece da soluzioni in normal-esano purissimo delle aldeidi pirroliche per metterci al riparo dalle incertezze che il solvente ossidrilato avrebbe presumibilmente potuto proiettare sul significato dei risultati, dato appunto lo speciale tipo di perturbazioni che si tenta di chiarire con queste nostre ricerche.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) Vedi per esempio H. L. McMURRY e R. S. MULLIKEN, *Mechanism of Wave Length Absorption of the Carbonyl Group*, in « Proc. Nat. Am. Sci. (U.S.A) », 26, 312 (1940); E. SCROCCO e O. SALVETTI, *Contributo alla conoscenza degli stati elettronici π del gruppo carbonilico*, « La Ricerca Scientifica », 23, 1410 (agosto 1953).

nel modo seguente, trascurando, come di solito, gli elettroni K delle orbite interne dei due atomi ⁽²⁾:

$$N [t_i t_j]^2 [zz]^2 [y_o]^2.$$

Per chiarire il significato dell'orbitale $[y_o]^2$ si deve ricordare che l'atomo di ossigeno, oltre ai due elettroni che contribuiscono rispettivamente al legame σ e al legame π del gruppo carbonilico possiede ancora, sul livello più esterno, una coppia di elettroni su un orbitale atomico antisimmetrico al piano che passa per l'asse del gruppo $C=O$ e che è perpendicolare al piano di antisimmetria degli elettroni π . Se indichiamo la direzione del legame $C=O$ con la x , dovremo indicare con la lettera y questo orbitale atomico la cui nuvola di carica è ripartita appunto preferenzialmente sull'asse delle y .

Per identificare i vari salti elettronici che possono dar luogo alle bande di assorbimento nell'ultravioletto, dovremo prima stabilire le configurazioni elettroniche dei vari stati eccitati del gruppo $C=O$.

Uno di questi stati (che si indica con la lettera V_1) corrisponde alla eccitazione della nuvola di carica π e cioè corrisponde al passaggio di un elettrone z dal più alto livello occupato allo stato fondamentale al più basso livello eccitato, restando inalterato l'orbitale molecolare corrispondente al legame σ .

Ora fra i primi livelli eccitati del gruppo $C=O$ possiamo averne due ⁽³⁾ che risultano: il primo dal passaggio di un elettrone dal più alto livello occupato π , nello stato fondamentale, al più basso livello π^* eccitato. Un altro livello eccitato del gruppo $C=O$ risulterebbe dal passaggio di un elettrone y dall'orbitale $[y_o]^2$ allo stesso primo livello eccitato della nuvola di carica π .

Per il gruppo $C=O$ non coniugato potremo prevedere così i seguenti livelli (gli orbitali segnati con l'asterisco corrispondono ai più bassi livelli eccitati della data specie):

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} N [t_i t_j]^2 [zz]^2 [y_o]^2 \\ A_1 [t_i t_j]^2 [zz]^2 [zz]^* [y_o] \\ B_1 [t_i t_j]^2 [zz]^2 [t_i t_j]^* [y_o] \\ V_1 [t_i t_j]^2 [zz] [zz]^* [y_o]^2. \end{array} \right.$$

A questi stati corrisponderanno le seguenti transizioni elettroniche (ved. fig. 1) che determinano le bande ultraviolette di maggior lunghezza d'onda presentate dal gruppo carbonilico:

$$(II) \quad N \rightarrow A_1 \quad ; \quad N \rightarrow B_1 \quad ; \quad N \rightarrow V_1.$$

(2) Al legame σ del $C=O$ contribuiscono due orbitali atomici che non sono equivalenti (per quanto qui indicati con la stessa lettera t) e cioè un orbitale di tipo p_x per l'ossigeno ed un orbitale ibrido sp per il carbonio. Manteniamo questo simbolismo, piuttosto generico, per non dover poi modificare e specificare meglio i simboli nel caso della trattazione del $C=O$ coniugato.

(3) Vedi H. L. Mc MURRY, *The long Wave - Length Spectra of Aldehydes and Ketones (Conjugates aldehydes a. Ketones)*, « Journ. of Chem. Phys. », 9, 241 (1941).

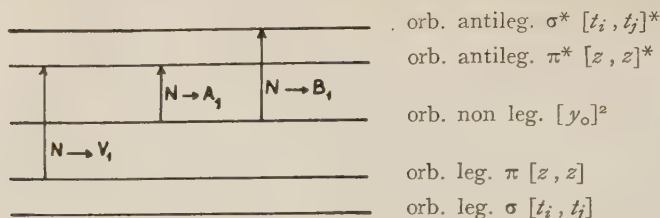


Fig. 1.

Se passiamo ora da una aldeide (o chetone) con gruppo carbonilico non coniugato ad una aldeide (o chetone) con gruppo carbonilico coniugato (per esempio aldeide crotonica, aldeide benzoica, furfurolo) i quattro stati sopra indicati possono sostanzialmente essere ancora considerati. Lo stato N sarà costituito da tutti gli orbitali corrispondenti appunto allo stato fondamentale di tutti i legami σ della molecola e dai vari orbitali « leganti » della nuvola di carica π . Si suppone in questo caso che il piano di antisimmetria degli orbitali atomici z del gruppo $C=O$ coincida col piano di antisimmetria (piano nodale) di tutti gli altri orbitali z della molecola (elettroni π , di insaturazione, elettroni aromatici, ecc.)

Allora i simboli segnati nella indicazione degli stati in (I) potranno interpretarsi così: l'orbitale $[y_o]^2$ sarà sempre l'orbitale p_y dell'atomo di ossigeno carbonilico, l'orbitale $[zz]^2$ sarà il più alto orbitale π occupato allo stato fondamentale della molecola, con $[zz]^*$ si indicherà l'orbitale eccitato più basso (e non occupato) nello stato fondamentale della molecola. Gli orbitali $[t_i t_j]$ corrisponderanno simbolicamente agli orbitali simmetrici al piano nodale degli elettroni z e costituiscono sempre i cosiddetti legami σ . Con il simbolo $[t_i t_j]$ si descrive soltanto il più alto (energeticamente), di questi orbitali simmetrici allo stato fondamentale della molecola e con $[t_i t_j]^*$ l'orbitale eccitato più basso della stessa specie.

Con queste premesse avranno ancora significato le transizioni indicate in (II).

Ora è chiaro che gli orbitali $[y_o]$ e gli orbitali di tipo $[t_i t_j]$ non sono praticamente perturbati dalla coniugazione del gruppo $C=O$ (almeno in via di prima approssimazione). La transizione $N \rightarrow B_i$ porterà perciò ad un assorbimento ultravioletto praticamente indipendente dallo stato di coniugazione. Per esempio la transizione $N \rightarrow B_i$ nell'acetaldeide porta ad una banda di assorbimento a circa 1800 \AA .⁽⁴⁾ Tale banda permane praticamente nella stessa posizione anche nella aldeide crotonica⁽⁴⁾ dove il gruppo carbonilico è coniugato con un doppio legame etilenico.

Viceversa per le transizioni $N \rightarrow A_i$ e $N \rightarrow V_i$ restano impegnati orbitali $[zz]$ e cioè per $N \rightarrow A_i$ sarà impegnato il primo orbitale eccitato $[zz]^*$ e per $N \rightarrow V_i$ oltre a questo sarà impegnato anche il più alto orbitale $[zz]$ occupato nello stato fondamentale. Si sa che lo spettro dei livelli corrispon-

(4) A. D. WALSH, « Trans. of Far. Soc. », XLI, 502 (1945).

denti a questi orbitali $[zz]$ è strettamente legato al tipo ed allo stato di coniugazione e perciò le bande ultraviolette d'assorbimento che corrispondono a queste transizioni saranno particolarmente influenzate dalla coniugazione.

La transizione $N \rightarrow A_1$ dovrebbe essere proibita dalle regole di selezione. Però tali regole vengono superate da ragioni teoriche già discusse nella letteratura ⁽⁵⁾. L'intensità della banda di tipo $N \rightarrow A_1$ è perciò sempre assai più piccola dell'intensità della banda $N \rightarrow V_1$ che risulta permessa dalle regole di selezione.

È noto per esempio che la banda ultravioletta di tipo $N \rightarrow V_1$ che nell'acetaldeide allo stato di vapore ⁽⁶⁾ si trova a circa 1650 Å e passa, per effetto di coniugazione, a 2030 Å nell'aldeide crotonica (pure osservata allo stato di vapore) si sposta a 2630 Å nell'esadienale (aldeide sorbinica) ed a 3060 Å nell'octatrienale. (I dati riferentisi a queste due ultime aldeidi si intendono per soluzioni in esano normale).

È supponibile perciò che lo studio dell'assorbimento ultravioletto in questa zona possa dare delle utili indicazioni sullo stato di coniugazione del gruppo carbonilico nel caso delle aldeidi e dei chetoni pirrolici.

Ricerche precedenti sul furufurolo e suoi omologhi vinilici avevano messo in evidenza che lo spostamento, per effetto di coniugazione, della banda di assorbimento ultravioletta corrisponde allo spostamento che si osserva per aldeidi insature e coniugate a catena normale aventi un numero di doppi legami corrispondenti alla somma dei due doppi legami virtuali del nucleo furanico più il numero di doppi legami vinilici che separano nelle molecole di queste sostanze il gruppo carbonilico dal nucleo furanico sostituito in α .

Queste ricerche portavano immediatamente ad attribuire la banda a 2700 Å circa del furfurolo (banda che si sposta negli omologhi vinilici a maggiori lunghezze d'onda fino per esempio a 3730 Å nel caso di tre doppi legami in catena laterale) a transizioni del tipo $N \rightarrow A_1$ ovvero $N \rightarrow V_1$ influenzabili appunto dall'effetto di coniugazione.

Ricerche posteriori di Walsh ⁽⁷⁾ hanno messo in evidenza le ragioni per le quali una tale banda deve essere però più precisamente attribuita alla transizione $N \rightarrow V_1$ anziché a quella $N \rightarrow A_1$.

Abbiamo studiato, con l'aiuto di uno spettrofotometro per ultravioletto di Beckman mod. D. U., lo spettro ultravioletto tra 2200 e 4000 Å dell'aldeide α -pirrolica, della N -metil-2pirrolaldeide e del α, α' -dipirrilchetone.

I composti erano stati preparati in questo laboratorio con i metodi sotto indicati e presentavano tutte le caratteristiche di identità e di purezza.

(5) Vedi per esempio G. HERZBERG e E. TELLER, «Zeit. f. Physik Chem.» «B», 27, 410 (1933).

(6) K. V. HAUSSE, R. KUHN, A. SMAKULA, «Zeit. f. Phys. Chem.» «B», 29, 378 (1935); vedi anche R. ANDRISANO e A. TUNDO, questi «Rendiconti», vol. XIII, p. 158, (1952).

(7) A. D. WALSH, «Trans. Far. Soc.», XLII, 62 (1946).

La α -pirroaldeide venne preparata con il solito metodo di Bamberger e Djierdjian ⁽⁸⁾, la N-metilpirrolaldeide venne preparata sia con il metodo proposto da L. Alessandri ⁽⁹⁾ per azione dello joduro di metile sul sale sodico secco dell'aldeide pirrolica ordinaria, sia anche con il metodo descritto da E. Fischer ⁽¹⁰⁾ per azione del solfato dimetilico sull'aldeide pirrolica in soluzione alcalina. Il dipirrilchetone (non sostituito) venne preparato secondo le indicazioni di Ciamician e Magnaghi ⁽¹¹⁾ e di H. Fischer e H. Orth ⁽¹²⁾.

Ringraziamo la sig.ra A. M. Drusiani-Fiorentini che ci ha prestato efficace collaborazione per la preparazione del dipirrilchetone e per quella della N-metilpirrolaldeide secondo le indicazioni di Alessandri.

Le misure sono state eseguite in soluzione di esano purissimo per spettroscopia ultravioletta. I risultati sono schematizzati nella tabella I ⁽¹³⁾.

Un primo esame di questi dati ci mostra che (a differenza di quanto avviene nel furufurolo, che tra 2200 e 3000 Å presenta una sola banda a 2700 Å sensibile all'effetto di coniugazione) nelle aldeidi pirroliche esaminate si osservano invece due bande intense e cioè una prima banda a 2500 Å nella aldeide pirrolica ordinaria e nella N-metilpirrolaldeide (intensità $\log \epsilon = 3,8 - 3,9$) ed una seconda banda più intensa ($\log \epsilon = 4,25$) a circa 2800 Å.

Nel dipirrilchetone permane la banda a 2500 Å mentre la banda a 2800 Å dell'aldeide pirrolica si trova spostata a 3250-3300 Å circa e permane pure intensa se pure un po' meno che nella pirrolaldeide ordinaria.

A prima vista questa banda a 3250-3320 Å del dipirrilchetone sembra essere la banda che appare nello spettro delle due aldeidi pirroliche esaminate a 2800 Å spostata di 400-500 Å verso le maggiori lunghezze d'onda e ciò, verosimilmente, per effetto di una maggiore coniugazione del C=O chetonico « meso » nel dipirrilchetone.

Sembrerebbe dunque che questa banda a 2800 Å dell'aldeide pirrolica possa essere sensibile all'effetto di coniugazione. Allora la sua alta intensità dovrebbe farla attribuire ad una transizione elettronica di tipo $N \rightarrow V_r$. E ciò conformemente all'attribuzione ad una transizione $N \rightarrow V_r$ fatta da qualificati Autori precedenti per la banda ultravioletta con massimo a 2600 Å del furfurolo.

(8) E. BAMBERGER e G. DJIERDJIAN, « B. », 33, 536 (1900).

(9) L. ALESSANDRI, questi « Rendiconti », XIV/II, 198 (1915).

(10) E. FISCHER, « B. », 46, 2510 (1913).

(11) G. CIAMICIAN e P. MAGNAGHI, « B. », 18, 1831 (1855).

(12) H. FISCHER e ORTH, « A. », 502, 263 (1933).

(13) Alla preparazione, all'analisi ed al controllo chimico fisico e spettroscopico dei composti citati in questa Nota come pure al rilevamento dei loro spettri ultravioletti in normal-esano, in alcool ed in altri solventi ed in soluzioni a diversi valori della concentrazione idrogenionica, hanno collaborato già nel 1954 i laureandi: Forni Giorgio e Veronesi Bramante (che qui ringraziamo). Essi hanno discusso tali contributi nelle rispettive tesi di laurea a Bologna.

TABELLA I.

Composto	Solvente	Conc. in g. mol/l	1 ^a banda massimo di as- sorbim. in Å	Intensità log. ε	2 ^a banda massimo di as- sorbim. in Å	Intensità log. ε	Note
2-pirrolaldeide	esano n.	0,0001	2460	3,93	2790	4,46	Banda a 2500 Å parzial- mente risolta in due massimi
		0,0005	2460, 2520	3,75	2790	4,24	
		0,0010	2500	3,76	2790	4,24	
N-metil-2-aldeide pirrolica	»	0,0001	2520	3,85	2790	4,20	Banda a 3200-3300 Å parzialmente risolta in due massimi
		0,0005	2550	3,90	2790	4,27	
		0,0020	2535	3,85	2790	4,08	
α-α'-dipirrilchetone	»	0,0010	2500	3,10	3240, 3320	3,70	

D'altra parte la banda con un massimo a 2500 \AA dei derivati pirrolici studiati non può attribuirsi ad una transizione di tipo $N \rightarrow A_1$. Come già ha osservato Walsh per il furfurolo (e come anche si può dedurre dall'elegante studio teorico di Scrocco e Salvetti⁽¹⁾) una transizione di tipo $N \rightarrow A_1$ dovrebbe in questo caso portare ad una banda di assorbimento con massimo oltre ai 3000 \AA e dovremmo aggiungere anche che l'intensità di tale banda dovrebbe essere forse più bassa di quanto non appaia negli spettri che abbiamo esaminati. Questa banda a 2500 \AA si ritrova invece inalterata anche nello spettro del dipirrilchetone per quanto sia pacifico che la coniugazione del $C=O$ nel dipirrilchetone sia assai più intensa che nella N -metilpirrolaldeide. Sembrerebbe dunque che questa banda fosse pochissimo sensibile all'effetto di coniugazione della nuvola di carica π . Si potrebbe pensare di riferire tale banda ad una transizione di tipo $N \rightarrow B_1$. Però, d'ordinario, a questo tipo di transizione non sensibile alla coniugazione corrisponde una banda ultravioletta a lunghezza d'onda assai più bassa e cioè attorno a 1800 \AA e ciò sia in aldeidi non coniugate, come l'acetaldeide, sia in aldeidi coniugate, come l'aldeide crotonica ed il furfurolo.

Per confermare l'assegnazione della banda a 2500 \AA delle due aldeidi pirroliche studiate ad un tipo $N \rightarrow B_1$ (cosa che potrebbe portare anche conseguenze di carattere chimico rilevabili sperimentalmente) bisognerebbe rendersi conto della ragione di questo forte spostamento verso le maggiori lunghezze d'onda rispetto per esempio a quel che avviene nel caso del furfurolo. E tali ragioni bisognerebbe trovarle in specialissime caratteristiche degli orbitali $[t_i t_j]$ simmetrici al piano nodale degli orbitali z ovvero anche in particolari situazioni dell'orbitale atomico $[y_o]^2$ dell'ossigeno carbonilico.

Soltanto un ulteriore approfondimento di questo studio, sia dal punto di vista sperimentale come anche da un punto di vista teorico semiquantitativo potrà dare nuovi elementi per una discussione.

Un aspetto da sottolineare è il comportamento della banda di tipo $N \rightarrow V_1$ a 2800 \AA dell'aldeide pirrolica e della N -metilpirrolaldeide. Questa banda si sposta fortemente nel dipirrilchetone e dimostra una netta sensibilità alla coniugazione. Però sorprende il fatto di trovare questa banda nella identica posizione e con praticamente uguale intensità sia nella pirrolaldeide ordinaria, sia nella N -metilpirrolaldeide. Le spiccate differenze del comportamento chimico del gruppo carbonilico in queste due aldeidi potrebbe riferirsi a profonde differenze nello stato di coniugazione del $C=O$ nei due composti se si deve ammettere come caratteristica della pirrolaldeide ordinaria (come sosteneva Emilio Fischer⁽²⁾) una interazione tra immينو pirrolico e $C=O$ carbonilico. Ora è curioso di non trovar traccia di una tale differenza nelle bande corrispondenti alla transizione $N \rightarrow V_1$ per le due aldeidi studiate.

Si dovrebbe concludere che la nuvola di carica π nei due composti citati si trovi presso a poco nelle stesse condizioni. Bisognerebbe allora trovare le ragioni delle profonde differenze di comportamento chimico del gruppo $C=O$

dei due composti in fatti che non dipendano dalla perturbazione « coniugativa » della nuvola elettronica π . Si dovrebbe cioè fare intervenire allora l'orbitale atomico $[\gamma_0]^2$ dell'ossigeno carbonilico nella perturbazione con l'immino pirrolico. In questo caso la nuvola di carica π resterebbe presso a poco invariata nei due composti. Come seconda ipotesi si potrebbe anche ammettere che il meccanismo dell'assorbimento della banda a 2800 Å nelle due aldeidi sia diverso e che cioè le due bande, per quanto abbiano i massimi di assorbimento presso a poco nella stessa posizione dello spettro, siano riferibili a due transizioni elettroniche non proprio di tipo o di grado eguale.

Ambedue queste ipotesi vanno esaminate a fondo anche in relazione ai numerosi elementi di carattere chimico oramai conosciuti e anche in riferimento a tutti i dati già rilevati per lo spettro ultrarosso, lo spettro Raman, i momenti dipolari, ecc. di questi composti.

Ci proponiamo perciò di ritornare presto sull'argomento con nuovi dati sperimentali e anche con risultati di calcoli teorici che permettano una più approfondita discussione di insieme.

Chimica. — *Polimeri cristallini del butadiene e struttura del 1-2-polibutadiene* (*). Nota di GIULIO NATTA e PAOLO CORRADINI, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

Come già uno di noi aveva annunciato al Simposio di Chimica Macromolecolare di Zurigo (*), lo studio sistematico degli spettri ai raggi X ed ai raggi di elettroni dei polimeri del (1-3) butadiene, ottenuti con diversi procedimenti di polimerizzazione a meccanismo anionico, ci ha permesso di identificare due diversi tipi di polimeri altamente cristallini.

La descrizione dei processi di catalisi selettiva che hanno permesso di preparare per la prima volta tali nuovi polimeri, sarà oggetto di una pubblicazione separata in collaborazione con L. Porri.

1-4 trans Polibutadiene. — L'esame alla spettrografia infrarossa effettuato da E. Mantica e D. Morero in questo Istituto ha permesso di stabilire che uno dei due tipi di polimeri cristallini prodotti con catalizzatori eterogenei possiede un concatenamento 1-4 trans delle unità monomeriche. Ai raggi X esso risulta dimorfo; presenta una modificazione cristallina stabile a temperatura ambiente, che si trasforma a temperatura superiore a 60°C in un'altra modificazione pure cristallina.

Quest'ultima forma, per polimeri di peso molecolare dell'ordine di 100.000, presenta un punto di fusione ai raggi X di 130°C.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Soc. Montecatini.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) G. NATTA, «Makr. Chemie», 16, 213 (1955).

La forma stabile a temperatura ambiente presenta una periodicità di $4,9 \text{ \AA}$ lungo l'asse della catena e l'impacchettamento delle molecole normalmente all'asse della catena è di tipo esagonale con $a = 4,54 \text{ \AA}$. La forma stabile a temperatura più alta sembra invece connessa con una spiralizzazione della catena.

Sulla struttura delle due modificazioni cristalline del 1-4-trans-polibutadiene riferiremo più diffusamente in una prossima comunicazione, insieme ai risultati dello studio strutturistico di altre polidiolefine cristalline.

1-2 Polibutadiene. - L'altro tipo di polimero cristallino del butadiene 1-3 possiede invece un concatenamento 1-2 delle unità monomeriche ed

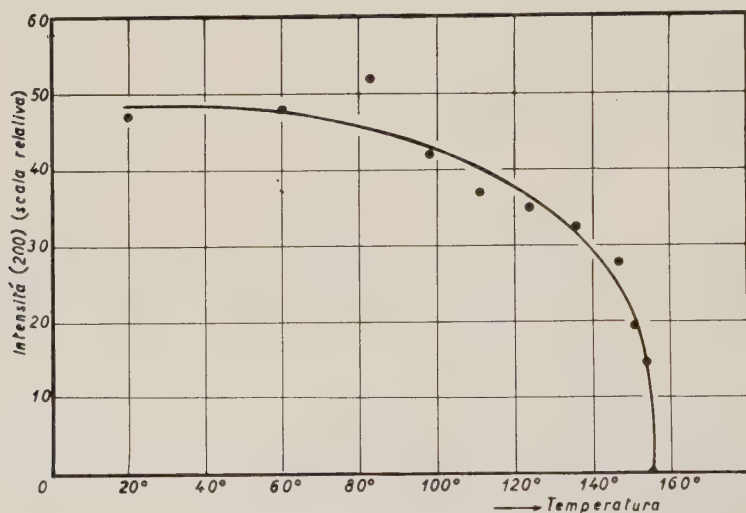


Fig. 1. - Curva di fusione roentgenografica del 1-2-polibutadiene.

infatti i campioni nei quali è stato riscontrato hanno rivelato all'esame infrarosso la presenza di oltre il 90 % di doppi legami vinilici insieme a meno del 10 % di doppi legami cis e trans.

Ci limitiamo in questa Nota a descrivere la struttura cristallina di questo ultimo polimero.

I prodotti esaminati si presentano sotto forma di polvere bianca facilmente stampabile a caldo. All'esame coi raggi X (radiazione di un anticondotto di rame) forniscono spettri registrati con contatore Geiger come quello rappresentato in fig. 1 fuori testo, con dei massimi per distanze reticolari di $6,60, 5,49, 4,20, 3,80 \text{ \AA}$. Essi differiscono notevolmente dallo spettro del poli-alfa-butene isotattico ⁽²⁾. Nello spettro di fibra effettuato su fili estrusi stirati, i primi tre massimi sopraindicati ed altri cadono sull'equatore (fig. 2 fuori testo), mentre il massimo a $3,80 \text{ \AA}$ cade sul primo strato. La periodicità lungo l'asse della fibra risulta di $5,1 \pm 0,1 \text{ \AA}$.

(2) G. NATTA, « Atti Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. IV, sez. II, fasc. 4, 61 (1955).

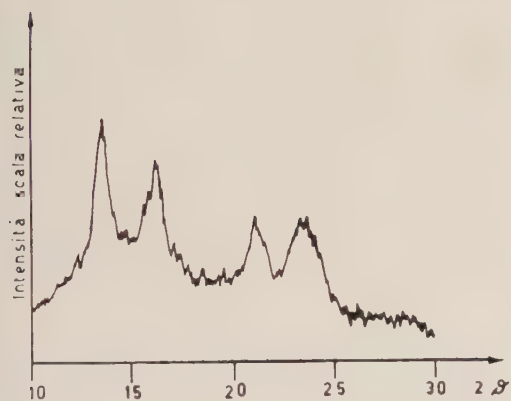


Fig. 1. - Registrazione con contatore Geiger dello spettro ai raggi X del 1-2-polibutadiene ($\text{CuK}\alpha$).



Fig. 2. - Spettro di fibra del 1-2-polibutadiene.



Fig. 3. - Spettro al diffrattore di elettroni di una lamina di 1-2-polibutadiene (incidenza normale).

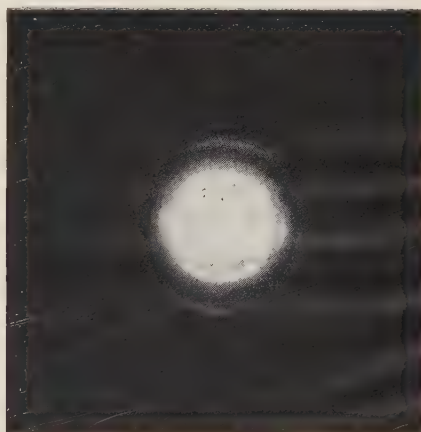


Fig. 4. - Spettro al diffrattore di elettroni di una lamina di 1-2-polibutadiene (incidenza obliqua).



Eseguendo lo spettro di polveri del prodotto con un apparecchio che consente di operare a diverse temperature, come già da noi descritto⁽³⁾, risulta, dallo sparire delle interferenze, che il prodotto fonde completamente a 154°C.

Un intervallo di temperatura di fusione, quale risulta dalla figura 1, corrisponde alla normalità nel caso di alti polimeri e può essere solo in parte attribuito a zone amorfe dovute alla presenza di unità monomere di diversa configurazione.

Esame delle diffrazioni elettroniche. — Lamine molto sottili di polimero (dello spessore di circa 100 Å), in cui le molecole si orientano tutte con l'asse della fibra perpendicolare alla lamina, sono state ottenute facendo evaporare dei film di soluzioni di polimero in benzene estesi su acqua. Tali lamine, raccolte su reticelle di rame, sono state esaminate in collaborazione con I. W. Bassi in un diffrattore di elettroni (Finch Electron Diffraction Camera). In figg. 3 e 4 fuori testo sono riportati due tipici spettri eseguiti per incidenza dei raggi rispettivamente normale ($\delta = 90^\circ$) e obliqua ($\delta = 30^\circ$) sulla lamina. Nella tabella I sono forniti i diametri $2r$ delle varie riflessioni osservate sul film.

TABELLA I.

$$R\lambda = 5,435 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2$$

Equatore		I strato	
$2r$ (mm)	Intensità	$2r$ (mm)	Intensità
8,3	<i>f</i>	14,3	<i>f</i>
9,9	<i>f</i>	19,9	<i>d</i>
12,9	<i>f</i>	28,2	<i>d</i>
16,9	<i>mf</i>	II strato	
19,2	<i>md</i>	23,2	<i>mf</i>
21,4	<i>m</i>	27,3	<i>md</i>
25,8	<i>m</i>	28,6	<i>dd</i>
29,5	<i>d</i>	30,7	<i>d</i>
30,7	<i>d</i>	32,9	<i>md</i>

I riflessi equatoriali (fig. 2) risultano interpretabili sulla base di un reticolo piano rettangolare di assi $a = 10,98 \pm 0,10 \text{ Å}$ e $b = 6,60 \pm 0,05 \text{ Å}$.

(3) G. NATTA e P. CORRADINI, Lavoro presentato al Congresso di Macromolecole di Milano-Torino 1954, in corso di stampa sulla « Ric. Sc. ».

Per attribuire degli indici ai riflessi degli strati superiori si è adottato il tipo di costruzione che è rappresentato nella fig. 2. Sulla linea OP si riportano, a partire da O, segmenti OP_{hko} proporzionali a tutti i valori di $1:d(hko)$ possibili. Lo stesso si fa sulle parallele $O'P'$, $O''P''$ tracciate a distanze successive proporzionali a $1/c$. Per un reticolo ortorombico cerchi di raggio proporzionale a $1:d(hkl)$ con centro in O intersecano per $l=1$ la linea $O'P'$, per $l=2$ la linea $O''P''$, in punti rispettivamente P'_{hkl} o P''_{hkl} che forniscono gli indici dei riflessi.

La ricostruzione migliore del reticolo reciproco si è ottenuta assumendo una cella elementare avente le costanti $a = 10,98 \text{ \AA}$, $b = 6,60 \text{ \AA}$, $c = 5,14 \text{ \AA}$.

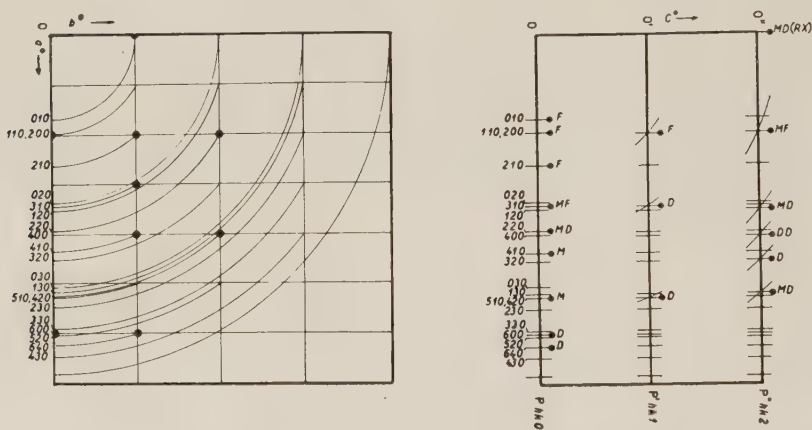


Fig. 2. - Ricostruzione del reticolo reciproco del 1-2-polibutadiene.

La densità calcolata, ammettendo che nella cella siano contenuti 4 monomeri, risulta 0,963; alquanto più elevata, come si verifica per la massima parte delle sostanze microcristalline, di quella sperimentale (0,92).

La mancanza dei riflessi $0kl$ per $l=2n+1$ e $h0l$ per $h=2n+1$, benché la statistica non sia rigorosamente probativa (perché tali riflessi potrebbero essere assenti in quanto debolissimi), e considerazioni basate sulle possibilità di impacchettamento, ci inducono a considerare come gruppo spaziale più probabile il Pacm.

Determinazione della struttura. - Per brevità indichiamo con C_1 gli atomi di carbonio dei gruppi CH_2 e con C_2 quelli dei gruppi CH della catena principale, mentre indichiamo con C_3 gli atomi del gruppo CH e con C_4 quelli del gruppo CH_2 della catena vinilica laterale.

La debolezza in generale dei riflessi hko con $h=2n+1$ consente di affermare che gli atomi della catena C_1 e C_2 si proiettano lungo c in prossimità di $x=0$, $y=0$ e $x=1/2$, $y=0$.

La periodicità di $5,1 \text{ \AA}$ lungo l'asse della fibra è in accordo con quella prevedibile per una catena paraffinica lineare rigida zig-zag, ammettendo

che il periodo di identità corrisponda ad un tratto di catena principale contenente 4 atomi di carbonio.

Poiché tale periodo di identità corrisponde a due unità monomeriche si deve concludere che i vinili si alternano in posizioni diverse, quali ad esempio quelle prevedibili supponendo che siano legati ad atomi asimmetrici rispettivamente con configurazioni steriche destro e levo. Una distribuzione di tale tipo era stata proposta per interpretare lo spettro diffuso fornito dal cloruro di polivinile, sebbene tale spettro riveli un molto minore grado di ordine ⁽⁴⁾.

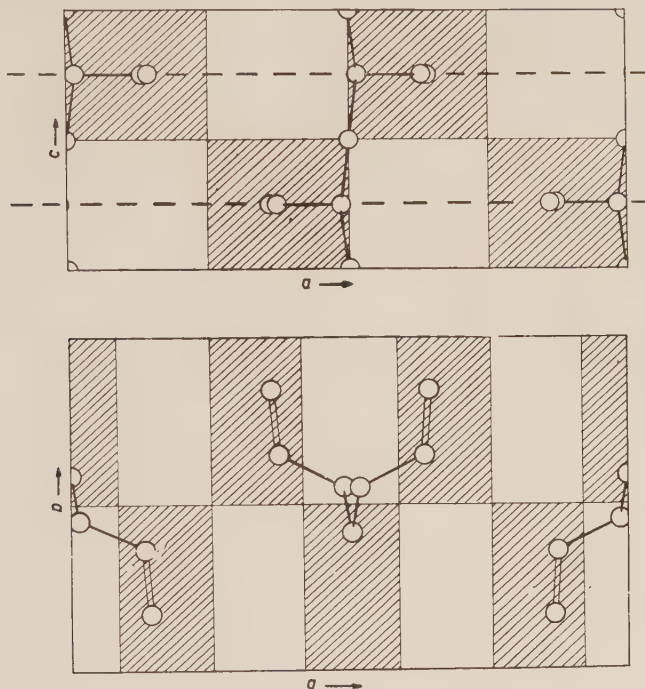


Fig. 3. — Grafici dei fattori di struttura dei riflessi (201) e (310) del 1-2-polibutadiene.

Dal gruppo spaziale, $Pacm$, si deduce che la molecola di per se stessa contiene un piano di simmetria con traslazione di $1/2$ lungo c . La catena principale paraffinica supposta planare si deve disporre pertanto nel piano $(0, y, z)$. Postulato un certo modello della catena, che soddisfi le condizioni date sopra, occorre per definire la posizione della molecola nella cella calcolare i fattori di struttura variando un solo parametro lungo b . Per stabilire l'orientamento dei vinili, nella fase dei tentativi, ci si è basati sulla intensità eccezionale del riflesso (201), che indicherebbe che i vinili si alternano appunto in posizioni destro-levo, sfasandosi di $1/2$ lungo c rispetto alle molecole adiacenti (vedi fig. 3) e sulla intensità pure eccezionale del

(4) C. S. FULLER, «Chem. Rev.», 26, 143 (1940).

riflesso (310), indipendente per quanto detto sopra ($h = 3$) dagli atomi della catena, e quindi probabilmente dovuta ad una disposizione in fase dei vinili (fig. 3).

TABELLA II.

Confronto tra i valori di nF^2 (F fattore di struttura calcolato usando i fattori atomici röntgenografici) per le strutture:

I (con catena principale planare) e II (con catena che si scosta leggermente dalla planarità).

Indici	nF^2		Int. sper.	Indici	nF^2		Int. sper.
	(I)	(II)			(I)	(II)	
010	64	90	<i>f</i>	401	1	1	—
110, 200	136	87	<i>f</i>	411	1	3	—
210	116	116	<i>f</i>	321	0	2	—
020	5	6	—	131	2	3	—
310	50	67	<i>mf</i>	421	0	3	—
120	12	1	—	511	8	24	<i>d</i>
220	26	42	<i>md</i>	231	0	0	—
400	0	0	—	331	3	3	—
410	65	46	<i>m</i>	002	20	20	<i>md</i> (raggi X)
320	4	2	—	012	0	1	—
030	1	4	—	112, 202	72	59	<i>mf</i>
130	0	0	—	212	0	0	—
420, 510	96	58	<i>m</i>	022	0	1	—
230	1	3	—	312	0	3	—
330	6	6	—	122	23	30	<i>md</i>
600	12	49	<i>d</i>	222	4	2	—
520	3	4	—	402	25	22	<i>dd</i>
610	34	27	<i>d</i>	412	1	0	—
111, 201	96	131	<i>f</i>	322	21	24	<i>d</i>
211	0	2	—	032	5	2	—
311	39	19	<i>d</i>	132, 422	52	52	<i>md</i>
121	0	0	—	512	3	1	—
221	7	4	—	232	8	2	—

Nel calcolo della struttura sono state assunte le distanze tra gli atomi di carbonio e gli angoli di valenza comunemente accettati. Il modello avente la catena paraffinica planare e parallela a $(0, y, z)$ che ha dato il migliore accordo tra intensità sperimentali e fattori di struttura, riportati nella tabella II, aveva le coordinate:

	x	y	z
C_1	0	0,896	0
C_2	0	0,030	0,250
C_3	0,117	0,164	0,250
C_4	0,117	0,364	0,250

Tale modello, come qualunque altro nel quale la catena paraffinica sia planare, porta a un accostamento forte tra gli atomi di carbonio C_1 e C_4 (3,9 Å), oltre ad un accostamento degli atomi C_4 d'una stessa catena tra loro, che appare eccessivo in relazione soprattutto con gli accostamenti (circa 4,2 Å) tra altri atomi di carbonio.

Si sono volute esaminare allora altre strutture, consentite dallo stesso gruppo spaziale e derivanti dalla struttura precedente mediante piccoli spostamenti. Un migliore accordo e un migliore impacchettamento delle molecole tra loro si è trovato per un modello non molto discosto dal precedente, in cui la catena paraffinica si allontana leggermente dalla planarità (fig. 4). Le coordinate risultano:

	x	y	z
C_1	0	0,916	0
C_2	0,014	0,050	0,250
C_3	0,136	0,143	0,250
C_4	0,143	0,342	0,250

Nella tabella II è dato un confronto delle intensità sperimentali con gli nF^2 calcolati per i due modelli della struttura.

Gli accostamenti di Van der Waals risultano per l'ultimo modello considerato tutti uguali o superiori ai 4 Å (tabella III).

TABELLA III.

Accostamenti di Van der Waals

$C_4 - C_4$	(catene diverse)	4,0 Å
$C_4 - C_4$	(stessa catena)	4,0 »
$C_4 - C_1$	(catene diverse)	4,3-4,4 Å
$C_3 - C_3$	(catene diverse)	4,0 Å
$C_3 - C_1$	(catene diverse)	4,2 »

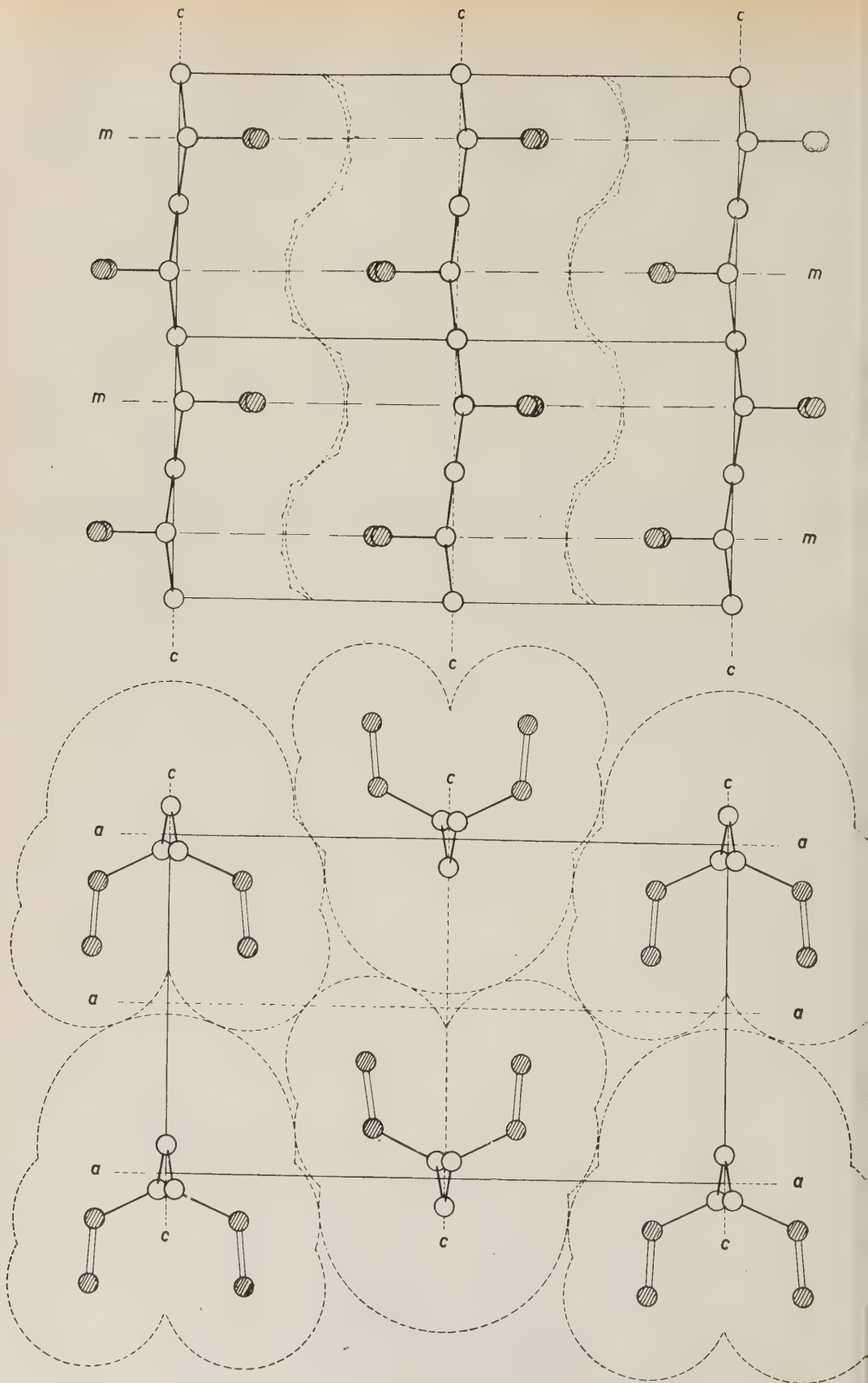


Fig. 4. - Modello della struttura del 1-2-polibutadiene.

Il calcolo dei fattori di struttura favorisce, sia pure leggermente, questa ultima ipotesi. Sebbene soltanto un affinamento dello studio della struttura (possibile qualora si ottengano migliori fotogrammi di fibra ai raggi X) possa consentire di confermarla, cionondimeno essa risulta accettabile anche da un punto di vista energetico. Infatti l'aumento di energia potenziale provocato da una distorsione di una catena politenica dello stesso angolo (10°) dalla planarità, risulta molto piccolo (circa 200 cal/legame), ed esso viene probabilmente compensato dalla diminuzione di energia potenziale connessa al minor accostamento degli atomi $C_4 - C_4$ nella stessa catena.

L'angolo C-C-C nella catena principale risulta di 113° , in accordo con altri valori finora riportati⁽⁵⁾: politene 111° , polipropilene e poliisobutene 114° ; polistirolo 116° .

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Osservazioni sopra un problema generalizzato di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine ellittiche e paraboliche.* Nota di BRUNO PINI, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Sia D un dominio che, per semplicità, supponiamo piano e semplicemente connesso. La sua frontiera sia una curva C di cui

$$x = \bar{x}(s) \quad ; \quad y = \bar{y}(s), \quad 0 \leq s \leq l$$

sia la rappresentazione parametrica rispetto all'arco; supponiamo che C sia dotata di tangente e di curvatura continue. Una corona di altezza h , abbastanza piccola, attorno a C e appartenente a D , è suscettibile della rappresentazione

$$x = \bar{x}(s) - t\bar{y}'(s) \quad , \quad y = \bar{y}(s) + t\bar{x}'(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad 0 \leq t \leq h.$$

Tenendo fisso il valore di t si ottiene una curva che indicheremo con C_t ; con D_t indicheremo il dominio limitato di frontiera C_t . Osserviamo che il differenziale d'arco di C_t vale

$$ds_t = (1 - \gamma t) ds \quad \text{con} \quad \gamma = \bar{x}'(s)\bar{y}''(s) - \bar{x}''(s)\bar{y}'(s).$$

(5) C. W. BUNN, E. V. GARNER, « Proc. Roy. Soc. », A, 189, 39 (1947); G. NATTA, P. CORRADINI, « Atti Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. IV, sez. II, fasc. 5, p. 73 (1955); G. NATTA, P. CORRADINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XVIII, fasc. I, p. 19 (1955).

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

Consideriamo il seguente problema generalizzato di Dirichlet dovuto a G. Cimmino ⁽¹⁾: Dato un numero $p > 1$ e una funzione $f(s)$ di classe $L^{(p)}$, su $0 \leq s \leq l$, determinare una funzione $u(P)$ tale che

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per } P \in D - C \\ \lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\tilde{C}_t} |u(x, y) - f(s)|^p ds_t = 0. \end{cases}$$

Questo problema ha una ben determinata soluzione che recentemente E. Magenes ⁽²⁾ ha riconosciuto essere esprimibile con un potenziale di doppio strato con momento di classe $L^{(p)}$.

Le righe che seguono hanno lo scopo di provare brevemente come i risultati di G. Cimmino e di E. Magenes sussistano anche per $p = 1$.

Brevemente si accenna poi all'estensione del medesimo problema alle equazioni lineari ellittiche e paraboliche del secondo ordine.

1. Mostriamo che, data una funzione $f(s)$ di classe $L^{(p)}$ su $0 \leq s \leq l$, $p \geq 1$, esiste al più una funzione $u(P)$ soluzione di (1).

Sia $u(P)$ una soluzione di (1) in $D - C$. Indichiamo con P un arbitrario punto di $D - C$ e con $\mathcal{C}(P, r)$ e $\mathfrak{D}(P, r)$ la circonferenza e il cerchio di centro P e raggio r , che supponiamo così piccolo che $\mathfrak{D}(P, r)$ appartenga a $D - C$.

Per tutti gli r abbastanza piccoli si ha

$$(2) \quad |u(P)|^p \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\mathcal{C}(P, r)} |u(Q)|^p ds_Q.$$

La (2) è ovvia se $u(P) = 0$; se $u(P) \neq 0$, essa sussiste ancora per r sufficientemente piccolo perché

$$|u(P)|^p = \frac{1}{2\pi r} \int_{\mathcal{C}(P, r)} |u(Q)|^p ds_Q - \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{D}(P, r)} \Delta(|u(Q)|^p) \lg \frac{r}{PQ} dQ$$

e

$$(3) \quad \Delta|u|^p = p(p-1)|u|^{p-2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \geq 0.$$

(1) G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, « Rend. Circolo Mat. Palermo », LXI (1937). Per una esposizione rielaborata e per la bibliografia relativa all'argomento cfr. C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer, Berlin (1955), pp. 88-98. Ricordiamo anche che se $f(s)$ è di classe $L^{(2)}$ ed è la traccia su C di una funzione con integrale di Dirichlet limitato, il medesimo problema per $p = 2$ si trova trattato, con procedimento variazionale, come caso particolare del problema poliarmonico fondamentale generalizzato, nella Memoria di S. SOBOLEV, *Su un problema limite per le equazioni poliarmoniche*, « Mat. Zbornik », 2 (1937) (in russo).

(2) E. MAGENES, *Problema generalizzato di Dirichlet e teoria del potenziale*, « Rend. Sem. Mat. Padova », XXIV (1955).

La funzione $|u|^p$ è pertanto subarmonica ⁽³⁾.

Fissiamo ora due numeri positivi t e τ tali che sia $0 < \tau < t < h$. Sia $u(P)$ la funzione tale che

$$\begin{aligned} \Delta u_\tau &= 0 & \text{per } P \in D_\tau - C_\tau \\ u_\tau &= |u|^p & \text{per } P \in C_\tau. \end{aligned}$$

Si ha allora

$$|u|^p \leq u_\tau \quad \text{per } P \in D_\tau$$

e quindi in particolare

$$(4) \quad \int_{\dot{C}_t} |u|^p ds_t \leq \int_{\dot{C}_t} u_\tau ds_t.$$

Ora è

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \int_{\dot{C}_t} u_\tau ds_t = - \int_0^t \gamma u_\tau ds^{(4)};$$

indicando con N un numero positivo tale che $N(1 - \gamma t) > |\gamma|$ per $0 \leq t \leq h$, si ha

$$\frac{d}{dt} e^{-Nt} \int_{\dot{C}_t} u_\tau ds_t < 0$$

e quindi

$$(6) \quad \int_{\dot{C}_t} u_\tau ds_t < e^{N(t-\tau)} \int_{\dot{C}_\tau} |u|^p ds_\tau.$$

Pertanto, se u è soluzione di (1), facendo tendere τ a zero, si ha, tenendo presente la (4),

$$(7) \quad \int_{\dot{C}_t} |u|^p ds_t < K \int_0^t |f(s)|^p ds,$$

per una conveniente costante positiva K dipendente solo da D e da h .

Dalla (7) segue immediatamente l'asserto.

Dopo di ciò, il teorema di esistenza si consegue facilmente adattando noti ragionamenti dovuti a R. Caccioppoli e G. Cimmino. Ne accenniamo brevemente nel caso di $p = 1$. Indichiamo con Σ lo spazio di Banach dei vettori $[\varphi(x, y), f(s)]$ con φ di classe $L^{(2)}$ su D ed f di classe $L^{(1)}$ su $0 \leq s \leq l$; con $\bar{\Sigma}$ lo spazio duale dei vettori $[\bar{\varphi}(x, y), \bar{f}(s)]$ con $\bar{\varphi}$ di classe $L^{(2)}$ su D ed \bar{f} misurabile e limitata su $0 \leq s \leq l$; con Σ_Δ il sottospazio di Σ dei vettori

(3) Noi ammettiamo l'esistenza della soluzione del problema ordinario di Dirichlet; la quale, d'altronde, può ritenersi acquisita con gli stessi mezzi di analisi funzionale di cui ci si serve nel seguito. Cfr. C. MIRANDA, *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche*, « Rend. Acc. Lincei », 3 (1947), e B. PINI, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico*, « Rend. Acc. Lincei », 11 (1951).

(4) La (5) è pressoché immediata. Cfr. anche i nn. 4-5 della prima Memoria citata in (*).

$[\Delta u(x, y), u(\bar{x}(s), \bar{y}(s))]$ essendo $u(x, y)$ di classe $C^{(2)}$ su D . Si ha che l'involucro Σ_{Δ}^* di Σ_{Δ} coincide con Σ .

Allo scopo basta provare che se $[\bar{\varphi}, \bar{f}] \subset \bar{\Sigma}$ e

$$(8) \quad \iint_D \bar{\varphi} \Delta u \, dP + \int_C \bar{f} u \, ds = 0$$

per ogni u tale che $[\Delta u, u(\bar{x}(s), \bar{y}(s))] \subset \Sigma_{\Delta}$, allora $[\bar{\varphi}, \bar{f}]$ è lo zero di $\bar{\Sigma}$. Indichiamo con R un numero maggiore del massimo diametro di D ; essendo Q un punto fissato in $D - C$ e chiamando ρ la distanza \overline{PQ} , poniamo

$$u_n(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\rho^2}^{R^2} \left[\left(\frac{2t}{R^2} - 1 \right)^{2n} - 1 \right] \frac{dt}{t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Sostituendo in (8) e passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ha che

$$(9) \quad \frac{1}{2\pi} \int_C \bar{f}(s) \lg \frac{R}{\overline{PQ}} \, ds_P = \begin{cases} \bar{\varphi}(Q) & \text{per quasi-tutti i punti } Q \text{ di } D - C \\ 0 & \text{per } Q \text{ esterno a } D. \end{cases}$$

La funzione a primo membro della (9) è un ordinario potenziale logaritmico, perciò continua; annullandosi esternamente a D , essa si annulla anche su C . Pertanto la $\bar{\varphi}$, coincidendo quasi-dappertutto con una funzione armonica in $D - C$ e nulla su C , quindi identicamente nulla, è un quasi-zero su D .

Dalla (8) segue poi che f è un quasi-zero su $0 \leq s \leq l$.

Il precedente teorema di completezza assicura che, *assegnata una funzione f di classe $L^{(1)}$ su $0 \leq s \leq l$, esiste una successione di funzioni $\{u_n(x, y)\}$ di classe $C^{(2)}$ in D tale che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \iint_D (\Delta u_n)^2 \, dP + \int_C |f(s) - u_n| \, ds \right\} = 0.$$

Di qui segue che la $\{u_n(x, y)\}$ converge, uniformemente in ogni insieme chiuso appartenente a $D - C$, verso una soluzione di (1). Ciò si prova modificando in modo ovvio noti ragionamenti⁽⁵⁾.

Infine, poiché i ragionamenti contenuti nella Nota citata in⁽²⁾ possono venir ripetuti anche per $p = 1$, si ha che la soluzione di (1) coincide con un doppio strato di momento sommabile e quindi per quasi-tutti i valori di s ($0 \leq s \leq l$) essa tende ad $f(s)$ lungo la normale a C .

2. Consideriamo l'operatore

$$\mathfrak{L} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + m \frac{\partial}{\partial x} + n \frac{\partial}{\partial y} + q$$

e indichiamo con \mathfrak{M} l'operatore aggiunto. Supponiamo che i coefficienti di \mathfrak{L} ed \mathfrak{M} siano funzioni di classe $C^{(2)}$ in un campo A contenente D e sia

$$(10) \quad a > 0, \quad ac - b^2 = 1, \quad q < 0, \quad \bar{q} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} + q < 0.$$

(5) Cfr. loc. cit. in⁽¹⁾, nn. 9-10. Disponendo della maggiorazione (7) tali ragionamenti possono essere semplificati.

Una soluzione dell'equazione $\mathfrak{L}[u] = f$ in A può essere caratterizzata mediante una formula di media, d'altronde con larga arbitrarietà, ad esempio con la seguente ⁽⁶⁾

$$(11) \quad u(Q) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\mathfrak{D}(Q,r)} \{u(P) \mathfrak{M}[V(P, Q)] - V(P, Q)f(P)\} dP$$

ove

$$V(P, Q) = U^*(P, Q) \left(1 - \frac{\overline{PQ}^5}{r^5}\right)^3$$

$$U^*(P, Q) = U(P, Q) +$$

$$+ \iint_A \frac{U(P, S)}{4\pi} \left(\mathfrak{M}[U(S, Q)] + \iint_A \frac{1}{4\pi} \mathfrak{M}[U(S, T)] \mathfrak{M}[U(T, Q)] dT \right) dS$$

$$U(P, Q) = \lg [\epsilon(Q)(x - \xi)^2 - 2b(Q)(x - \xi)(y - \eta) + a(Q)(y - \eta)^2].$$

La (11) resta ancora caratteristica per le soluzioni di $\mathfrak{L}[u] = f$ se a V si aggiunge una opportuna funzione regolare $W - V$. La W presenta lo stesso tipo di singolarità presentato da V per $P \rightarrow Q$; è negativa per P abbastanza prossimo a Q ; si può scegliere W in modo che riesca $\mathfrak{M}[W] < 0$ per P abbastanza prossimo a Q ⁽⁷⁾.

Ora, poiché al problema di Dirichlet, relativo all'equazione $\mathfrak{L}[u] = 0$ e a un dominio regolare D , si può associare una funzione di Green non negativa, è possibile parlare di funzioni sub- \mathfrak{L} , in tutto analoghe alle sub-armoniche.

Una funzione v di classe $C^{(2)}$ è sub- \mathfrak{L} se

$$\mathfrak{L}[v] \geq 0$$

e, nella sola ipotesi della continuità, può essere caratterizzata dalla condizione di verificare in ogni punto Q e, fissato Q , per tutti gli r abbastanza piccoli, la relazione

$$v(Q) \leq -\frac{1}{4\pi} \iint_{\mathfrak{D}(Q,r)} v(P) \mathfrak{M}[W(P, Q)] dP.$$

(6) Per la formula di media riportata cfr. la seconda Nota citata in (3); cfr. anche l'opera di C. MIRANDA citata in (1), pp. 90-91. Nella Nota citata in (3) la formula di media è provata per le soluzioni dell'equazione $\mathfrak{M}[u] = f$. L'ipotesi che i coefficienti di \mathfrak{L} ed \mathfrak{M} siano di classe $C^{(2)}$ permette di caratterizzare allo stesso modo, col solo mutamento di \mathfrak{L} in \mathfrak{M} , le soluzioni di $\mathfrak{L}[u] = f$.

(7) Ammettendo l'esistenza della funzione di Green (cfr. la seconda Nota citata in (3)), si può senz'altro sostituire la (11) con la seguente

$$u(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}(Q,r)} u(P) \frac{dG(P, Q)}{dN} ds_P - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}(Q,r)} G(P, Q) f(P) dP$$

ove N è la conormale interna; com'è noto $\frac{dG}{dN} > 0$.

Sia ora u una soluzione di $\mathcal{L}[u] = 0$ in $D - C$ e sia $p \geq 1$. In ogni punto P ove è $u \neq 0$ si ha

$$\mathcal{L}[|u|^p] = p(p-1)|u|^{p-2} \left[a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + c \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + (1-p)q|u|^p \geq 0;$$

perciò, con un ragionamento perfettamente simile a quello indicato nel n. 1, si ha

$$|u(Q)|^p \leq -\frac{1}{4\pi} \iint_{\mathfrak{D}(Q,r)} |u(P)|^p \mathfrak{N}[W(P,Q)] dP$$

per ogni punto Q di $D - C$ e, fissato Q , per tutti gli r abbastanza piccoli; dunque $|u|^p$ è una funzione sub- \mathcal{L} .

D'altra parte, se u è soluzione di $\mathcal{L}[u] = 0$ in $D - C$, si ha per $0 < t < h$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\tilde{C}_t} (a\bar{y}'^2 - 2b\bar{x}'\bar{y}' + c\bar{x}'^2) u ds_t = \int_{\tilde{C}_t} (\mathfrak{N}[t] - \bar{q}t) u ds_t + \int_{D_t} \bar{q}u dx dy^{(8)};$$

di qui, supposto $0 < \tau < t$ ed u non negativa, si trae agevolmente la formula di maggiorazione

$$(13) \quad \int_{\tilde{C}_t} u ds_t < \frac{\max (a\bar{y}'^2 - 2b\bar{x}'\bar{y}' + c\bar{x}'^2)}{\min (a\bar{y}'^2 - 2b\bar{x}'\bar{y}' + c\bar{x}'^2)} e^{M(t-\tau)} \int_{\tilde{C}_\tau} u ds_\tau$$

ove il massimo e il minimo s'intendono relativi alla corona $D - D_h$ ed è $M > \max |\mathfrak{N}[t] - \bar{q}t|$ nella detta corona/min $(a\bar{y}'^2 - 2b\bar{x}'\bar{y}' + c\bar{x}'^2)$.

Ora supposto che sia

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\tilde{C}_t} |u - f(s)|^p ds_t = 0,$$

se u_τ indica la soluzione del problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u_\tau] = 0 & \text{per } P \in D_\tau - C_\tau \\ u_\tau = |u|^p & \text{per } P \in C_\tau, \end{cases}$$

poiché vale ancora la (4), dalla (6') per $\tau \rightarrow 0$ si deduce che sussiste ancora la (7). Dopo di ciò, l'esistenza della soluzione del problema

$$\mathcal{L}[u] = 0 \quad \text{per } P \in D - C$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\tilde{C}_t} |u - f(s)| ds_t = 0$$

segue adattando ragionamenti noti.

(8) Cfr. la prima Memoria citata in (1), nn. 15-16.

3. Una trattazione analoga a quella indicata nei precedenti nn. 1 e 2 può esser fatta per il problema di Dirichlet relativo all'equazione del calore. Poniamo

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}$$

e sia D il dominio $0 \leq y \leq h$, $\chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$, con $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$ due funzioni per esempio di classe $C^{(1)}$ e tali che $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ per $0 \leq y \leq h$. Siano $f_1(y)$ ed $f_2(y)$ due funzioni di classe $L^{(p)}$, $p \geq 1$, su $0 \leq y \leq h$, e $\varphi(x)$ una funzione di classe $L^{(p)}$ su $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$. Indichiamo con S la curva costituita dagli archi $x = \chi_1(y)$, $h \geq y \geq 0$; $y = 0$, $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$; $x = \chi_2(y)$, $0 \leq y \leq h$. Indichiamo poi con $D(t, \delta)$ il dominio $\delta \leq y \leq h$, $\chi_1(y) + t \leq x \leq \chi_2(y) - t$, essendo δ e t due numeri positivi abbastanza piccoli, e con $S(t, \delta)$ la curva che rispetto a $D(t, \delta)$ è l'analogo di S rispetto a D .

Esiste al più una funzione $u(x, y)$ tale che

$$(I') \quad \begin{cases} \Omega[u] = 0 & \text{in } D - S \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 0+ \\ \delta \rightarrow 0+}} \left\{ \int_{\chi_1(\delta)+t}^{\chi_2(\delta)-t} |u(x, \delta) - \varphi(x)|^p dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\delta}^h |u(\chi_i(y) - (-1)^i t, y) - f_i(y)|^p dy \right\} = 0. \end{cases}$$

Infatti, sia $P(x, y)$ un punto di $D - S$ e chiamiamo $\mathcal{C}(P, r)$ la curva

$$\begin{cases} \xi = x - \sqrt{2} r \sin \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} \\ \eta = y - r^2 \sin^2 \theta \end{cases} \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

e $\mathfrak{D}(P, r)$ il dominio limitato che ha $\mathcal{C}(P, r)$ come frontiera; supponiamo $r (> 0)$ così piccolo che $\mathfrak{D}(P, r)$ appartenga a $D - S$. Sia $u(x, y)$ soluzione di $\Omega[u] = 0$ in $D - S$; allora per ogni punto P di $D - S$ e, fissato P , per tutti gli r abbastanza piccoli, si ha

$$(2') \quad |u(P)|^p \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |u|_{\mathcal{C}(P, r)}^p \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta.$$

La (2') è ovviamente vera se $u(P) = 0$; se $u(P) \neq 0$ segue da

$$\begin{aligned} |u(P)|^p &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |u|_{\mathcal{C}(P, r)}^p \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta - \\ &- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) \frac{\rho^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{\sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)}} \Omega[|u|^p] d\rho d\theta \end{aligned}$$

e

$$(3') \quad \Omega[|u|^p] = p(p-1)|u|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \geq 0.$$

La (2') assicura che $|u|^p$ è una funzione sub- Ω (9).

(9) Cfr. B. PINI, *Maggioranti e minoranti delle soluzioni delle equazioni paraboliche*, « Annali di Mat. », 4, XXXVII (1954). Noi ammettiamo l'esistenza della soluzione del pro-

Supponiamo ora che v sia soluzione non negativa di $\mathcal{L}[u] = 0$ in $D - S$; si ha

$$(5') \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{\chi_1(\delta)+t}^{\chi_2(\delta)-t} v(x, \delta) dx + \sum_i \int_{\delta}^h v(\chi_i(y) - (-1)^i t, y) dy \right] =$$

$$- \sum_i v(\chi_i(\delta) - (-1)^i t, \delta) + \int_{\chi_1(\delta)+t}^{\chi_2(\delta)-t} v(x, \delta) dx - \int_{\chi_1(h)+t}^{\chi_2(h)-t} v(x, h) dx +$$

$$+ \sum_i (-1)^i \int_{\delta}^h v(\chi_i(y) - (-1)^i t, y) \chi'_i(y) dy <$$

$$< N \left[\int_{\chi_1(\delta)+t}^{\chi_2(\delta)-t} v(x, \delta) dx + \sum_i \int_{\delta}^h v(\chi_i(y) - (-1)^i t, y) dy \right]$$

per $N > 1 + \max_{0 \leq y \leq h} (|\chi'_1| + |\chi'_2|)$. Di qui si deduce

$$(6') \quad \int_{\chi_1(\delta)+t}^{\chi_2(\delta)-t} v(x, \delta) dx + \sum_i \int_{\delta}^h v(\chi_i(y) - (-1)^i t, y) dy <$$

$$< e^{N(t-\tau)} \left[\int_{\chi_1(\delta')+\tau}^{\chi_2(\delta')-\tau} v(x, \delta') dx + \sum_i \int_{\delta'}^h v(\chi_i(y) - (-1)^i \tau, y) dy \right]$$

per $0 < \tau < t$, $0 < \delta' \leq \delta$.

Allora, procedendo come si è indicato al n. 1, si ha che, per t e δ variabili in un intorno positivo dello zero, esiste una costante positiva K , dipendente solo da D , tale che

$$(7') \quad \int_{\chi_1(\delta)+t}^{\chi_2(\delta)-t} |u(x, \delta)|^p dx + \sum_i \int_{\delta}^h |u(\chi_i(y) - (-1)^i t, y)|^p dy <$$

$$< K \left(\int_{\chi_1(0)}^{\chi_2(0)} |\varphi(x)|^p dx + \sum_i \int_0^h |f_i(y)|^p dy \right).$$

Di qui segue immediatamente l'unicità della soluzione del problema (1').

Fondandoci sulla (7') si può poi dimostrare, con ragionamenti analoghi a quelli cui si è rimandato nel n. 1⁽¹⁰⁾, che se $f_1(y)$, $f_2(y)$, $\varphi(x)$ sono funzioni di

blema ordinario di Dirichlet per l'equazione $\mathcal{L}[u] = 0$; la quale può ritenersi acquisita con gli stessi mezzi di analisi funzionale su cui si appoggia la presente trattazione. Cfr. B. PINI, *Sulle equazioni a derivate parziali, lineari del secondo ordine in due variabili, di tipo parabolico*, « Annali di Mat. », 4, XXXII (1951), e C. CILIBERTO, *Sul problema di Holmgren-Levi per l'equazione del calore*, « Giornale di Mat. di Battaglini », 4, 80 (1950-51).

(10) Cfr. il secondo lavoro citato in (9); i ragionamenti ivi contenuti possono adattarsi, semplificati, al caso attuale.

classe $L^{(1)}$ rispettivamente su $0 \leq y \leq h$ e $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$, e se $\{u_n(x, y)\}$ è una successione di funzioni di classe $C^{(2)}$ in D tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \iint_D [\mathfrak{L}[u_n(x, y)]]^2 dx dy + \sum_{i=1}^2 \int_0^h |f_i(y) - u_n(\chi_i(y), y)| dy + \right. \\ \left. + \int_{\chi_1(0)}^{\chi_2(0)} |\varphi(x) - u_n(x, 0)| dx \right\} = 0,$$

allora la $\{u_n(x, y)\}$ converge, uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $D - S$, verso una soluzione di (I') .

L'esistenza segue poi dal seguente teorema di completezza. Detto Σ lo spazio di Banach dei vettori $[f(x, y), f_1(y), f_2(y), \varphi(x)]$ con $f(x, y)$ di classe $L^{(2)}$ in D , $f_1(y), f_2(y)$ di classe $L^{(1)}$ su $0 \leq y \leq h$ e $\varphi(x)$ di classe $L^{(1)}$ su $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$; $\Sigma_{\mathfrak{L}}$ il sottospazio di Σ dei vettori $[\mathfrak{L}[u(x, y)], u(\chi_1(y), y), u(\chi_2(y), y), u(x, 0)]$ essendo $u(x, y)$ di classe $C^{(2)}$ in D , si ha che l'involucro $\Sigma_{\mathfrak{L}}^*$ di $\Sigma_{\mathfrak{L}}$ coincide con Σ . Per provare ciò basta far vedere che se per un vettore $[\bar{f}(x, y), \bar{f}_1(y), \bar{f}_2(y), \bar{\varphi}(x)]$ dello spazio $\bar{\Sigma}$ coniugato di Σ , riesce

$$(8') \quad \iint_D \bar{f} \mathfrak{L}[u] dx dy + \sum_{i=1}^2 \int_0^h \bar{f}_i(y) u(\chi_i(y), y) dy + \int_{\chi_1(0)}^{\chi_2(0)} \bar{\varphi}(x) u(x, 0) dx = 0$$

qualunque sia il vettore di $\Sigma_{\mathfrak{L}}$, allora $[\bar{f}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{\varphi}]$ è lo zero di $\bar{\Sigma}$. Allo scopo poniamo

$$v_n(x, y) = \begin{cases} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{y - y_0}{h} \right)^4 \right]^n \right\} U(x, y; x_0, y_0) & \text{per } y > y_0 \\ 0 & \text{per } y \leq y_0 \end{cases}, n = 1, 2, \dots$$

essendo (x_0, y_0) un punto di $D - S$ e

$$U(x, y; x_0, y_0) = \begin{cases} (y - y_0)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{y - y_0} \right] & \text{per } y > y_0 \\ 0 & \text{per } y \leq y_0. \end{cases}$$

Sostituendo in $(8')$ e passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ha

$$(9') \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^2 \int_{y_0}^h \bar{f}_i(y) U(\chi_i(y), y; x_0, y_0) dy = \begin{cases} \bar{f}(x_0, y_0) & \text{per quasi-tutti i punti} \\ & (x_0, y_0) \text{ di } D - S \\ 0 & \text{per } (x_0, y_0) \text{ esterno a } D. \end{cases}$$

Per la continuità degli strati semplici a primo membro della $(9')$ si deduce che $\bar{f}(x, y)$ coincide quasi-dappertutto in D con una soluzione di $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial u / \partial y = 0$ che si annulla per $x = \chi_i(y)$, $0 \leq y \leq h$, $i = 1, 2$, e per $y = h$, $\chi_1(h) \leq x \leq \chi_2(h)$, cioè con lo zero.

Dalla $(8')$ segue poi che \bar{f}_i e $\bar{\varphi}$ sono quasi-dappertutto eguali a zero. Possiamo infine osservare che la soluzione $u(x, y)$ del problema (I') converge

a $\varphi(x)$ per quasi-tutti i valori di x compresi tra $\chi_1(0)$ e $\chi_2(0)$ e a $f_i(y)$ per quasi tutti i valori di y compresi tra 0 ed h se il punto (x, y) tende rispettivamente a un punto di $y = 0$, $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$ lungo le normali a questo segmento, e a un punto di $x = \chi_i(y)$ lungo le caratteristiche.

Ciò segue dai ragionamenti contenuti nella Nota citata in ⁽²⁾ e da certe proprietà dei potenziali di calore di semplice e doppio strato con densità e momento di classe $L^{(p)}$ per $p = 1$.

4. Consideriamo infine l'operatore

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial x} + b;$$

indichiamo con \mathfrak{N} l'operatore aggiunto e supponiamo che i coefficienti di \mathfrak{L} ed \mathfrak{N} siano di classe $C^{(2)}$ in un campo A contenente D e sia

$$(10') \quad b < 0, \quad b - \frac{\partial a}{\partial x} < 0.$$

È possibile caratterizzare le soluzioni di $\mathfrak{L}[u] = f$ in A mediante una formula di media ⁽¹¹⁾ di tipo perfettamente analogo alla (11) e conseguentemente di caratterizzare le funzioni sub- \mathfrak{L} mediante una relazione del tipo della (12).

Si riconosce allora che se u è soluzione di $\mathfrak{L}[u] = 0$, $|u|^p$, con $p \geq 1$, è una funzione sub- \mathfrak{L} , tenendo presente che se $u(P) \neq 0$ è

$$\mathfrak{L}[|u|^p] = p(p-1)|u|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + b(1-p)|u|^p \geq 0.$$

Inoltre se $m = \max_D |b - \partial a / \partial x|$, e se u è una soluzione di $\mathfrak{L}[u] = 0$ in $D - S$, si ha

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^2 \int_{\delta}^h e^{-my} u(\chi_i(y) - (-1)^i t, y) dy + \int_{\chi_1(\delta)+t}^{\chi_2(\delta)-t} e^{-m\delta} u(x, \delta) dx \right] = \\ & = \iint_{D(t, \delta)} \left(b - \frac{\partial a}{\partial x} - m \right) e^{-my} u(x, y) dx dy - e^{-m\delta} \sum_{i=1}^2 u(\chi_i(\delta) - (-1)^i t, \delta) + \\ & \quad + \int_{\chi_1(\delta)+t}^{\chi_2(\delta)-t} e^{-m\delta} u(x, \delta) dx - \int_{\chi_1(h)+t}^{\chi_2(h)-t} e^{-mh} u(x, h) dx + \\ & \quad + \sum_{i=1}^2 (-1)^i \int_{\delta}^h [a + \chi'_i] e^{-my} u(\chi_i(y) - (-1)^i t, y) dy, \end{aligned}$$

da cui si trae agevolmente una formula di maggiorazione in tutto analoga alla (7'). Dopo di ciò, l'esistenza della soluzione del problema (1'), ove \mathfrak{L} indica ora l'operatore parabolico più generale, si consegue con ragionamenti analoghi a quelli cui abbiamo accennato relativamente all'equazione del calore.

(11) Cfr. B. PINI, *Un problema di valori al contorno, generalizzato, per l'equazione a derivate parziali lineare parabolica del secondo ordine*, « Rivista di Mat. Parma », 3 (1952).

Analisi. -- Sulla t -similitudine tra matrici e la stabilità dei sistemi differenziali lineari. Nota di ROBERTO CONTI, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

I. Nella teoria dei sistemi lineari omogenei di equazioni differenziali ordinarie

$$(A) \quad \dot{y} = A(t)y$$

interviene la considerazione di matrici $n \times n$, come la $A(t)$, reali o complesse, definite per $0 \leq t$, misurabili e sommabili in ogni intervallo finito del semiasse reale positivo $0 \leq t$.

Indichiamo con \mathfrak{M} l'insieme di tali matrici.

Diciamo poi \mathfrak{T} l'insieme delle matrici $T(t)$, reali o complesse, $n \times n$, definite per $0 \leq t$, assolutamente continue in ogni intervallo finito di $0 \leq t$, limitate⁽¹⁾ per $0 \leq t < +\infty$, dotate di inversa $T^{-1}(t)$ pure limitata per $0 \leq t < +\infty$.

Diciamo che la matrice $A(t) \in \mathfrak{M}$ è t -simile alla matrice $B(t) \in \mathfrak{M}$ (od anche che il corrispondente sistema (A) è t -simile al sistema

$$(B) \quad \dot{z} = B(t)z$$

corrispondente a $B(t)$) se esiste una $T(t) \in \mathfrak{T}$ tale da aversi

$$(I) \quad \dot{T}(t) + T(t)B(t) - A(t)T(t) = O \quad (O \text{ matrice nulla } n \times n),$$

in tutti i punti $t \geq 0$ in cui $\dot{T} = dT/dt$ esiste finita, cioè quasi dappertutto in $0 \leq t$ ⁽²⁾.

Se $T(t) \in \mathfrak{T}$ anche $T^{-1}(t) \in \mathfrak{T}$ cosicché la relazione ora introdotta è simmetrica e si può anche dire che $A(t) \in \mathfrak{M}$ è t -simile a $B(t) \in \mathfrak{M}$ se esiste una $T(t) \in \mathfrak{T}$ per la quale si abbia la

$$(I') \quad \dot{T}(t) + T(t)A(t) - B(t)T(t) = O$$

quasi dappertutto per $0 \leq t$.

La relazione di t -similitudine oltre che simmetrica è anche riflessiva e transitiva, come si verifica facilmente.

Se esiste una $T \in \mathfrak{T}$ che verifichi la (I) (o la (I')) è che sia anche costante, allora è $\dot{T} = O$ e tra $A(t)$ e $B(t)$ si ha l'ordinaria relazione di similitudine per ciascun valore di $t \geq 0$. Ciò giustifica la denominazione adottata.

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) Cioè aventi norma limitata, dove per norma $\|T\|$ di T si intende, come di consueto, la somma dei moduli degli elementi di T .

(2) Recentemente L. MARKUS (*Continuous matrices and the stability of differential systems*, «Math. Zeitsch.», 62, 310-319 (1955)), ha introdotto una «kinematic similarity» analoga alla t -similitudine; egli considera tuttavia matrici A, B, T, T^{-1}, \dot{T} continue e limitate per $0 \leq t < +\infty$ ed opera pertanto in insiemi più ristretti degli \mathfrak{M} e \mathfrak{T} qui considerati. Tale restrizione rende la «kinematic similarity» inadatta ai nostri scopi.

I sistemi t -simili a quelli aventi una matrice costante sono quelli che con Liapunov si dicono riducibili ⁽³⁾; in particolare possiamo dire « riducibili a zero » i sistemi t -simili al sistema $\dot{z} = 0$.

L'importanza della relazione di t -similitudine è poi messa in luce dai tre teoremi seguenti i quali affermano l'invarianza della stabilità (ordinaria, uniforme, ristretta) rispetto a tale relazione e si possono considerare come altrettanti criteri di stabilità.

2. È noto che il sistema (A) è stabile (per $t \rightarrow +\infty$, nel senso di Liapunov) ⁽⁴⁾ allora e solo allorquando la matrice fondamentale principale, vale a dire la matrice $Y(t)$ soluzione di

$$\dot{Y} = A(t)Y, \quad Y(0) = I \quad (I \text{ matrice unità } n \times n)$$

è limitata per $0 \leq t < +\infty$.

Segue subito di qui il

TEOREMA 1. - *Ogni sistema (B) t -simile ad un sistema (A) stabile è stabile.*

Per provare ciò si operi la trasformazione $y = T(t)z$, ovvero la trasformazione $z = T(t)y$, con $T(t) \in \mathfrak{C}$ soddisfacente (I) od (I'), rispettivamente. L'asserto segue subito dall'osservare che se $Z(t)$ è la matrice fondamentale principale di (B) si ha

$$(2) \quad Y(t) = T(t)Z(t), \quad Z(t) = T(t)Y(t)$$

rispettivamente nei due casi.

È pure noto (cfr. ad esempio «M») che la stabilità uniforme del sistema (A) è caratterizzata dall'essere la matrice $Y(t)Y^{-1}(\tau)$ limitata per $0 \leq \tau \leq t < +\infty$. Segue allora subito dalle (2) il

TEOREMA 2. - *Ogni sistema (B) t -simile ad un sistema (A) uniformemente stabile è uniformemente stabile.*

L'essere la matrice $Y(t)Y^{-1}(\tau)$ limitata per $0 \leq \tau < +\infty$, $0 \leq t < +\infty$ invece che per $0 \leq \tau \leq t < +\infty$ equivale (cfr. «M») all'essere (A) stabile insieme col sistema aggiunto; tale stabilità diciamo, con G. Ascoli ⁽⁵⁾, ristretta o in senso stretto.

Ancora dalle (2) segue allora il

TEOREMA 3. - *Ogni sistema (B) t -simile ad un sistema (A) stabile in senso stretto è stabile in senso stretto.*

(3) Va ricordato che l'originaria definizione di Liapunov richiederebbe che $T(t)$, $T^{-1}(t)$, $\dot{T}(t)$ fossero continue e limitate per $0 \leq t$, ma lo studio dei sistemi riducibili si può compiere anche supponendo soltanto $T \in \mathfrak{C}$ (cfr. ad esempio V. V. NEMYTZKII-V. V. STEPANOV, *Teoria qualitativa delle equazioni differenziali* (russo), 2ª ed., GITTL (1949), p. 176 e sgg.).

(4) Per nomenclatura, risultati richiamati, ecc. rinviamo alla Memoria, che indichiamo con «M»: *Sulla stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari*, in corso di stampa presso la «Rivista di Matematica dell'Università di Parma».

(5) G. ASCOLI, *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità*, questi «Rendiconti», (8), 9, 129-134 (1950).

Ciò si deduce anche dalla proprietà transitiva della t -similitudine e dal fatto, già rilevato in «M», che i sistemi stabili in senso stretto sono tutti e soli quelli riducibili a zero.

3. Possiamo ora estendere, in virtù di risultati acquisiti in «M», i teoremi 2 e 3, mediante il seguente:

TEOREMA 4. — *Il sistema (B) è uniformemente stabile [stabile in senso stretto] se esistono una $T(t) \in \mathcal{T}$ ed una $A(t) \in \mathcal{M}$ tali che (A) sia uniformemente stabile [stabile in senso stretto] e tali che si abbia la*

$$(3) \quad \int_0^{+\infty} \|\dot{T}(t) + T(t)A(t) - B(t)T(t)\| dt < +\infty$$

oppure l'altra

$$(3') \quad \int_0^{+\infty} \|\dot{T}(t) + T(t)B(t) - A(t)T(t)\| dt < +\infty.$$

Valga infatti la (3) e si effettui la trasformazione $z = T(t)x$, la quale muta ogni soluzione $z(t)$ di (B) in una soluzione $x(t)$ del sistema $T(t)\dot{x} = B(t)T(t)x - T(t)x$, vale a dire del sistema

$$(C) \quad \dot{x} = A(t)x + C(t)x$$

con

$$C(t) = -T^{-1}(t) [\dot{T}(t) + T(t)A(t) - B(t)T(t)].$$

Poiché $T(t) \in \mathcal{T}$ la (3) dà luogo alla

$$\int_0^{+\infty} \|C(t)\| dt < +\infty,$$

e questa porta (cfr. «M», n. 6, b), c)) che (C) è uniformemente stabile [stabile in senso stretto] se tale è (A). Poiché $A + C = -T^{-1}\dot{T} - T^{-1}BT = -T^{-1}\dot{T} - T^{-1}BT$ è t -simile a B (e quindi (C) è t -simile a (B)), dal teorema 2 [dal teorema 3] segue l'asserto.

Se invece che da (3) si parte dalla (3') basta fare la trasformazione $x = T(t)z$ e ragionare in modo analogo.

OSS. 1. — *Il teorema 4 estende un criterio di stabilità dato in «M», precisamente quello ivi indicato come teorema 9, per avere il quale basta porre $T(t) = B(t)$ nell'enunciato precedente.*

OSS. 2. — *Poiché la (1) implica la (3) (la (1') implica la (3')), il teorema 4 include i teoremi 2 e 3.*

4. Quest'ultima osservazione suggerisce di introdurre accanto alla t -similitudine un'altra relazione tra matrici di \mathfrak{M} .

Diremo che la matrice $A(t) \in \mathfrak{M}$ è t_∞ -simile alla $B(t) \in \mathfrak{M}$ (od anche che il sistema (A) è t_∞ -simile a (B)) se esiste una $T(t) \in \mathfrak{T}$ per cui valga la disuguaglianza (3).

Se vale la (3) per una qualche $T_1(t) \in \mathfrak{T}$ allora esiste una $T_2(t) \in \mathfrak{T}$ (ad esempio la $T_1^{-1}(t)$) per cui vale la (3') e ciò prova che la relazione di t_∞ -similitudine è simmetrica (rispetto alle matrici A, B).

Essa è anche riflessiva (basta prendere $T = I$) e transitiva. Infatti se

$$\int_0^{+\infty} \|\dot{T}_1(t) + T_1(t) A(t) - B(t) T_1(t)\| dt < +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \|\dot{T}_2(t) + T_2(t) B(t) - C(t) T_2(t)\| dt < +\infty$$

sarà anche $(T_1 \in \mathfrak{T}, T_2 \in \mathfrak{T})$:

$$\int_0^{+\infty} \|\dot{T}_2 \dot{T}_1 + T_2 T_1 A - T_2 B T_1\| dt + \int_0^{+\infty} \|\dot{T}_2 \dot{T}_1 + T_2 B T_1 - C T_2 T_1\| dt < +\infty$$

e posto $T_2 T_1 = T_3$ si ha $T_3 \in \mathfrak{T}$ e

$$\int_0^{+\infty} \|\dot{T}_3 + T_3 A - C T_3\| dt < +\infty.$$

Il teorema 4 si può ora enunciare anche così:

TEOREMA 4'. - Ogni sistema (B) t_∞ -simile ad un sistema (A) uniformemente stabile [stabile in senso stretto] è uniformemente stabile [stabile in senso stretto].

5. Indichiamo ora un esempio per provare che a) la stabilità ordinaria non è invariante rispetto alla t_∞ -similitudine, e che pertanto b) la t_∞ -similitudine è più generale della t -similitudine.

Le due matrici ($n = 2$)

$$A(t) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-at} & 0 \end{pmatrix},$$

con $a > 0$ e con $\varphi(t) = \sin \log(t+1) + \cos \log(t+1) - 2a$, sono t_∞ -simili (basta prendere $T = I$). Tuttavia se $1 < 2a < 1 + e^{-\pi/2}$ il sistema (A) è stabile, mentre il sistema (B) ammette soluzioni non limitate (6).

Segue, per il teorema 1, che (A) e (B) non possono essere t -simili.

(6) Cfr. R. BELLMAN, *Stability theory of differential equations* (Mc Graw-Hill Book Co., 1953), p. 42.

Geometria. — *Sul teorema dei quattro vertici.* Nota di GIACOMO SABAN, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Alcuni anni fa Beniamino Segre ⁽¹⁾ è pervenuto a dimostrare che una *ovale sghemba*, cioè una linea sghemba chiusa di Jordan, priva di punti multipli, dotata ovunque di piano osculatore variabile con continuità ed incontrata da ogni retta ed ogni piano dello spazio in al più due e quattro punti rispettivamente, possiede quattro piani osculatori stazionari: teorema, questo, che costituisce una estensione alle curve sghembe del cosiddetto « teorema dei quattro vertici » per le curve piane, di cui sono note varie dimostrazioni e che è inizialmente dovuto a Mukhopadhyaya ⁽²⁾.

Perno della dimostrazione del professor Segre è lo studio delle proprietà di certe trasformazioni topologiche: nella prima parte di questa Nota si dà invece una dimostrazione, basata esclusivamente su considerazioni geometriche elementari, di un noto teorema meno preciso, mostrando che — per una opportuna classe di curve sferiche chiuse (classe però più generale delle ovali sghembe tracciate sulla sfera) — il piano osculatore è stazionario in *almeno* quattro punti, e si giunge altresì ad un'interpretazione meccanica di questo risultato. Tale dimostrazione si estende, opportunamente modificata, ad una particolare classe di curve sghembe non sferiche, e si perviene alla conclusione, nella seconda parte, che *tali curve hanno le eliche osculatrici stazionarie in almeno quattro punti.*

I.

1. Si consideri una curva sferica \mathcal{C} , appartenente alla sfera S di raggio R , e sia $\vec{x} = \vec{x}(s)$ il raggio-vettore di tale curva, qualora si assuma ad origine delle coordinate il centro O della sfera, ed a parametro s l'arco della curva considerata. Si ha allora

$$(1) \quad \vec{x} = \vec{x}(s) = R \cdot \vec{e}_1(s),$$

ove $\vec{e}_1 = \vec{e}_1(s)$ è il versore del raggio-vettore di \mathcal{C} , normale dunque alla sfera S . Denotiamo ancora con \vec{e}_2 il versore della tangente a \mathcal{C} , normale a \vec{e}_1 : è

$$(2) \quad \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{e}_2 = R \frac{d\vec{e}_1}{ds},$$

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) B. SEGRE, *Intorno alle ovali sghembe, e su di un'estensione del teorema di Cavalieri-Lagrange alle funzioni di due variabili*, « R. Accad. d'Italia », Mem. Cl. Sc. Fis., Mat. e Nat., 7, pp. 365-397 (1936).

(2) S. MUKHOPADHYAYA, *New Methods in the Geometry of a Plane Arc*, « Bull. Calcutta Math. Soc. », 1, pp. 31-37 (1909).

per cui, definito $ds^* = ds/R$ come *elemento d'arco sferico* sulla curva, possiamo scrivere

$$(3) \quad \frac{\vec{de}_1}{ds^*} = \vec{e}_2.$$

La terna diretta di versori mutuamente ortogonali $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2)$ risulta associata intrinsecamente alla curva sferica \mathcal{C} e valgono le formule di derivazione

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{de}_1}{ds^*} = \vec{e}_2, \\ \frac{\vec{de}_2}{ds^*} = -\vec{e}_1 + \sigma \vec{e}_3, \\ \frac{\vec{de}_3}{ds^*} = -\sigma \vec{e}_2, \end{array} \right.$$

ove

$$(5) \quad \sigma = \left[\vec{e}_1, \frac{\vec{de}_1}{ds^*}, \frac{d^2 \vec{e}_1}{ds^{*2}} \right]$$

riceve il nome di *curvatura sferica* di \mathcal{C} .

Se si confrontano le formule (4) con le formule di Frénet per la curva sferica considerata, si verifica immediatamente che fra la flessione ρ , la torsione τ e la curvatura sferica σ di \mathcal{C} intercorrono le seguenti relazioni

$$(6) \quad \rho = \frac{\sqrt{1 + \sigma^2}}{R}, \quad \tau = \frac{\frac{d\sigma}{ds^*}}{R(1 + \sigma^2)}.$$

Dalla seconda di queste risulta che a $\sigma = \text{cost.}$ corrispondono curve sferiche *piane*: più precisamente, per via della prima delle (6) si ha che a $\sigma = 0$ corrispondono i cerchi massimi ed a $\sigma = k \neq 0$ cerchi generici della sfera S .

2. Conformemente a quanto si suol fare nel passaggio dalla geometria piana a quella sferica, si considererà come analogo delle rette tangenti ad una curva piana i cerchi massimi tangenti alla curva sferica \mathcal{C} , e si chiamerà *ovale sferica*, ogni curva sferica chiusa che non attraversa i suoi cerchi massimi tangenti. Da questa definizione segue che *ogni ovale sferica appartiene per intero ad un emisfero della sfera sulla quale è tracciata*.

Inoltre, *la curvatura sferica σ di un'ovale sferica non cambia di segno lungo la curva*. Nel seguito si considereranno unicamente ovali sferiche per le quali sia $\sigma > 0$.

Infine si osservi che una ovale sferica *non* è necessariamente una ovale sghemba tracciata su una sfera, nel senso di B. Segre, chiarito nell'introduzione. Difatti, mentre anzitutto ogni retta dello spazio taglia la sfera, e quindi l'ovale sferica su essa tracciata, al massimo in due punti, è possibile costruire

ovali sferiche che tagliano un piano in più di quattro punti. Un esempio semplice di curve siffatte si ottiene considerando la proiezione centrale sulla sfera dell'orbiforme euleriana derivata da una *curva triangolare* equilatera, orbiforme che è intersecata da alcune circonferenze del piano in sei punti: si verifica immediatamente che, se il centro della sfera è preso sull'asse di una tale circonferenza, l'orbiforme si proietta secondo una ovale sferica, alle tangenti dell'orbiforme corrispondendo circoli massimi, e questa ovale sferica è intersecata da un cerchio della sfera, proiezione della circonferenza precedente, in sei punti, ovviamente complanari.

Si chiamerà ancora *vertice* dell'ovale sferica \mathcal{C}_0 , ogni punto di \mathcal{C}_0 per cui è

$$(7) \quad d\sigma = \left[\vec{e}_1, \frac{d\vec{e}_1}{ds^*}, \frac{d^2\vec{e}_1}{ds^{*2}} \right] ds^* = 0;$$

la seconda delle (6) mostra che questa definizione di vertice coincide con quella classica, ove il vertice di una curva sghemba vien definito come un punto della curva dotato di piano osculatore stazionario ($\tau = 0$).

3. Sia un'ovale sferica \mathcal{C}_0 , di elemento d'arco sferico ds^* e curvatura sferica σ . Per via della chiusura di \mathcal{C}_0 è

$$(8) \quad \oint_{\mathcal{C}_0} d\sigma = 0.$$

Assieme all'integrale curvilineo scalare (8) si consideri l'integrale curvilineo vettoriale

$$(9) \quad \oint_{\mathcal{C}_0} \vec{e}_1 d\sigma;$$

integrando per parti, si ha

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \vec{e}_1 d\sigma = [\sigma \vec{e}_1]_{\mathcal{C}_0} - \oint_{\mathcal{C}_0} \sigma d\vec{e}_1$$

e, il primo termine del secondo membro annullandosi per via della chiusura di \mathcal{C}_0 , rimane

$$(10) \quad \oint_{\mathcal{C}_0} \vec{e}_1 d\sigma = - \oint_{\mathcal{C}_0} \sigma d\vec{e}_1 = - \oint_{\mathcal{C}_0} \sigma \vec{e}_2 ds^* = \oint_{\mathcal{C}_0} d\vec{e}_3 = 0,$$

quindi, l'integrale (9) è *parimenti nullo*.

Dall'integrale curvilineo (8) risulta che $d\sigma$ deve annullarsi in un numero pari (≥ 2) di punti sulla curva \mathcal{C}_0 : si supponga che \mathcal{C}_0 abbia esattamente *due* tali punti, P_1 e P_2 , e siano inoltre P_3 e P_4 due punti generici di \mathcal{C}_0 che separano la coppia $P_1 P_2$. Allora, per via della (8), $d\sigma$ avrà segni opposti sugli archi $P_1 P_3 P_2$ e $P_1 P_4 P_2$: la scelta di P_3 e P_4 sia fatta in modo che

$d\sigma$ sia positivo per l'arco $P_1 P_3 P_2$ e negativo per l'arco $P_2 P_4 P_1$. Dalla (10) segue invece che

$$(11) \quad \int_{P_1 P_3 P_2}^{\rightarrow} e_1 d\sigma = \int_{P_1 P_4 P_2}^{\rightarrow} e_1 d\sigma.$$

Si consideri ora il piano π_1 , determinato da uno dei cerchi massimi che delimita un emisfero contenente interamente \mathcal{C}_0 : si potrà assumere, ad esempio, come piano π_1 il piano del circolo massimo tangente in P_3 (o in P_4) alla curva \mathcal{C}_0 . Si consideri altresì il piano π_2 determinato dal circolo massimo passante per P_1 e P_2 . I due archi $P_1 P_3 P_2$ e $P_1 P_4 P_2$ appartengono ciascuno ad uno dei due diedri supplementari definiti dai piani π_1 e π_2 : parimenti il vettore rappresentato dal primo membro dell'equazione (11) appartiene ad uno di questi diedri e quello rappresentato dal secondo membro all'altro, sicché - tenuto conto dell'arbitrarietà che v'è nella scelta di π_1 - l'eguaglianza (11) non può sussistere che se ciascuno degli integrali considerati è separatamente nullo. Ciò non può accadere che se $d\sigma$ si annulla in altri punti, distinti da P_1 e P_2 , contrariamente al supposto. È dunque dimostrato che *un'ovale sferica non può avere due soli vertici*.

Basta ora ricordare che esistono ovali sferiche aventi esattamente quattro vertici; esempi di tali curve sono forniti dalle quartiche ellittiche di 1ª specie ⁽³⁾. Si può quindi concludere che *il minimo numero di vertici di una ovale sferica vale quattro* ⁽⁴⁾.

4. Si può aggiungere una interpretazione « meccanica », nell'indirizzo di Blaschke ⁽⁵⁾ e B. Segre ⁽⁶⁾ del risultato precedente.

Si consideri, assieme alla curva \mathcal{C}_0 , tracciata da \vec{x} , l'indicatrice sferica delle sue tangenti, \mathfrak{I}_1 , tracciata da \vec{e}_2 . Si supponga ancora che ogni punto p della curva chiusa \mathfrak{I}_1 abbia per densità il valore della curvatura sferica nel punto P di \mathcal{C}_0 corrispondente a p . Il baricentro della configurazione \mathfrak{I}_1 così ottenuta è ovviamente

$$(12) \quad \vec{\beta} = \frac{\oint_{\mathcal{C}_0} \sigma \vec{e}_2 ds^*}{\oint_{\mathcal{C}_0} \sigma ds^*} = \frac{\oint_{\mathcal{C}_0} \sigma \vec{e}_2 ds}{\oint_{\mathcal{C}_0} \sigma ds},$$

(3) Cfr. la Nota cit. in (1), p. 375.

(4) L'esistenza, per una curva siffatta, di almeno quattro vertici è nota: cfr. K. ZINDLER, *Über konvexe Kegelflächen*, «Mitth. Math. Phys.», 35, pp. 45-48 (1928); D. FOG, *Über den Vierscheitelsatz und seine Verallgemeinerungen*, «Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.», pp. 251-254 (1933).

(5) W. BLASCHKE, *Minimalzahl der Scheitel einer geschlossenen konvexen Kurve*, «Rendic. Circ. Mat. di Palermo», 36, pp. 220-222 (1913).

(6) B. SEGRE, *Il teorema sul minimo numero dei vertici di un'ovale ed alcune sue estensioni*, «Atti R. Accad. Sc. di Torino», 70, pp. 116-122 (1935).

ove l'integrando a denominatore non può annullarsi, essendo \mathcal{C}_0 un'ovale sferica. Dalla terza delle (4) segue che

$$(13) \quad \oint_{\mathcal{C}_0} \vec{\sigma} e_2 ds = - \oint_{\mathcal{C}_0} d\vec{e}_3 = 0,$$

per cui il baricentro dell'indicatrice sferica pesante \mathfrak{I}_1 delle tangenti coincide col centro della sfera sulla quale è tracciata.

Inversamente, se l'indicatrice sferica pesante \mathfrak{I}_1 delle tangenti di una curva chiusa sferica \mathcal{C}_0 ha per baricentro il centro della sfera sulla quale è tracciata, la curva \mathcal{C}_0 ha almeno quattro vertici. Difatti, se \mathcal{C}_0 ha due soli vertici, P_1 e P_2 , la densità su \mathfrak{I}_1 ha un solo massimo ed un solo minimo, nei punti p_1 e p_2 corrispondenti a P_1 e P_2 ; è allora possibile dividere \mathfrak{I}_1 in due parti, di lunghezza uguale, di cui una ha interno il punto di densità massima, e l'altra il punto di densità minima. Detti a e b i punti di suddivisione, risulta ovviamente

$$\int_{ap_1b} \sigma ds > \int_{ap_2b} \sigma ds;$$

mentre invece, per via della (13), è

$$\int_{ap_1b} \vec{\sigma} e_2 ds = \int_{ap_2b} \vec{\sigma} e_2 ds.$$

Ne risulta che i raggi vettori dei baricentri delle due parti dell'indicatrice sferica non possono essere opposti: \mathcal{C}_0 dovrà quindi avere almeno quattro vertici.

Più in generale, se il baricentro di una curva sferica chiusa pesante \mathfrak{S}_0 , a ciascun punto della quale si attribuisca una densità $\delta > 0$, coincide con il centro della sfera, la curva \mathfrak{S}_0 taglia tutti i circoli massimi di questa.

Difatti, sia γ un circolo massimo della sfera Σ considerata, e π il piano di γ . Se \mathfrak{S}_0 non interseca γ , appartiene tutta ad un emisfero di Σ , per cui i vettori infinitesimi

$$\vec{s}_0 \cdot \delta \cdot ds_i$$

(ove \vec{s}_0 è il raggio vettore del punto generico di \mathfrak{S}_0 ed s_i il suo arco curvilineo) starebbero tutti da una medesima banda rispetto al piano π , e la loro somma non potrebbe annullarsi, né potrebbe annullarsi qualora \mathfrak{S}_0 fosse solamente tangente a γ . Risulta quindi dimostrato l'asserto. Si osservi infine che, per via di un risultato dovuto a Fenchel⁽⁷⁾ ed a Vigodsky⁽⁸⁾, esiste una curva chiusa \mathcal{C}_0 che ammette una siffatta \mathfrak{S}_0 per indicatrice sferica delle tangenti.

(7) W. FENCHEL, *Geschlossene Raumkurven mit vorgeschriebenen Tangentenbild*, « J. ber. Deutsch. Math. Verein. », 39, pp. 183-186 (1930).

(8) M. VIGODSKY, *Sur les courbes à indicatrice des tangentes donnée* (russo), « Recueil Math. », 16 (58), pp. 73-80 (1945).

II.

5. Data una curva sghemba generica \mathcal{C} , è noto ⁽⁹⁾ che si può associare ad ogni suo punto un'elica circolare, detta *elica osculatrice*, avente nel punto considerato il medesimo triedro principale e la medesima flessione ρ e torsione τ di \mathcal{C} .

Se, detto s l'arco curvilineo di \mathcal{C} , le equazioni intrinseche di questa curva sono

$$\rho = \rho(s) \quad , \quad \tau = \tau(s) \quad ,$$

l'elica osculatrice, nel punto $P_0(s = s_0)$ di \mathcal{C} , ha per asse la retta A , diretta come il versore

$$(14) \quad \vec{\alpha} = \frac{\tau(s_0) \vec{a}_1(s_0) + \rho(s_0) \vec{a}_3(s_0)}{\sqrt{\rho^2(s_0) + \tau^2(s_0)}} \quad ,$$

ove \vec{a}_1 ed \vec{a}_3 denotano i versori della tangente e della binormale di \mathcal{C} .

Si chiameranno *punti elicoidali* gli eventuali punti di una curva sghemba chiusa, tali che in essi risulti

$$(15) \quad d\left(\frac{\rho}{\tau}\right) = 0 \quad .$$

Si osservi che, potendo la (14) scriversi nella forma

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{a}_1 + \frac{\rho}{\tau} \vec{a}_3}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^2}} \quad ,$$

si ha

$$(16) \quad d\vec{\alpha} = \frac{\left(\vec{a}_3 - \frac{\rho}{\tau} \vec{a}_1\right) d\left(\frac{\rho}{\tau}\right)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\tau}\right)^2\right]^{3/2}} \quad ;$$

pertanto *i punti elicoidali sono quei punti per cui il versore dell'asse dell'elica osculatrice rimane stazionario*.

6. Si consideri ora una curva sghemba chiusa \mathcal{C}_0 , tale che l'indicatrice delle binormali \mathfrak{B}_3 di \mathcal{C}_0 sia un'ovale sferica, nel senso chiarito nella prima parte di questa nota.

L'esistenza di curve siffatte è dimostrata dal seguente esempio. Si consideri la curva di equazioni parametriche

$$(17) \quad x_1 = \frac{t}{t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 1} \quad , \quad x_2 = \frac{t^2 - 1}{t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 1} \quad , \quad x_3 = \frac{t^3}{t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 1} \quad ,$$

(9) G. LORIA, *Curve sghembe speciali, algebriche e trascendenti*, I, N. Zanichelli, p. 12 (1925); D. J. STRUIK, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley Press, p. 42 (1950).

per t reale variabile fra $-\infty$ e $+\infty$: B. Segre⁽¹⁰⁾ ha mostrato che la torsione di questa curva è *sempre positiva*, per cui è sempre $\rho/\tau > 0$. Dalle formule di Frénet risulta immediatamente che la curvatura sferica di \mathfrak{F}_3 è precisamente il rapporto ρ/τ ; per cui, dal risultato precedente, segue che l'indicatrice delle binormali della curva (17) descrive un'ovale sferica. Incidentalmente, l'osservazione testé fatta mostra che *la classe di curve sghembe chiuse \mathcal{C}_0 qui considerata è precisamente costituita dalle curve sghembe prive di vertici*.

Si considerino ora l'integrale curvilineo scalare, ovviamente nullo,

$$(18) \quad \oint_{\mathcal{C}_0} d\left(\frac{\rho}{\tau}\right) = 0$$

e l'integrale curvilineo vettoriale

$$(19) \quad \oint_{\mathcal{C}_0} \vec{a}_3 d\left(\frac{\rho}{\tau}\right):$$

quest'ultimo possiamo scriverlo nella forma

$$(20) \quad \oint_{\mathcal{C}_0} \vec{a}_3 d\left(\frac{\rho}{\tau}\right) = \left[\frac{\rho}{\tau} \vec{a}_3\right]_{\mathcal{C}_0} + \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{\rho}{\tau} \tau \vec{a}_2 ds = \oint_{\mathcal{C}_0} d\vec{a}_1 = 0,$$

ed è quindi parimenti nullo.

L'integrale (18) mostra che $d(\rho/\tau)$ deve annullarsi un numero pari (≥ 2) di volte sulla curva chiusa \mathcal{C}_0 : si supponga che si annulli solamente due volte, nei punti P_1 e P_2 . Siano allora p_1 e p_2 i corrispondenti punti sull'indicatrice delle binormali, \mathfrak{F}_3 : allora, con ragionamento analogo a quello della prima parte di questa Nota, si dimostra che quest'ipotesi conduce ad una contraddizione, per cui $d(\rho/\tau)$ dovrà annullarsi almeno quattro volte su ogni curva siffatta. Vale a dire che *ogni curva sghemba chiusa, la cui indicatrice delle binormali sia un'ovale sferica, ha almeno quattro punti elicoidali*.

7. Anche quest'ultimo risultato conduce ad un'interpretazione meccanica. Difatti, essendo

$$(21) \quad \oint_{\mathcal{C}_0} \rho \vec{a}_2 ds = \oint_{\mathcal{C}_0} d\vec{a}_1 = 0,$$

se ne deduce che *la distribuzione di massa, ottenuta attribuendo ad ogni punto dell'indicatrice sferica delle normali \mathfrak{F}_2 della curva sghemba chiusa \mathcal{C}_0 , una densità uguale alla curvatura di \mathcal{C}_0 nel punto corrispondente, ha per baricentro il centro della sfera sulla quale è tracciata la curva \mathfrak{F}_2* .

(10) B. SEGRE, *Sulla torsione integrale delle curve chiuse sghembe*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., Mat. e Nat., S. 8^a, 3, pp. 422-426 (1947).

Inversamente, si supponga che una distribuzione siffatta relativa ad una curva chiusa sghemba \mathcal{C}_0 abbia per baricentro il centro della sfera; si ha allora

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \rho \vec{a}_2 ds = 0,$$

e quindi

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \rho \vec{a}_2 ds = \oint_{\mathcal{C}_0} \vec{a}_3 d\left(\frac{\rho}{\tau}\right) = 0,$$

ciò che riconduce alle ipotesi precedenti. Conseguentemente, *se una distribuzione di massa di questo tipo ha per baricentro il centro della sfera, la curva \mathcal{C}_0 ha almeno quattro punti elicoidali.*

Geometria. — *Sulle connessioni tensoriali integrabili.* Nota di ALDO COSSU, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

PREMESSA. — In questa Nota si considerano particolari connessioni tensoriali ⁽¹⁾ per tensori doppi controvarianti, dette integrabili, che determinano un trasporto per equipollenza indipendente dalla linea di trasporto.

Delle suddette connessioni si dà una costruzione geometrica mediante campi di tensori doppi controvarianti.

I. — CONNESSIONI TENSORIALI INTEGRABILI.

Sia X_n una varietà regolare e sia x il generico punto di coordinate x^i ($i = 1, \dots, n$) in un sistema ammissibile di coordinate. Siano inoltre $L_{rst}^{ik}(x)$ i parametri di una connessione tensoriale per tensori doppi controvarianti.

Il tensore

$$(1.1) \quad L_{rstpq}^{\dots ik} = \partial_q L_{rstp}^{ik} - \partial_p L_{rstq}^{ik} + L_{hlp}^{ik} L_{rstq}^{hl} - L_{hlp}^{ik} L_{rstq}^{hl},$$

analogo al tensore di curvatura delle ordinarie connessioni affini, ha il seguente significato geometrico ⁽²⁾.

Considerato un parallelogramma infinitesimo costruito mediante una qualunque connessione vettoriale simmetrica con i due lati infinitesimi $dx^i, \delta x^i$ applicati in x , ed un generico tensore doppio controvariante ξ^{ik} ,

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) La nozione di connessione tensoriale si deve a E. BOMPIANI, *Le connessioni tensoriali*, « Rend. Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. I, fasc. 5, 1946; per ulteriori osservazioni cfr. A. COSSU, *Alcune osservazioni sulle connessioni tensoriali*, « Rend. di Mat. », ser. V, volume XIII, fasc. 3-4, 1955.

(2) Cfr. la seconda Nota citata nella ⁽¹⁾, p. 388.

si ha che la parte principale dell'incremento subito da ξ^{ik} nel trasporto ciclico per equipollenza, relativo ad una generica connessione tensoriale Γ_{rst}^{ik} , lungo i lati del suddetto parallelogramma, è dato da

$$(I.2) \quad \Delta \xi^{ik} = \Gamma_{rs pq}^{ik} \xi^{rs} dx^p \delta x^q.$$

Il tensore (I.1) verrà chiamato *tensore di curvatura* della connessione tensoriale L_{rst}^{ik} .

Se il tensore (I.I) è nullo la connessione tensoriale $L_{\alpha\beta}^{ik}$ determina un trasporto per equipollenza dei vettori doppi controvarianti indipendente dalla linea di trasporto; in questo caso la connessione si chiamerà *integrabile*.

La costruzione di una connessione tensoriale integrabile si può avere considerando n^2 campi di tensori doppi controvarianti $X^{\alpha\beta}_{ik}(x)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$ indici ordinali) tali che il determinante

$$(1.3) \quad \begin{array}{cccc} X^{11} & \dots & X^{11} & X^{11} \dots X^{11} \\ 11 & & 11 & 21 \quad 11 \\ \\ X^{12} & \dots & X^{12} & X^{12} \dots X^{12} \\ 11 & & 11 & 21 \quad 11 \\ \\ \dots & & \dots & \dots \\ \\ X^{111} & \dots & X^{111} & X^{111} \dots X^{111} \\ 11 & & 11 & 21 \quad 11 \end{array}$$

sia diverso da zero. Se $X_{ik}^{\alpha\beta}$ è l'elemento reciproco di $X_{\alpha\beta}^{ik}$ in (1.3), sussistono le relazioni

$$(I.4) \quad X_{\alpha\beta}^{ik} X_{hl}^{\alpha\beta} = \delta_h^i \delta_l^k, \quad X_{\alpha\beta}^{ik} X_{ik}^{\alpha\sigma} = \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\sigma.$$

Segue che le $X_{ik}^{\alpha\beta}$, per ogni coppia ordinata di indici α, β , sono le componenti di un tensore doppio covariante.

Assegnato quindi in x il tensore ξ^{ik} si possono costruire gli n^2 invarianti $\xi^{\alpha\beta}$ del tensore rispetto ai tensori doppi controvarianti X^{ik} ponendo

$$\xi^{ik} = \xi^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}^{ik},$$

da cui si ha, usufruendo delle (1.4),

$$(I.5) \quad \xi^{\alpha\beta} = \xi^{ik} X_{ik}^{\alpha\beta}.$$

Le $\xi^{\alpha\beta}$ saranno chiamate componenti del tensore ξ^{ik} rispetto agli n^2 tensori $X^{ik}_{\alpha\beta}$.

Si può allora definire un trasporto per equipollenza del generico tensore ξ^{ik} dal punto x al generico punto y con la condizione che il tensore $\tilde{\xi}^{ik}$, applicato in y ed equipollente a ξ^{ik} , abbia rispetto agli n^2 tensori $X_{\alpha\beta}^{ik}(y)$ componenti eguali alle corrispondenti componenti di ξ^{ik} in x .

In altre parole la legge del trasporto è espressa dalle

$$(1.6) \quad d\xi^{\alpha\beta} = 0.$$

Dalle (1.5) si ha quindi

$$d\xi^{\alpha\beta} = d\xi^{ik} X_{ik}^{\alpha\beta} + \partial_i X_{ik}^{\alpha\beta} \xi^{ik} dx^i = 0$$

e, tenendo conto delle (1.4),

$$(1.7) \quad d\xi^{ik} + \partial_t X_{rs}^{ik} X^{rs} \xi^{ik} dx^t = 0.$$

Osservato allora che le n^5 funzioni

$$(1.8) \quad L_{rst}^{ik} = \partial_t X_{rs}^{ik} = -\partial_t X_{\alpha\beta}^{ik} X_{\alpha\beta}^{rs}$$

sono i parametri di una connessione tensoriale, il primo membro della (1.7) è il differenziale tensoriale di ξ^{ik} rispetto alla connessione (1.8) e quindi la legge di trasporto dianzi definita è quella relativa alla stessa connessione il cui tensore di curvatura, come si può provare facilmente, è nullo.

Si noti che gli n^2 campi $X_{\alpha\beta}^{ik}$ sono campi di tensori equipollenti rispetto alla connessione (1.8).

Viceversa è facile provare che una connessione tensoriale integrabile di parametri L_{rst}^{ik} si può costruire geometricamente mediante n^2 campi di tensori doppi controvarianti la cui determinazione è legata naturalmente alla risoluzione del sistema ai differenziali totali

$$(1.9) \quad \partial_t X^{ik} = -L_{rst}^{ik} X^{rs}$$

nelle n^2 funzioni incognite X^{ik} .

Per le condizioni di integrabilità del sistema (1.9) si ha

$$(\partial_q L_{rst}^{ik} - \partial_p L_{rst}^{ik}) X^{rs} + L_{rst}^{ik} \partial_q X^{rs} - L_{rst}^{ik} \partial_p X^{rs} = 0$$

e quindi per le stesse (1.9)

$$(1.10) \quad (\partial_q L_{rst}^{ik} - \partial_p L_{rst}^{ik} + L_{hlg}^{ik} L_{rst}^{hl} - L_{hlg}^{ik} L_{rst}^{hl}) X^{rs} = 0.$$

Le (1.10) sono identicamente soddisfatte per la supposta integrabilità della connessione e quindi il sistema (1.9) è completo.

Se allora si considerano n^2 soluzioni $X_{\alpha\beta}^{ik}$ tali che il determinante (1.3) sia diverso da zero e se $X_{ik}^{\alpha\beta}$ sono gli elementi reciproci, dalle (1.9) si ottengono le (1.8) e quindi il trasporto per equipollenza del generico tensore ξ^{ik} relativo alla connessione rimane determinato dalle equazioni (1.6).

Si noti che mediante la sostituzione

$$Y_{\alpha\beta}^{ik} = C_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} X_{\rho\sigma}^{ik},$$

essendo le $C_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$ n^4 costanti a determinante diverso da zero, si possono ottenere n^2 nuove soluzioni del sistema (1.9) costituenti anch'esse n^2 campi di tensori doppi controvarianti che determinano quindi la stessa connessione tensoriale integrabile.

2. - PARTICOLARI CLASSI DI CONNESSIONI TENSORIALI INTEGRABILI.

Un caso particolare di connessione tensoriale integrabile si ha considerando le due n -ple di campi di vettori ξ_{α}^i e η_{β}^k ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$, indici ordinati) tali che i due determinanti $|\xi_{\alpha}^i|$, $|\eta_{\beta}^k|$ siano diversi da zero, e costruendo gli n^2 campi di tensori doppi.

$$(2.1) \quad X_{\alpha\beta}^{ik} = \xi_{\alpha}^i \eta_{\beta}^k.$$

Poiché il determinante (1.3) è in questo caso eguale a $|\xi_{\alpha}^i|^n |\eta_{\beta}^k|^n$, si può determinare l'elemento reciproco $X_{ik}^{\alpha\beta}$ di $X_{\alpha\beta}^{ik}$, per esso si ha

$$X_{ik}^{\alpha\beta} = \xi_{\alpha}^i \eta_{\beta}^k$$

ove ξ_{α}^i e η_{β}^k sono rispettivamente gli elementi reciproci di ξ_{α}^i e η_{β}^k nei due determinanti $|\xi_{\alpha}^i|$ e $|\eta_{\beta}^k|$,

Se quindi λ^{ik} è un generico tensore doppio controvariante applicato in x , indicate con $\lambda^{\alpha\beta}$ le sue componenti rispetto agli n^2 tensori (2.1) applicati nello stesso punto, si ha

$$(2.2) \quad \lambda^{ik} = \lambda^{\alpha\beta} \xi_{\alpha}^i \eta_{\beta}^k, \quad \lambda^{\alpha\beta} = \lambda^{ik} \xi_i^{\alpha} \eta_k^{\beta}.$$

In tal caso le (1.6) si scrivono secondo le

$$(2.3) \quad d\lambda^{\alpha\beta} = d\lambda^{ik} \xi_i^{\alpha} \eta_k^{\beta} + (\partial_t \xi_i^{\alpha} \eta_k^{\beta} + \partial_t \eta_k^{\beta} \xi_i^{\alpha}) \lambda^{ik} dx^t = 0$$

da cui tenendo conto delle (2.2)

$$(2.4) \quad d\lambda^{ik} = (\partial_t \xi_r^{\alpha} \xi_s^i \delta_r^k + \partial_t \eta_s^{\beta} \eta_r^k \delta_r^i) \lambda^{rs} dx^t = 0.$$

Le funzioni

$$(2.5) \quad L_{rst}^{ik} = \delta_s^k \partial_t \xi_r^{\alpha} \xi_s^i + \delta_r^i \partial_t \eta_s^{\beta} \eta_r^k$$

sono i parametri di una particolare connessione tensoriale integrabile. Essa dipende dalle due connessioni vettoriali integrabili aventi rispettivamente i parametri

$$L_{rt}^i = \partial_t \xi_r^{\alpha} \xi_s^i = - \partial_t \xi_s^{\alpha} \xi_r^i$$

e

$$L_{st}^{*k} = \partial_t \eta_s^\beta \eta_\beta^k = - \partial_t \eta_\beta^k \eta_s^\beta$$

costruiti mediante le due n -ple di campi ξ_α^i e η_β^k .

In definitiva si ha dalle (2.5) le

$$(2.6) \quad L_{rst}^{ik} = \delta_s^k L_{rt}^i + \delta_r^i L_{st}^{*k}.$$

Naturalmente se per la seconda n -pla di campi si ha

$$\eta_\beta^i = c_\beta^e \xi_e^i.$$

essendo le c_β^e n^2 costanti con il determinante $|c_\beta^e|$ diverso da zero, il che equivale a dire che le η_β^i costituiscono n campi di vettori equipollenti rispetto alla connessione L_{rt}^i , si ha ovviamente $L_{rt}^i = L_{st}^{*k}$, e la connessione tensoriale (2.6) è, secondo Bompiani (3), *dedotta* dalla connessione vettoriale L_{rt}^i .

Potrebbe però accadere che, pur non essendo $L_{rt}^i = L_{st}^{*k}$, la connessione (2.6) sia dedotta da una connessione vettoriale incognita.

In tal caso però, posto

$$(2.7) \quad L_{st}^{*k} = L_{st}^k + T_{st}^{..k}$$

deve aversi (3) per il tensore $T_{st}^{..k}$.

$$\delta_r^i T_{st}^{..k} = \delta_r^i A_{st}^{..k} + \delta_s^k A_{rt}^{..i},$$

cioè $A_{st}^{..k} = \frac{1}{2} T_{st}^{..k}$ e quindi

$$T_{st}^{..k} = \frac{\delta_s^k}{n} T_{pt}^{..p}.$$

Indicando con φ_t il vettore covariante $\frac{1}{n} T_{pt}^{..p}$, le (2.7) si scrivono secondo le

$$(2.8) \quad L_{st}^{*k} = L_{st}^k + \delta_s^k \varphi_t$$

e quindi la L_{st}^{*k} è una delle trasformate della connessione L_{st}^k che conserva lo stesso trasporto delle direzioni della L_{st}^k (4). Ma poiché nel caso in esame sia la L_{st}^k che la L_{st}^{*k} sono integrabili, il vettore φ_t è il gradiente di una funzione scalare, cioè $\varphi_t = \partial_t \varphi$.

Osservato che le ξ_α^i e le η_β^i sono n -ple di soluzioni rispettivamente dei due sistemi completi ai differenziali totali

$$(2.9) \quad \partial_t \xi_\alpha^i = - L_{rt}^i \xi_\alpha^r$$

$$(2.10) \quad \partial_t \eta_\beta^i = - L_{rt}^{*i} \eta_\beta^r$$

(3) Cfr. op. cit. nella (1), p. 480.

(4) Cfr. E. BORTOLOTTI, *Sulla geometria delle varietà a connessioni affini*. « Annali di Mat. », ser. IV, t. VIII, 1930-31.

e notato che il sistema (2.10) si muta per le (2.8) nel sistema (2.9) ponendo $\eta^i = c^\varphi e^\varphi \xi^i$ ove è $\int \varphi_t dx^t = \varphi + k$, si hanno per la n -pla di campi η^i_β le relazioni

$$(2.11) \quad \eta^i_\beta = e^\varphi c^\alpha_\beta \xi^i_\alpha$$

essendo c^α_β , come al solito, n^2 costanti con determinante $|c^\alpha_\beta|$ diverso da zero. Viceversa se tra le due n -ple di campi vettoriali ξ^i_α e η^i_β intercedono le relazioni (2.11) la connessione tensoriale integrabile (2.5) o (2.6) è dedotta da una connessione vettoriale.

Se invece si ha una connessione tensoriale (2.6) non dedotta da una connessione vettoriale e tale che le due connessioni vettoriali che la determinano siano integrabili, la (2.6) è essa stessa integrabile. Inoltre se ξ^i_α e η^i_β sono due n -ple di soluzioni indipendenti rispettivamente dei sistemi (2.9) e (2.10) le $X^{ik}_{\alpha\beta} = \xi^i_\alpha \eta^k_\beta$ rappresentano n^2 soluzioni indipendenti del sistema completo ai differenziali totali

$$\partial_t X^{ik} = (\delta^k_s L^i_{rt} + \delta^i_r L^{*k}_{st}) X^{rs}$$

e quindi il trasporto per equipollenza della connessione (2.6) si costruisce geometricamente come s'è visto al principio di questo numero mediante gli n^2 campi di tensori doppi controvarianti $X^{ik}_{\alpha\beta} = \xi^i_\alpha \eta^k_\beta$.

3. - SULLA CURVATURA DI PARTICOLARI CONNESSIONI TENSORIALI NON INTEGRABILI.

Si è già ricordato nel n. 1 che la parte principale dell'incremento $\Delta \xi^{ik}$ che il tensore ξ^{ik} acquista nel trasporto per equipollenza lungo un ciclo infinitesimo rappresentato da un parallelogramma costruito, mediante una qualunque connessione vettoriale simmetrica, a partire dai due lati infinitesimi dx^i e δx^i , è dato dalle (1.2). È noto altresì che ogni tensore ξ^{ik} applicato in un punto x determina una reciprocità nella stella di centro x tra direzioni e $(n-1)$ - direzioni, rappresentata dalle equazioni

$$(3.1) \quad \rho \mu^i = \xi^{ik} \eta_k$$

con η_k e μ^i vettori rispettivamente covarianti e controvarianti, e ρ scalare arbitrario. La stessa reciprocità vien determinata quindi da ogni tensore $\tilde{\xi}^{ik} = \sigma \xi^{ik}$ essendo σ uno scalare arbitrario.

Se allora si vuole che il tensore $\xi^{ik} = \tilde{\xi}^{ik} + \Delta \tilde{\xi}^{ik}$, applicato in x ed ottenuto da $\tilde{\xi}^{ik}$ in seguito al trasporto per equipollenza lungo il supposto ciclo, determini la stessa reciprocità (3.1) determinata da $\tilde{\xi}^{ik}$, basta che si verifichi la

$$(3.2) \quad (\xi^{hl} L_{rspq} \dots \xi^{ik} \xi^{rs} - \xi^{ik} L_{rspq} \dots \xi^{hl} \xi^{rs}) dx^p \delta x^q = 0.$$

Se inoltre si chiede che la (3.2) sia verificata identicamente deve aversi

$$\delta_u^h \delta_v^l L_{rsq\dot{p}\dots}^{i\dot{k}} - \delta_u^i \delta_v^k L_{rs\dot{p}q\dots}^{h\dot{l}} + \delta_r^h \delta_s^l L_{uv\dot{p}q\dots}^{i\dot{k}} - \delta_r^i \delta_s^k L_{uv\dot{p}q\dots}^{h\dot{l}} = 0$$

da cui contraendo rispetto ad h, u ed l, v si ha

$$(3.3) \quad L_{rs\dot{p}q\dots}^{i\dot{k}} = \frac{1}{n^2} \delta_r^i \delta_s^k L_{h\dot{l}\dot{p}q\dots}^{h\dot{l}}$$

o anche, ponendo $\frac{1}{n^2} L_{h\dot{l}\dot{p}q\dots}^{h\dot{l}} = \psi_{\dot{p}q}$ con $\psi_{\dot{p}q}$ tensore alternante,

$$(3.4) \quad L_{rs\dot{p}q\dots}^{i\dot{k}} = \delta_r^i \delta_s^k \psi_{\dot{p}q}.$$

Si noti che le connessioni con tensore di curvatura della forma (3.4), si comportano localmente come connessioni integrabili rispetto a quei cicli infinitesimi le cui faccette piane $dx^{[i} \delta x^{k]}$ appartengono al complesso lineare di faccette di equazione $\psi_{\dot{p}q} dx^{[i} \delta x^{k]} = 0$.

In particolare se per la connessione tensoriale è nullo il tensore $S_{rs\dot{p}\dots}^{i\dot{k}} = = L_{[rs\dot{p}]}^{i\dot{k}}$ poiché per il tensore di curvatura si ha in tal caso l'identità $L_{[rs\dot{p}q]}^{i\dot{k}} = 0$ ⁽⁵⁾, una connessione con tensore di curvatura della forma (3.4) deve essere necessariamente integrabile poiché si avrebbe $\psi_{\dot{p}q} = 0$.

Un altro caso particolarmente interessante si ha allorché il tensore $\psi_{\dot{p}q}$ della (3.4) è il rotore di un vettore φ_q , definito naturalmente a meno di un gradiente additivo.

Considerata una generica trasformata della connessione tensoriale assegnata mediante le trasformazioni che conservano il trasporto delle reciprocità tra direzioni e $(n-1)$ - direzioni ⁽⁶⁾

$$(3.5) \quad \bar{L}_{rst}^{i\dot{k}} = L_{rst}^{i\dot{k}} + \delta_r^i \delta_s^k \psi_t$$

tra i tensori di curvatura della $L_{rst}^{i\dot{k}}$ e della $\bar{L}_{rst}^{i\dot{k}}$ sussiste la relazione

$$\bar{L}_{rs\dot{p}q\dots}^{i\dot{k}} = L_{rs\dot{p}q\dots}^{i\dot{k}} + 2 \delta_r^i \delta_s^k \partial_{[q} \psi_{\dot{p}]}$$

e per la (3.4)

$$\bar{L}_{rs\dot{p}q\dots}^{i\dot{k}} = \delta_r^i \delta_s^k (\psi_{\dot{p}q} - 2 \partial_{[q} \psi_{\dot{p}]})$$

Basta quindi scegliere nella (3.5) il vettore ψ_t in modo che si abbia

$$\psi_t = \varphi_t + \partial_t \varphi,$$

con φ funzione scalare arbitraria, perché sia $\bar{L}_{rs\dot{p}q\dots}^{i\dot{k}} = 0$.

In altre parole una connessione con tensore di curvatura della forma (3.4) in cui il tensore $\psi_{\dot{p}q}$ sia il rotore di un vettore covariante è equivalente rispetto alle trasformazioni (3.5) ad una connessione integrabile.

(5) Cfr. A. COSSU, Nota cit. nella ⁽¹⁾, p. 389.

(6) Cfr. A. COSSU, Nota cit. nella ⁽¹⁾, p. 381.

Geometria. — *Il teorema di Picard sulla regolarità del sistema aggiunto.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata^(*) dal Socio B. SEGRE.

E. Picard ha dimostrato, come egli dice « par une voie détournée », la regolarità del sistema aggiunto alle sezioni piane di una superficie algebrica⁽¹⁾. Poco dopo, F. Severi ha dato una dimostrazione geometrica di un teorema più generale: la regolarità del sistema aggiunto ad una curva irriducibile atta a definire un sistema continuo di grado maggiore di uno⁽²⁾.

Il teorema di Picard è equivalente alla seguente proprietà: la serie tagliata sulla generica C dalle aggiunte C' ad un sistema lineare $|C|$, almeno ∞^1 , ha la deficienza $q = p_g - p_a$. Vogliamo dare qui una dimostrazione di questo teorema facente uso soltanto della teoria dei sistemi lineari di curve⁽³⁾.

Consideriamo una superficie algebrica F dello spazio ordinario, dotata di singolarità normali (curva doppia nodale con punti tripli per la superficie e per la curva doppia); siano p_g il genere geometrico, p_a il genere aritmetico e $q = p_g - p_a$ l'irregolarità di F . Diciamo $|C_1|$ il sistema delle sezioni piane e $|D| = |hC_1|$ il sistema delle curve tagliate su F dalle superficie di ordine h . Sia inoltre $|C|$ un sistema lineare infinito le cui curve C tagliano le curve D in un numero $m > 0$ di punti.

È classico il seguente risultato⁽⁴⁾:

Si può scegliere h abbastanza grande per guisa che:

1° *L'aggiunto $|D'|$ di $|D|$ tagli sopra una generica curva D una serie di deficienza q ;*

2° *L'aggiunto $|(C+D)'|$ di $|C+D|$ tagli sopra una generica curva $C+D$ irriducibile una serie di deficienza $q = p_g - p_a$;*

3° *L'aggiunto $|(C+D)'|$ di $|C+D|$ tagli sopra una generica curva C una serie completa.*

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) PICARD, *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (« Journal de Crelle », 1905, Bd. 129, pp. 275-286); PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris 1906, tome II, p. 437.

(2) SEVERI, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica* (« Rendiconti della Accademia dei Lincei », 2° sem., 1908, pp. 465-470).

(3) Comunicata oralmente al V Congresso dell'Unione Matematica Italiana a Pavia (6-11 ottobre 1955).

(4) G. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (« Annali di Matematica », 1897, ser. 2, XXV); *Memorie Scelte*, Bologna 1937. Ved. il cap. II. Abbiamo ripreso la dimostrazione di questo teorema nella Nota *Remarques sur les systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface algébrique et sur un théorème de Picard* (« Bull. de l'Acad. roy. de Belgique », 1947, pp. 403-410).

Il sistema $|(C+D)'|$ ha allora la dimensione

$$p_a + \pi + \pi_0 + m - 2,$$

dove π è il genere delle curve C e π_0 quello delle curve D . Questo sistema taglia sopra una curva C una serie completa, di ordine $m + 2\pi - 2$, certamente non speciale poiché $m > 0$. Le curve del sistema $|(C+D)'|$ passanti per i punti di un gruppo (C, D) intersezione di una C e di una D tagliano, sopra la curva C , la serie canonica completa. Il passaggio di una curva $(C+D)'$ per un gruppo (C, D) impone dunque $m - 1$ condizioni a questa curva.

Consideriamo il sistema lineare delle curve $(C+D)'$ passanti per il gruppo (\bar{C}, \bar{D}) comune ad una curva generica \bar{C} di $|C|$ ed ad una generica curva \bar{D} di $|D|$. Questo sistema ha la dimensione $p_a + \pi_0 + \pi - 1$. Fra le curve di questo sistema, ve ne sono che contengono le curve \bar{C} e \bar{D} ; esse sono completate dalle curve canoniche di F . Dunque, esiste nel sistema $|(C+D)'|$ un sistema lineare di curve, che diremo $|K|$, passanti per il gruppo (\bar{C}, \bar{D}) , ma non contenenti generalmente come parte una curva canonica; il sistema $|K|$ ha infatti la dimensione $\pi + \pi_0 - q - 1$, e questa risulta maggiore di $p_g - 1$ non appena h sia sufficientemente grande.

Fra le curve K , vi sono curve spezzate nella curva \bar{D} ed in curve C' che non contengono \bar{C} come parte, e curve spezzate nella curva \bar{C} ed in curve D' che non contengono \bar{D} come parte.

Diciamo $|G_0|$ la serie di gruppi canonici di \bar{D} , di dimensione $\pi_0 - q - 1$, tagliata dalle aggiunte D' a \bar{D} e $|G|$ la serie di gruppi canonici di \bar{C} tagliata dalle aggiunte C' a \bar{C} . Questa serie ha una certa deficienza $\delta \leq q$ e quindi la dimensione $\pi - \delta - 1$.

Consideriamo $\pi_0 - 1$ punti generici della curva \bar{D} , che quindi non appartengono ad un gruppo G_0 ; essi appartengono ad un determinato gruppo canonico γ di \bar{D} . *A priori*, le curve K che passano per tali punti non contengono necessariamente gli altri punti del gruppo γ . Supponiamo che il passaggio per il gruppo γ imponga $\pi_0 - 1 + k$ condizioni alle curve K ($k \geq 0$). Allora le curve K passanti per γ formano un sistema lineare, H , di dimensione $\pi - q - k$.

Le curve K che passano per un ulteriore punto di \bar{D} contengono la curva \bar{D} come parte e sono pertanto completate dalle curve C' aggiunte a \bar{C} , le quali formano un sistema di dimensione $\pi - \delta - 1$. Si ha quindi

$$\pi - q - k - 1 = \pi - \delta - 1,$$

cioè $\delta = q + k$. Poiché $\delta \leq q$, $k \geq 0$, risulta $k = 0$ e $\delta = q$, sicché

Sopra la generica curva C , le aggiunte C' tagliano una serie di deficienza

$$q = p_g - p_a.$$

Così è dimostrato il teorema di Picard, senza uscire dalla geometria dei sistemi lineari.

Geometria. — *Sulla permutabilità di due trasformazioni della contiguità negli spazi topologici.* Nota di LUCIA CIARRAPICO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Sia dato un insieme di elementi qualsiasi per i quali sia definita una relazione di spazializzazione (o « contiguità ») tra i sottoinsiemi E , e gli elementi a di K , soddisfacente ai due seguenti assiomi:

$$(I) \quad \begin{cases} \rho E = \bar{E} \supset E \\ \rho(\emptyset) = (\bar{\emptyset}) = \emptyset \end{cases}$$

dove con il simbolo \supset si intende « minore od uguale » (\bar{E} ed E possono cioè essere anche coincidenti).

Chiameremo tale spazio S spazio topologico generale.

L. Geymonat nelle sue due Note *Su di un metodo per lo studio degli spazi astratti molto generali* e *Sulla combinazione di due caratteristiche trasformazioni della contiguità negli spazi topologici* ha introdotto altre due relazioni di spazializzazione che ha indicate con $\overset{*}{\rho}$ e $\hat{\rho}$, l'una detta « relazione coniugata di ρ » e l'altra « relazione aggregata di ρ ».

La prima, $\overset{*}{\rho}$, che dà luogo allo spazio \hat{S} (detto coniugato di S), è legata alla ρ mediante la seguente relazione di coniugio:

$$(2) \quad \begin{cases} \overset{*}{\rho} E = \rho E = \emptyset & \text{se } E = \emptyset \\ \overset{*}{\rho} E = C(\rho E - E) = C(\bar{E} - E) & \text{se } E \neq \emptyset \end{cases}$$

dove con $C(E)$ si intende, come al solito, l'insieme complementare di E rispetto a K .

La seconda, $\hat{\rho}$, che dà luogo allo spazio $\hat{\hat{S}}$, si ottiene invece mediante la trasformazione di aggregazione:

$$(3) \quad \begin{cases} \hat{\rho} E = \rho E = \emptyset & \text{se } E = \emptyset \\ \hat{\rho} E = \sum_i \rho E_i & \text{se } E \neq \emptyset \end{cases}$$

dove la sommatoria va estesa a tutti gli E_i che sono sottoinsiemi propri od impropri (1) di E .

Dalla Nota di L. Geymonat sappiamo che: $\hat{\hat{S}}$ risulta essere uno spazio V (2); tale trasformazione di aggregazione applicata ad uno spazio V si riduce all'identità, cioè $\hat{\hat{S}}_V = S_V$; due spazi S ed S' , tra loro diversi ma coinci-

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) Intendo per sottoinsieme improprio l'insieme E stesso solamente.

(2) S si dice uno spazio V se è soddisfatto, per E, F sottoinsiemi qualsiasi di S , il seguente assioma (di non-decrescenza):

$$\bar{E} \subset \overline{(E + F)}.$$

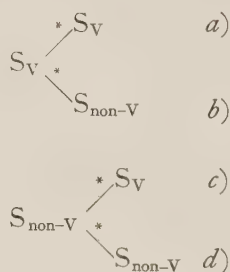
denti come insiemi di punti, possono dar luogo al medesimo spazio aggregato (in particolare S e \widehat{S} hanno lo stesso spazio aggregato, cioè $\widehat{S} = \widehat{\widehat{S}}$).

L. Geymonat ha poi esaminato gli spazi ottenibili da S , applicando due volte, nei due possibili ordini, le trasformazioni del coniugio e dell'aggregazione, ed ha fatto vedere come in generale \widehat{S}^* ed \widehat{S}^* non coincidano.

Nella presente Nota si determinano innanzitutto (n. 2), gli spazi S per cui \widehat{S}^* ed \widehat{S}^* coincidono; essi sono tutti e soli gli spazi V il cui coniugato è ancora uno spazio V . Si studiano poi (n. 3) gli spazi che si ottengono da uno spazio S applicando alternatamente un certo numero di volte le trasformazioni della aggregazione e del coniugio.

2. Osserviamo preliminarmente che \widehat{S} (come spazio aggregato) risulta essere uno spazio V , per cui tale deve essere anche \widehat{S}^* , e poiché \widehat{S} è uno spazio V , si ha che esso deve essere uno spazio V che si trasforma in V mediante il coniugio, cioè una S_{VB} ⁽³⁾ (e un S_{VB} deve risultare \widehat{S}^* e quindi anche \widehat{S}). Dobbiamo dunque cercare gli spazi dai quali, mediante la trasformazione di aggregazione, si ottengono degli S_{VB} : tra questi sono gli spazi richiesti.

Possiamo dividere gli spazi S , in S_V ed S_{non-V} ed in ognuno dei due casi distinguere quelli che danno mediante il coniugio un S_V od un S_{non-V} .



(a) Gli S_V che danno luogo mediante il coniugio a spazi S_V (S_{VB}) sono tra gli spazi richiesti. Infatti ricordando che la relazione di aggregazione lascia inalterati gli spazi V , e quindi anche gli S_{VB} , risulta che

$$\widehat{S_{VB}} = S_{VB}, \quad \text{per cui} \quad \widehat{S_{VB}}^* = S_{VB}^*.$$

D'altra parte S_{VB}^* è uno spazio V , per cui

$$\widehat{S_{VB}^*} = S_{VB}^*,$$

(3) Un S_{VB} è uno spazio V il cui coniugato è ancora uno spazio V . Per la loro classificazione, vedi la mia precedente Nota [3].

e da ciò segue che

$$\hat{\hat{S}}^* = \hat{S}^* = \dot{S}^*.$$

Dimostreremo ora che questi sono gli unici spazi per cui vale tale proprietà.

(b) Gli S_V che danno luogo per coniugio ad $S_{\text{non-V}}$ non rientrano in tale categoria, in quanto per essi: $\hat{S}_V = S_V$, per cui $\hat{\hat{S}}^* = \dot{S}^*$, e tale \dot{S}^* è non-V, mentre, se $\hat{\hat{S}}^* = \hat{S}^*$, \hat{S}^* deve essere uno spazio V, come si è detto all'inizio. Non può quindi essere $\hat{\hat{S}}^* = \dot{S}^*$.

(c) Neppure per gli $S_{\text{non-V}}$ che danno mediante il coniugio S_V vale tale proprietà. Infatti \dot{S} risulta essere uno spazio V per cui $\hat{\hat{S}}^* = \dot{S}^*$. Ora poiché $\hat{\hat{S}}^*$ deve essere un S_{VB} , tale deve essere anche \dot{S}^* che coincide con esso; ma un S_{VB} è il coniugato di un S_{VB} , mentre lo spazio di partenza è per ipotesi non-V.

(d) Restano ora da esaminare gli $S_{\text{non-V}}$ che danno mediante il coniugio $S_{\text{non-V}}$. Lo spazio che noi cerchiamo deve avere una spazializzazione tale, che lo spazio che si ottiene da esso mediante la relazione di aggregazione, deve essere un S_{VB} (cioè uno spazio tale, per cui fissato un particolare insieme H, la chiusura di un qualunque insieme E è $E + H$) ⁽⁴⁾.

Osservando ora che la chiusura di un punto rimane inalterata, qualunque essa sia, quando si applichi la relazione di aggregazione, si ha che detto H lo spazio particolare di $\hat{\hat{S}}$, la spazializzazione dello spazio iniziale deve soddisfare alle seguenti condizioni:

$$\text{se } P \subset H \quad \text{si ha } \hat{P} = H \quad \text{e poiché } \bar{P} = \hat{P}$$

si ha anche

$$a) \quad \bar{P} = H;$$

così per un qualunque punto Q non contenuto in H si ha

$$b) \quad \bar{Q} = Q + H.$$

Considerato poi un insieme $E \subset H$, dovendo essere $\hat{E} = H$, ed essendo $\bar{E} \subset \hat{E}$, deve essere

$$c) \quad \bar{E} \subset H;$$

così, per lo stesso motivo, se $F \subset \bar{H}$ deve essere

$$d) \quad \bar{F} = F + T_1 \quad \text{e} \quad \overline{E + F} = E + F + T_2$$

con T_1 e T_2 contenuti in H o coincidenti con esso (eventualmente vuoti).

D'altra parte anche $\hat{\hat{S}}$ deve essere un S_{VB} , per cui \dot{S} deve avere una spazializzazione soddisfacente alle condizioni predette con un H' eventualmente

(4) Per questo risultato, vedi ancora [3].

diverso da H . Si ha anzi che H' è uguale al complementare di H in quanto $\hat{S} = \hat{S}^*$; infatti si passa da \hat{S} ad \hat{S}^* mediante il coniugio ed essendo questi due spazi S_{VB} , sappiamo che tale relazione muta lo spazio particolare H nel suo complementare.

Posto $R = C(H) = K - H$ si ha che

$$\hat{E} = C(\bar{E} - E) = E + R + Z \quad \text{con } Z \subset H \quad \text{e quindi} \quad C \vdash R.$$

Poiché abbiamo detto che \hat{S} deve soddisfare ad $a) \ b) \ c) \ d)$, dove al posto di H si sia sostituito R , si ha che E deve aver come chiusura se stesso più una parte contenuta in R (oppure tutto R), per cui l'insieme Z deve essere insieme vuoto. Da ciò segue che $\bar{E} = H$.

Analogamente si dimostra che $\bar{F} = F + H$ ed $\bar{E} + \bar{F} = F + H$.

Uno spazio avente una tale spazializzazione non può essere non- V , in quanto in esso vale sempre la relazione di non-decrescenza, quindi anche quest'ultimo tipo di spazio è da scartare. Si vede anzi che la chiusura di ogni insieme E è $E + H$, cioè che tale spazio è un S_{VB} .

Si conclude pertanto con il seguente teorema:

«Condizione necessaria e sufficiente affinché, applicando ad uno spazio S prima il coniugio e poi l'aggregazione, ovvero prima l'aggregazione e poi il coniugio, si abbia uno stesso spazio, cioè affinché sia $\hat{S} = \hat{S}^*$, è che tanto S quanto il suo coniugato siano degli spazi V , cioè che S sia un S_{VB} ».

3. Si può, variando il numero delle aggregazioni e dei coniugi, applicandoli però alternatamente (e cioè prima il coniugio, poi l'aggregazione, poi il coniugio, e così via, e viceversa), proporci di vedere in quali casi i due spazi che si ottengono facendo tali applicazioni in numero uguale ma in ordine opposto, siano uguali.

Se facciamo un numero dispari di tali applicazioni (se ad esempio consideriamo \hat{S}^* ed \hat{S}^*), qualunque sia la spazializzazione iniziale, non si otterranno mai spazi uguali. Infatti ricordando che l'aggregazione non altera la chiusura dei singoli punti, si ha (per esempio $\hat{P}^* = \hat{P}^*$) che su P opera solo il coniugio. Se ora si fanno un numero dispari di applicazioni, si ha che in un caso si applicano a P un numero dispari di coniugi, e nell'altro un numero pari, e poiché un numero pari di coniugi dà la spazializzazione iniziale (per esempio $\hat{P}^* = P$), mentre un numero dispari dà come chiusura di P quella coniugata (ad esempio $\hat{P}^{**} = \hat{P}$), non potranno essere le chiusure di P uguali, e quindi i due spazi saranno senz'altro diversi.

Se invece si fanno un numero pari di applicazioni si può affermare che se lo spazio iniziale è un S_{VB} certamente i due spazi che si ottengono sono uguali: infatti, se lo spazio è un S_{VB} , V è anche lo spazio che si ottiene mediante il coniugio, e poiché l'aggregazione lascia inalterati gli spazi V , opera solamente il coniugio, per cui si ottengono due spazi cui si è applicato il coniugio un certo numero uguale di volte e quindi due spazi uguali.

In generale però, questo non è l'unico tipo di spazio per cui vale tale proprietà (come avviene invece nel caso che si applichi il coniugio e l'aggregazione una volta sola). Se ad esempio si considerano gli spazi che si ottengono ripetendo due volte la coppia di trasformazioni $\hat{\wedge}^*$, o due volte la coppia $\hat{\wedge}$, si possono avere spazi uguali anche tra i V che hanno per coniugati spazi non- V , o tra gli spazi non- V che hanno invece per coniugati spazi V , con una opportuna scelta della spazializzazione iniziale. Infatti ad esempio nel primo caso (spazi $V \rightarrow$ spazi non- V) poiché S è V , $\hat{S} = S$ per cui $\hat{S}^{\wedge^*} = \hat{S}^{\wedge^*}$. Affinché sia $\hat{S}^{\wedge^*} = \hat{S}^{\wedge^*}$ occorre che sia $\hat{S}^{\wedge^*} = \hat{S}^{\wedge^*}$ e ciò si può ottenere se e solo se \hat{S}^{\wedge^*} è uno spazio V (in tal caso l'aggregazione non apporta alcuna trasformazione); ma allora \hat{S} deve essere un S_{VB} , cioè \hat{S} deve avere una spazializzazione soddisfacente alle condizioni a) b) c) d). Ciò porta che per la spazializzazione iniziale si deve avere:

$$a') \quad \bar{P} = P + R$$

$$b') \quad \bar{Q} = R$$

$$c') \quad \bar{E} = E + R + T_1$$

$$d') \quad \bar{F} = R + T_2 \quad \overline{E + F} = E + R + T_3$$

dove $R = C(H)$ e $T_i CH$ ($i = 1, 2, 3$), eventualmente vuoto. Ma è sempre possibile in uno spazio V che si trasformi in uno spazio non- V (che è poi un qualunque spazio V esclusi gli S_{VB}) una spazializzazione tale da soddisfare a tali condizioni. Si vede così che gli S_{VB} non sono i soli spazi che godono della detta proprietà.

Solo per gli S_{VB} si ha però che, ripetendo un numero pari di volte la coppia di trasformazioni $\hat{\wedge}^*$ o la coppia $\hat{\wedge}$ (cioè facendo $2n$ applicazioni con n pari, di coniugi e di aggregazioni) noi ci troveremo ricondotti allo spazio S di partenza, mentre ripetendo un numero dispari di volte tali coppie (cioè facendo $2n$ applicazioni con n dispari) si otterrà lo spazio coniugato di S (\hat{S}). Che gli S_{VB} diano in un caso S e nell'altro \hat{S} è ovvio: si tratta dell'applicazione di un numero pari o dispari di coniugi. Supponiamo invece di fare un numero pari di applicazioni di coppie di trasformazioni e di essere ricondotti in ambedue i casi allo spazio S di partenza: dimostreremo allora che lo spazio di partenza deve essere un S_{VB} . Per fare ciò basta ripetere la dimostrazione fatta da L. Geymonat nel caso più semplice che si applichi la coppia di trasformazioni solo due volte; si trova che dovendo essere S uguale allo spazio finale, deve essere uno spazio V . Applicando ora ad ambo i membri dell'uguaglianza $S = \hat{S}^{\wedge^* \wedge^*}$ la trasformazione del coniugio, si ha che $S = \hat{S}^{\wedge^* \wedge^*}$ e ciò ci dice che anche \hat{S} deve essere V , cioè che S è un S_{VB} .

Supponiamo ora di fare un numero dispari di applicazioni (di coppie di trasformazioni) e di ottenere:

$$\hat{S}^{\wedge \cdots \wedge} = \hat{S}^{* \cdots *} = \hat{S}^*.$$

La prima di queste uguaglianze ci dice che \hat{S} è uno spazio V . Applicando poi ad ambo i membri della seconda uguaglianza la trasformazione del coniugio si ottiene:

$$\hat{S}^{* \cdots *} = \hat{S}^* = S$$

e ciò ci dice che anche S è V , e cioè che è un S_{VB} .

BIBLIOGRAFIA.

- [1] L. GEYMONAT, *Su di un metodo per lo studio degli spazi astratti molto generali* (« Rend. di Mat. e delle sue appl. », ser. V, vol. XII, fasc. 3-4, Roma 1953).
- [2] L. GEYMONAT, *Sulla combinazione di due caratteristiche trasformazioni della contiguità degli spazi topologici* (Ibidem, serie V, vol. XIV, fasc. 1-2, Roma 1954).
- [3] L. CIARRAPICO, *Sugli spazi topologici generali soddisfacenti ad un assioma di non-crenza ristretto* (Ibidem, serie V, fasc. 3-4, vol. XIII, Roma 1955).

Astronomia. — *La fase decrescente dell'ultimo ciclo solare secondo le misure effettuate nell'Osservatorio Astronomico di Roma.* Nota II di TERESA FORTINI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

La presente Nota, in cui sono espone alcune considerazioni e le principali caratteristiche della fase decrescente del ciclo solare 1944-54, secondo le fotografie solari quotidianamente eseguite a Monte Mario (Roma), fa seguito a una mia prima Nota sullo stesso argomento apparsa recentemente in questi « Rendiconti » (**). Come abbiamo già detto, le fotografie solari vengono da noi eseguite ogni giorno sereno con la grande camera orizzontale Askania dell'Osservatorio di Monte Mario.

6. Per quanto ottenuti in maniera del tutto diversa, i numeri di Wolf, detti anche numeri relativi, e le aree delle macchie solari, sono indici di una stessa manifestazione dell'attività solare e quindi sono connessi tra loro. In proposito, M. Waldmeier ⁽⁶⁾, con le osservazioni di un intero ciclo ha rica-

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(**) Cfr. T. FORTINI, *La fase decrescente, ecc.* Nota I. Questi « Rendiconti », serie VIII, vol. XIX, pp. 131-136 (1955).

(6) Cfr. WALDMEIER, *Ergebnisse und Probleme der Sonnenforschung*. (Leipzig, Akademische Verlag, Astron. Gesellschaft).

vato la seguente relazione di carattere statistico, e che ha un valore soltanto approssimato:

$$(1) \quad A = 16,7 R$$

dove con R sono indicati i numeri relativi della serie di Zurigo e con A le aree delle macchie espresse in milionesimi della semisfera solare. L'analoga relazione che ho ottenuto in base alle due serie di misure di aree A delle macchie fotografate a Monte Mario e dei numeri R di Wolf pure osservati a Monte Mario e ridotti alla scala internazionale, è la seguente:

$$(2) \quad A = 14,1 R$$

anche essa naturalmente approssimata e di carattere statistico, ma che non differisce molto dalla (1) che Waldmeier ha ricavato del resto in base a un intero ciclo.

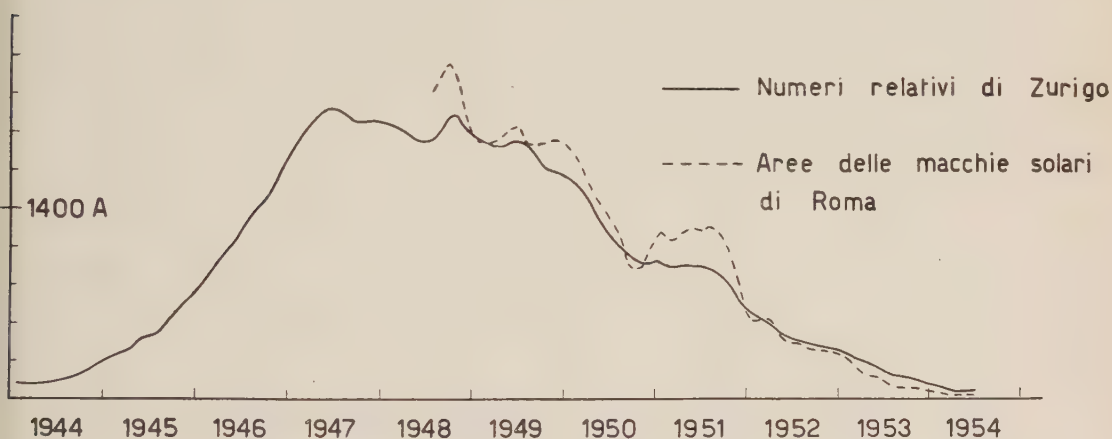


Fig. 3. - (Andamento del ciclo solare 1944-54 secondo i numeri di Zurigo e le aree delle macchie solari determinate a Roma ⁽⁷⁾).

7: La corrispondenza tra la serie internazionale dei numeri relativi R e quella delle aree (in milionesimi della semisfera) delle macchie solari secondo i rilievi di Roma, è abbastanza evidente dal confronto delle due curve riportate in fig. 3. La curva a tratto pieno segue l'andamento dell'intero ciclo secondo i numeri relativi osservati a Zurigo, mentre quella tratteggiata (disegnata soltanto per la fase di diminuzione), è stata da me ottenuta con le misure delle aree delle macchie solari, fotografate a Monte Mario (Roma)

(7) Osservando le due curve della figura e tenendo conto delle epoche dell'inizio (1944,2) e di quella (1947,5) del massimo del ciclo di frequenza 1944-1954, si vede come la durata della fase di ascesa è di appena 3,3 anni, mentre la durata della fase di diminuzione è di 6,9 anni. Questa grande asimmetria rispetto al massimo, come pure la breve durata del ciclo, sono le caratteristiche dei cicli a massimo molto elevato come quello in questione; il massimo da esso raggiunto è uno dei più alti di quelli finora conosciuti.

ed espresse sempre in milionesimi della semisfera. Per eliminare fluttuazioni che possano nascondere l'andamento generale del decorso, i valori riportati in grafico, per ogni mese, sono stati da me dedotti dalla media pesata di 13 mesi, e cioè del mese in questione, dei sei mesi che lo precedono e dei sei che lo seguono; a tutti i mesi, meno che ai due più lontani, è stato dato un peso doppio. I dati riguardanti le osservazioni romane delle aree, così ridotte, sono elencati nella Tabella II; mentre i corrispondenti valori dei numeri relativi della serie internazionale, sono pubblicati nelle «Astro-nomische Mitteilungen di Zurigo» ⁽⁸⁾.

TABELLA II.

(Aree delle macchie solari fotografate a M. Mario dal luglio 1948 al giugno 1954 espresse in milionesimi della semisfera).

	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954
1		1893	1842	1129	568	315	47
2		1886	1754	1185	578	251	40
3		1906	1628	1196	561	214	31
4		1936	1522	1250	496	177	25
5		1989	1427	1270	442	171	26
6		1968	1346	1265	424	136	33
7	2268	1890	1260	1274	408	96	
8	2370	1872	1107	1266	381	86	
9	2466	1887	973	1195	366	88	
10	2384	1898	964	1058	358	82	
11	2164	1928	1040	859	350	66	
12	1981	1896	1187	656	338	55	

8. Per quanto riguarda le posizioni delle macchie solari, le zone di attività, con il progredire del ciclo, si sono andate spostando verso l'equatore, come è previsto dalla legge di Spoerer. Secondo le fotografie di Monte Mario, le latitudini eliocentriche medie delle zone più attive per i diversi anni e per i due emisferi solari sono state le seguenti:

	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954
Emisfero boreale .	14°,7	13°,6	14°,2	11°,4	10°,0	8°,6	8°,0
Emisfero australe	— 13°,1	— 12°,4	— 11°,5	— 9°,0	— 8°,8	— 5°,9	— 3°,0

(8) Cfr. M. WALDMEIER, «Astron. Mitt. Zürich», n. 172, p. 216 e n. 193, p. 121.

TABELLA III.

Coordinate eliografiche ed aree delle macchie solari.

N. Roma	Rotazione	L ϕ Roma	Area Massima Roma	Classifica Zurigo
128	1267	282° + 10°	2400	FG
167	1268	268 + 10	1600	G
189	1269	269 + 13	1100	E
216	1270	273 + 12	480	DCJ
235	1271	253 + 13	1400	CE
266	1272	260 + 8	—	EFGH
281	1273	232 — 8	370	E
285	1274	237 — 9	400	HGH
307	1275	238 — 3	240	J
321	1276	237 — 8	1800	EF
354	1277	241 — 7	200	HGHJ
298	1274	62 + 26	200	J
318	1275	60 + 22	1800	EF
340	1276	54 + 22	1300	HE
359	1277	44 + 25	1000	H
374	1278	37 + 25	530	ECBA
749	1303	61 + 8	700	E
750	1304	77 + 15	1200	H
758	1305	90 + 10	2050	F
765	1306	85 + 11	4450	F
779	1307	87 + 13	1400	ECE
788	1308	89 + 12	200	DCJ
770	1306	1 — 13	400	J
783	1307	0 — 12	3700	F
794	1308	26 — 8	1800	EGH
795				
810	1309	31 — 7	300	JHJ
816	1310	3 — 7	130	JA

9. Insieme a questo riassunto complessivo sull'andamento del ciclo solare ora terminato, può interessare qualche rilievo sul comportamento dei singoli gruppi di macchie, tra cui moltissimi hanno raggiunto dimensioni notevoli e una durata dell'ordine di due rotazioni solari. Le curve del loro sviluppo e della loro decrescenza non hanno presentato di solito massimi secondari, come pure i loro spostamenti in longitudine sono avvenuti quasi sempre nel senso della rotazione solare. La loro evoluzione, secondo il tipo assunto rispetto alla classifica di Zurigo ⁽⁹⁾ è avvenuta generalmente nell'ordine stesso della classifica (A-B-C-D-E-F-G-H-J) secondo gli schemi proposti da Kiepenheuer ⁽¹⁰⁾.

Negli anni di maggiore attività, dal 1948 al 1951, altri gruppi (le cui caratteristiche, per cinque di essi molto notevoli sono riportate nella Tabella III) si sono invece distinti oltre che per la eccezionale estensione da essi raggiunta (fino a 4500 milionesimi della semisfera, secondo le mie misure) anche per la loro durata (da tre a sei rotazioni solari) e per i forti spostamenti in longitudine, avvenuti in alcuni casi anche in senso contrario alla rotazione solare. Essi hanno presentato caratteri di intermitenza, sia per l'area ricoperta (raggiungendo nella loro vita diversi massimi, separati anche da minimi piuttosto bassi), come anche per aver seguito più volte il corso dell'evoluzione dei gruppi a durata più breve, secondo gli schemi di cui ho parlato sopra.

Per i cinque gruppi molto notevoli, nella Tabella III sono dati: nella I colonna i numeri con cui essi sono stati elencati secondo le osservazioni fotografiche di Monte Mario; nella II colonna l'epoca in cui sono stati osservati, indicata a mezzo della rotazione solare della loro comparsa; nella III colonna le coordinate eliografiche (longitudine L e latitudine φ) secondo le osservazioni di Monte Mario e nella IV colonna l'area massima raggiunta (sempre secondo le osservazioni di Monte Mario) per il periodo in cui sono stati visibili durante ogni rotazione. Nella V colonna ho riportato invece la classifica dei vari gruppi secondo le osservazioni di Zurigo, le quali essendo più numerose di quelle di Roma, possono dare una indicazione più completa per quanto soltanto approssimata, del corso della loro evoluzione.

Esaminando la tabella, risulta evidente il comportamento che ho sopra indicato. Così per esempio il primo gruppo ha subito complessivamente uno spostamento in longitudine di 22° in senso contrario alla rotazione solare e la sua area ha avuto due massimi, separati da un minimo di 480 milionesimi della semisfera solare.

(9) Cfr. WALDMEIER, « Pub. Zürich Obs. », 9, 1.

(10) Cfr. KIEPENHEUER, *Solar Activity*, in *The Sun* University Chicago Press.

Astronomia. — *Sulla variabilità del raggio solare.* Nota di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Come è noto, dal 1876 al 1937, all'Osservatorio del Campidoglio (Roma), si eseguirono, ogni giorno, misure sistematiche del diametro orizzontale del Sole al suo passaggio in meridiano; conservando per tutto il suddetto periodo di anni, lo stesso strumento e lo stesso metodo di osservazione. E precisamente, al momento del passaggio al meridiano, il disco solare, molto ingrandito, (circa 50 cm. di diametro), veniva proiettato sopra uno schermo bianco insieme con i fili del micrometro del cannocchiale meridiano; e tre o quattro osservatori determinavano, ciascuno per suo conto, i momenti di appulso dei due bordi solari ai sette fili orari del micrometro stesso.

Una accurata riduzione sull'insieme di queste misure (che comprendono un totale di 31.200 passaggi osservati) fu eseguita dal compianto prof. L. Gialanella, che mise in evidenza ⁽¹⁾ delle variazioni del diametro solare; ma, poiché tali variazioni non sembravano allora spiegabili in base alla teoria sulla costituzione fisica dell'astro, furono ritenute da molti astronomi come apparenti; e cioè originate da diverse cause concomitanti, quali fenomeni atmosferici, mancata compensazione degli errori di osservazione ecc.

Recentemente però, due fatti sono venuti a portare nuovo interesse al problema mostrando la realtà del fenomeno. E cioè, e la scoperta dei campi magnetici stellari, variabili periodicamente, e la dimostrazione data dal prof. M. Cimino ⁽²⁾ che *le osservazioni capitoline del diametro solare sono rappresentabili con due sole oscillazioni*, di cui la principale ha un periodo di ventidue o ventitre anni, uguale cioè a quello del ciclo delle macchie solari, mentre l'altra secondaria ha un periodo di circa sette anni.

2. Per avere una ulteriore conferma sulla variabilità del globo solare, la scrivente ha poi ridotto e analizzato le misure dei diametri solari orizzontali ⁽³⁾ e verticali ⁽⁴⁾, eseguiti a Greenwich dal 1851 al 1937.

Ivi le osservazioni furono eseguite da una sola persona per volta; ma molti astronomi si succedettero in tale compito dal 1851 al 1937, sicché si può rite-

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) L. GIALANELLA, *Le variazioni del diametro solare nel sessantennio 1876-1937, secondo le osservazioni eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio*, in «Comm. Pont. Ac. Scientiarum», vol. VI, n. 25 e «Contributi Scient. dell'Osserv. di Monte Mario», n. 109.

(2) M. CIMINO, *Una oscillazione ventiduennale del diametro solare*, in «Comm. Pont. Ac. Scientiarum», vol. VIII, n. 17 e «Contr. Scient. dell'Osserv. di Monte Mario», n. 122.

(3) M. A. GIANNUZZI, *Riduzione delle osservazioni dei diametri solari orizzontali, osservati a Greenwich, dal 1851 al 1937... ecc.*, in «Mem. Soc. Astr. Ital.», vol. XXIV, n. 3 e «Contr. Sc. Monte Mario», n. 190.

(4) M. A. GIANNUZZI, *Riduzione delle osserv. dei diam. solari verticali... ecc.*, in «Mem. Soc. Astr. Ital.», vol. XXVI e «Contr. Sc. Monte Mario», n. 220.

nere che gli errori personali siano compensati abbastanza sufficientemente. Inoltre le determinazioni dei valori dei diametri orizzontali e verticali, eseguite nello stesso tempo, sono indipendenti fra loro: essendo ricavati il primo dal tempo impiegato dal passaggio del disco solare al meridiano, ed il secondo dalla differenza di declinazione tra il bordo Nord e quello Sud dell'astro.

La mia analisi condotta separatamente per i due gruppi di misure di Greenwich (di cui 10.155 per i diametri orizzontali e 10.978 per i verticali) mi mostrò innanzi tutto una lieve ma progressiva diminuzione dei valori; onde dal 1890 circa in poi, gli assi medi non erano più rappresentati da rette parallele alle ascisse, bensì inclinate su di esse. Corrette poi le misure per questa diminuzione progressiva, che chiamai « tendenza secolare » e che ho attribuito ad una aumentata opacità dell'atmosfera di Greenwich, mi è stato possibile (come per la curva romana) di *rappresentare le variazioni dei diametri solari orizzontali e verticali di Greenwich con due sole oscillazioni ciascuna, aventi lo stesso periodo di quelle trovate al Campidoglio*: e cioè la principale di ventitre anni circa e la secondaria di sette.

Mi propongo dunque in questa Nota, confrontare i risultati ottenuti dalle misure capitoline, con quelli ricavati dalle misure di Greenwich.

3. Nella figura 1 ho riportata la rappresentazione della curva romana dei raggi solari orizzontali, come è stata data da M. Cimino e come è pubblicata nelle « Commentationes » della Pontificia Academia Scientiarum, vol. VIII, n. 17. La linea tratteggiata indica la curva osservata e perequata per eliminare fluttuazioni biennali e la linea a tratto pieno è la somma della oscillazione principale (I) e della secondaria (II).

Analogamente nella fig. 2, sono date le rappresentazioni dei raggi orizzontali e verticali, determinati dalla scrivente sopra le osservazioni di Greenwich, ricordando che le linee tratteggiate sono le curve osservate perequate e corrette, come già abbiamo detto, della « tendenza secolare ». Le linee a tratto pieno sono ottenute sommando le rispettive oscillazioni I e II.

L'asse medio è diverso per ciascuna curva, (in particolare un poco più alto per quella capitolina), poiché essendo stati usati metodi e strumenti di misura del tutto indipendenti, ed essendo diversa la trasparenza atmosferica, il valore dello zero non è risultato coincidente. Ma quello che a noi importa non è il valore assoluto del raggio solare, bensì le sue fluttuazioni rispetto ad una misura media.

Come si vede dalle figure, la curva romana è rappresentata da quella calcolata (e cioè dalla somma delle oscillazioni I e II) più esattamente delle due curve di Greenwich; indubbiamente l'accuratezza con cui è stato possibile calcolare e tener conto degli errori personali degli astronomi romani, ha permesso di tracciare le variazioni del raggio solare, a Roma, con più precisione che a Greenwich. Tuttavia, pur se le curve da me calcolate per Greenwich si discostano in qualche punto, per altezza di ordinate, da quelle osservate, è interessante notare come esse invece ne seguano concordemente lo stesso andamento, rappresentando le diverse alternazioni dei massimi e dei minimi.

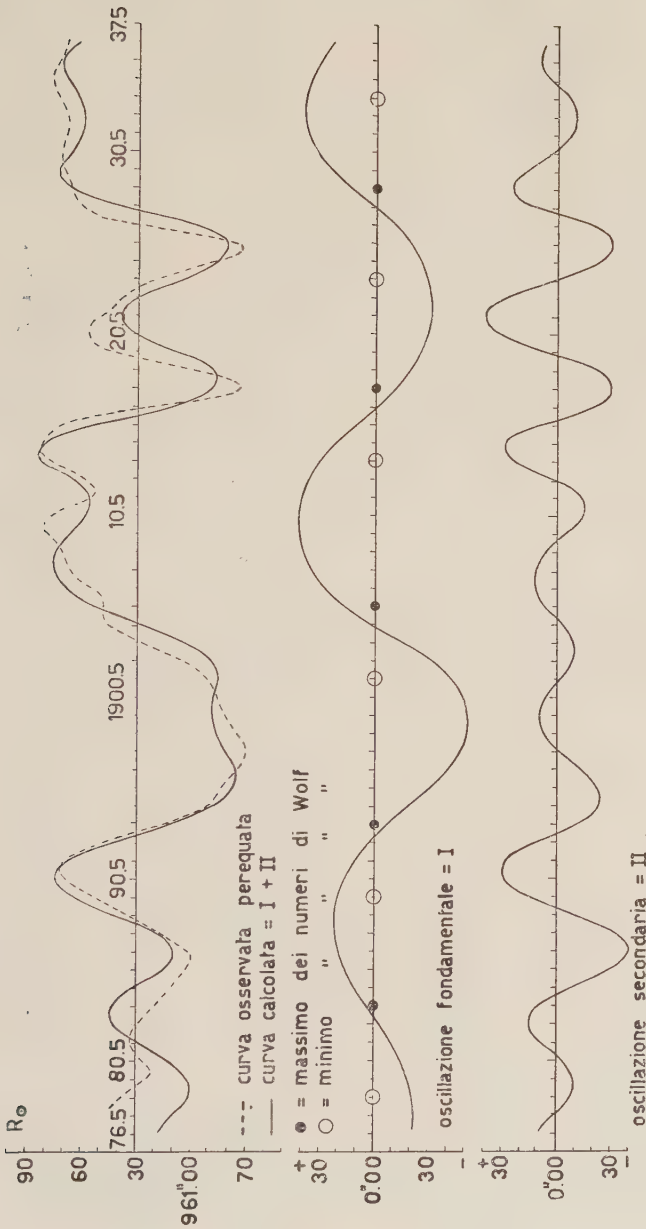
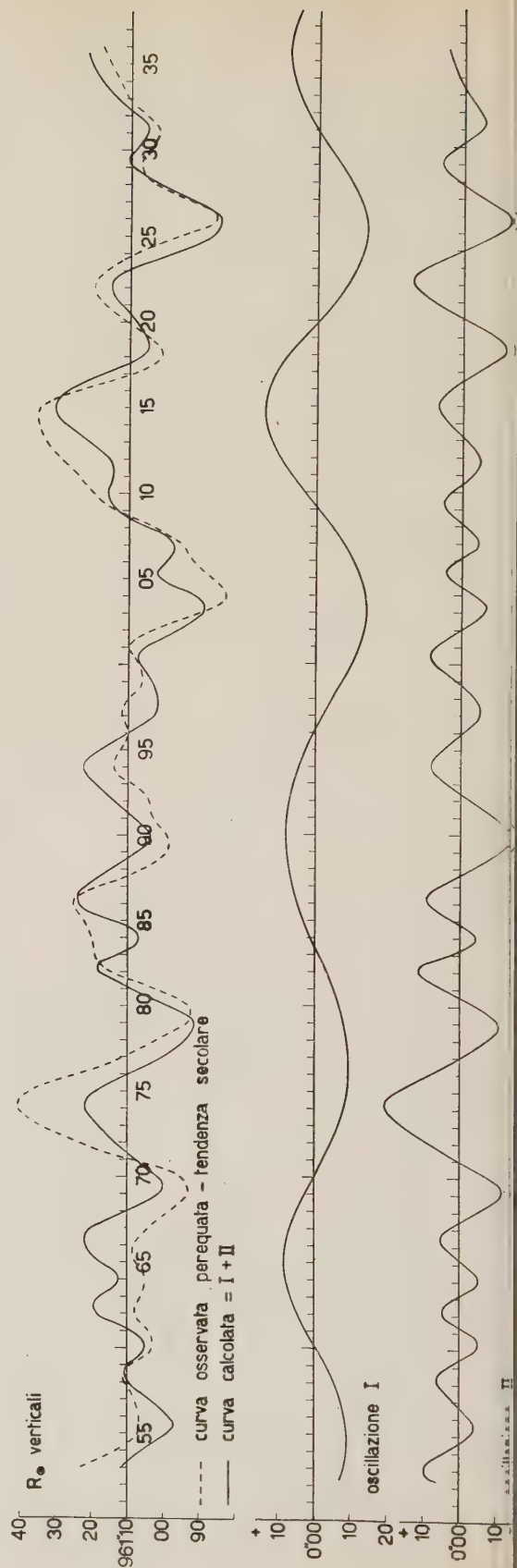
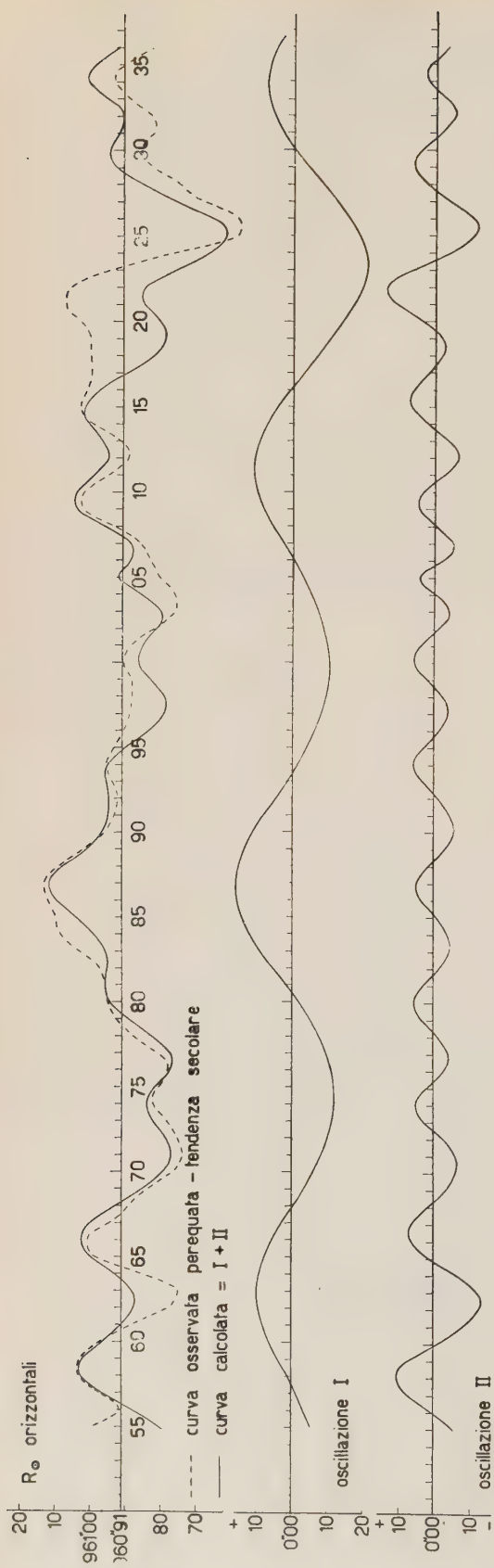


Fig. 1. - Raggi solari orizzontali osservati a Roma.



Più particolarmente il confronto mi ha mostrato che le sinusoidi riguardanti i diametri solari *orizzontali* misurati sia a Roma che a Greenwich, sono in concordanza di fase; od almeno, il divario esistente talora, per l'epoca esatta del massimo o minimo valore, è sempre esiguo, non in uno stesso senso, e può quindi ritenersi dovuto ad una insufficiente precisione delle misure. L'onda riguardante i diametri *verticali* è invece in ritardo di fase di due o tre anni, rispetto a quella dei raggi orizzontali. Infine, secondo le misure inglesi, l'ampiezza di queste oscillazioni, sembrerebbe variare tra $0'',1$ e $0'',2$; mentre, secondo le osservazioni capitoline, essa sarebbe maggiore e cioè compresa tra $0'',2$ e $0'',5$.

Diamo ora un breve cenno sulle oscillazioni secondarie che abbiamo indicato con II.

Tanto a Roma che a Greenwich, esse presentano lo stesso andamento, caratterizzato da rapidi innalzamenti e smorzamenti, e identico periodo medio, di sette anni circa; ma mentre le due onde ricavate dalle osservazioni di Greenwich (fatta esclusione per qualche anno anteriore al 1880 e povero di osservazioni), sono in accordo di fase, esse non concordano invece con l'oscillazione secondaria ricavata a Roma. Ciò mi fa supporre che tali onde secondarie II siano da attribuirsi a fenomeni atmosferici; i quali – come è noto – hanno andamento pseudoperiodico e presentano delle variazioni rapide e spesso molto accentuate.

4. L'ipotesi della variabilità del globo solare pare dunque trovare un'altra conferma, dalla concordanza delle misure di Roma con quelle di Greenwich; e ciò tanto più che il periodo delle oscillazioni principali si riscontra in molti altri fenomeni solari.

È noto infatti, che oltre alle macchie, anche le protuberanze solari hanno una attività in estensione e frequenza, con periodo oscillante intorno ai ventidue o ventitre anni ⁽⁵⁾. Considerando poi i moti divergenti che animano le singole macchie in un gruppo ed i loro moti propri in latitudine, Brunner ⁽⁶⁾ per il primo fenomeno e Tuominen ⁽⁷⁾ per il secondo, ottennero dei risultati che mostrano come sia fondamentale il ciclo di ventidue anni circa. Ma più importante ancora è la legge di polarità delle macchie, per cui le macchie di un ciclo undecennale, hanno polarità opposta a quelle del ciclo precedente; ciò che mostra che il vero periodo dell'attività solare è di ventidue o ventitre anni circa.

Ciò posto, se si tiene conto dei numeri relativi di Wolf sulla frequenza delle macchie, si può dire che i minimi maculari avvengono all'incirca in vicinanza delle epoche in cui il raggio solare orizzontale tocca i suoi valori più alti o più bassi; mentre i massimi si trovano intorno alle epoche in cui la

(5) L. TAFFARA, in «Mem. Soc. Astr. Ital.», vol. IV.

(6) N. BRUNNER, *Beiträge zur Kenntnis gewisser Eigenbewegungen in Sonnen-flecken-gruppen*, in «Publ. Zürich Obs.», vol. V, n. 1.

(7) J. TUOMINEN, cfr. «Zs. f. Ap.», vol. 30, p. 261.

velocità di contrazione o di espansione del globo è più grande. Tale correlazione, che nella curva romana appare con regolarità, permise a M. Cimino di formulare l'ipotesi che le *macchie solari possano essere determinate dal movimento di pulsazione del Sole*.

Ma quale è la causa di queste pulsazioni? Le ricerche meccaniche moderne sopra l'equilibrio delle sfere gassose, indurrebbero a pensare alle *variazioni del campo magnetico solare*.

5. Come è noto, Hale nel 1913, trovò che il Sole è sede di un campo magnetico generale, molto più debole di quello delle macchie; ma le misure di esso eseguite in varie epoche, hanno dato risultati disparati. Così, ad esempio lo stesso Hale dedusse dalle prime misure un valore di circa 50 gauss⁽⁸⁾; mentre H. D. Babcock⁽⁹⁾ operando tra il 1940 ed il 1947, ottenne dei valori varianti da zero a 60 gauss; ed altri osservatori fra cui il Thiessen⁽¹⁰⁾, il Kiepenheuer⁽¹¹⁾ hanno avuto anche essi determinazioni discordanti fra loro.

È dunque probabile che il campo magnetico generale del Sole, sia variabile periodicamente. Tale fenomeno, e cioè la presenza di un campo magnetico variabile, è stato osservato con sicurezza la prima volta nel 1947, da H. W. Babcock nella stella HD 125248 = B.D. — 18° 3789⁽¹²⁾ e quindi in altri astri. È perciò lecito supporre che esso possa verificarsi anche nel Sole.

Ora, nel caso di un campo magnetico variabile, posto nell'interno di una massa gassosa ruotante intorno al proprio asse, la teoria delle onde magneto-idrodinamiche (elaborata da Alfvén⁽¹³⁾, dallo Schwarzschild⁽¹⁴⁾ e da altri) prevede delle oscillazioni meccaniche accoppiate a quelle magnetiche e propagantesi all'intero astro.

Dal lato matematico, il problema presenta ancora molte difficoltà e non può dirsi risolto; ma sembra assai probabile che la variazione periodica del raggio solare dimostrata dalle osservazioni di Roma e di Greenwich, sia particolarmente legata e avvalorata dalle ricerche sul campo magnetico solare.

In proposito, notiamo che nel prossimo anno, entrando in funzione la potente torre dell'Osservatorio di Monte Mario, attrezzata per lo studio del Sole, si cercherà, qui a Roma, fra le altre misure di poter eseguire quella del campo magnetico generale del Sole, onde portare un nuovo contributo al problema delle sue variazioni⁽¹⁵⁾.

(8) G. E. HALE, « Ap. J. », vol. 38, p. 27.

(9) H. D. BABCOCK, « Publ. A.S.P. », vol. 60, p. 244.

(10) G. THIESSEN, « Nature », vol. 169, p. 147.

(11) K. O. KIEPENHEUR in « Proceedings Ninth Volta Meeting » Rome: Acc. Naz. Lincei.

(12) H. W. BABCOCK, *The magnetically variable star HD 125248*, « Ap. J. », vol. 114, n. 1.

(13) H. ALFVÉN, *Cosmical Electrodynamics* (Oxford: Clarendon Press).

(14) M. SCHWARZSCHILD, « Ann. Astroph. » vol. 12, p. 148.

(15) Mentre correggo le bozze, mi giunge un articolo del prof. S. Polli di Trieste, il quale dimostra con osservazioni meteorologiche l'esistenza fisica di cicli climatici di 5,6 ed 8 anni, da me trovati astronomicamente nelle misure dei diametri solari.

Cfr. S. POLLI in « Rivista di Meteorologia Aeronautica », Anno XV, n. 2, 1955.

Astronomia (Astrofisica). — *Spectrophotométrie des raies d'émission intenses de la chromosphère solaire* (*). — *La raie H_{α}* . Nota di RAYMOND MICHARD e GEORGES LABORDE, presentata (**) dal Socio G. ABETTI.

I. OBSERVATIONS. — Au cours d'un séjour de trois mois à l'Observatoire d'Arcetri dans le cadre de la convention d'échanges entre le Consiglio Nazionale delle Ricerche et le Centre National de la Recherche Scientifique, l'un de nous a eu la chance de trouver des conditions très favorables à la photographie des raies d'émissions chromosphériques:

a) une installation donnant une grande image solaire (166 mm de diamètre) et un spectre stigmatique à la fois très dispersé ($3,3 \text{ \AA/mm}$ à H_{α}) et lumineux (poses de l'ordre de 1 sec. pour H_{α} sur plaques rapides).

b) un ciel presque toujours pur et assez fréquemment, surtout dans la deuxième partie de l'après-midi, une scintillation très faible, permettant d'apercevoir et de photographier aisément la granulation solaire.

Entre autres observations, les raies chromosphériques H_{α} , H_{β} , D_3 et le triplet infrarouge du Ca II ont été maintes fois photographiées, la fente, de 40 mm de long, étant tangente au bord solaire dans les régions polaires. Nos documents se rapportent donc à la chromosphère solaire normale.

Chaque cliché porte un étalonnage photométrique obtenu au moyen d'un échelon de platine placé sur la fente, ainsi qu'une série de spectres du bord solaire pris avec fente radiale.

II. GENERALITES SUR LE DEPOUILLEMENT. — Une sélection de 10 spectres a été opérée en se basant sur la qualité des images (faible scintillation). Ils ont été enregistrés au microphotomètre par bandes jointives de 0,6 mm de large en général, 0,2 mm pour un spectre choisi en vue d'une étude préliminaire des spicules; la brillance a été mesurée dans chaque enregistrement pour 13 longueurs d'onde couvrant H_{α} et pour le spectre continu.

La détermination de la hauteur apparente au-dessus du limbe à laquelle se réfère chaque enregistrement ne présente pas de difficulté: au voisinage du bord solaire, la distribution radiale de la lumière (spectre continu) paraît à peu près la même pour tous les clichés sélectionnés. En coupant cette distribution par une fente tangente au limbe, sécante ou extérieure à celui-ci, on obtient une répartition de la lumière continue le long de la fente qui ne dépend que de la distance du limbe à celle-ci. Le « profil » du bord solaire ayant été obtenu grâce à des spectres pris avec fente radiale, on a calculé les courbes de lumière le long de la fente correspondant à différentes positions de celle-ci, et trouvé la distance de la fente au limbe pour chaque spectre en

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(**) Lavoro eseguito all'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

comparant les courbes observées aux courbes calculées. Cette méthode est précise lorsque la fente coupe le limbe; elle l'est beaucoup moins dans le cas où la fente est extérieure.

En comparant le profil photométrique observé du bord solaire avec un profil théorique, calculé d'après la relation température-profondeur optique déterminée pour la photosphère par l'un de nous ⁽¹⁾, nous avons trouvé que les effets de la scintillation peuvent être représentés en admettant que la lumière issue d'un point est diffusée autour de ce point selon la loi $a/\pi \exp[-ax^2]$ où x est la distance au point et a un paramètre valant 0,29 en $['']^{-2}$. Ceci est vrai pour l'ensemble des clichés considérés ici. Cette loi ne convient plus cependant pour représenter la « diffusion » due à l'atmosphère et aux défauts des surfaces optiques à plus de $2''5$ du bord solaire.

Le profil instrumental a été déterminé sommairement d'après les raies atmosphériques extrapolées à la masse d'air 0; sa demi-largeur est 0,2 Å pour les spectres normalement posés. Cette largeur assez grande est due surtout au grain des plaques employées et non aux caractéristiques optiques du spectrographe. En effet, pour les spectres faiblement posés, elle se rapproche de 0,3 Å.

Enfin il a été nécessaire dans l'étude de H_α de tenir compte de l'influence des raies atmosphériques sur la forme des profils.

III. LA CHROMOSPHERE MOYENNE. - Comme il est bien connu, la chromosphère H_α présente une structure très marquée: de minuscules filaments, les « spicules », se détachent sur le fond ou s'élèvent au-dessus; les données actuelles sur les spicules ont été rassemblées par Van de Hulst ⁽²⁾,

En dehors des spicules, la chromosphère manifeste des fluctuations de hauteur apparente et de brillance assez fortes. Cependant, en faisant la moyenne des résultats obtenus pour un grand nombre de mesures, on peut définir une « chromosphère moyenne ». C'est à celle-ci que se rapporte l'ensemble des données d'observations et des travaux théoriques actuellement existants. Aussi avons-nous d'abord tiré de nos spectres les caractéristiques de H_α dans la chromosphère moyenne.

Les mesures de chaque spectre ont fourni une portion plus ou moins importante des courbes $i_\lambda(h)$ reliant la brillance monochromatique à la hauteur apparente h . Elles ont été combinées en un réseau de courbes unique. Puis les courbes $i_\lambda(h)$ ont été corrigées de l'effet de la scintillation de manière à obtenir les courbes vraies $I_\lambda(h)$. La relation entre ces courbes est

$$(1) \quad i_\lambda(h_0) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^\infty I_\lambda(h) e^{-a(h-h_0)^2} dh.$$

Cette équation intégrale a été résolue pour chaque λ par la méthode d'itération. Les corrections obtenues ne sont pas suffisantes pour les grandes

(1) R. MICHARD, « Ann. Astrophys. », 16, 217 (1953).

(2) H. C. VAN DE HULST, in *The Sun*, 1953, The University of Chicago Press, chap. V.

valeurs de h par suite de l'effet de la diffusion; des corrections complémentaires ont été obtenues en extrapolant les valeurs de $(i - I)/i$ de la région des h moyens jusqu'à la valeur 100 % admise pour $h = 12''$, limite de la chromosphère observable sur nos plaques.

Notons que, si la méthode de correction adoptée par nous, à savoir la résolution de l'équation (I) pour chaque longueur d'onde, est très laborieuse lorsqu'on veut l'effectuer avec un minimum d'exactitude, elle a l'avantage d'être la seule correcte. Les grandes différences entre nos résultats et ceux de De Jager ⁽³⁾ s'expliquent par le procédé sommaire par lequel il a calculé les corrections de scintillation.

La raie d'émission H_α apparaît sur la basse chromosphère comme fortement inversée; quand on s'écarte du limbe, l'intensité de l'absorption centrale diminue progressivement et l'on aboutit à une raie d'émission simple. Comme Abetti l'a déjà noté ⁽⁴⁾, la raie complexe des basses couches est généralement dissymétrique, la pointe d'émission violette $H_{\alpha_{2v}}$ étant plus intense et semblant plus étroite à l'examen visuel. Une partie seulement de cette dissymétrie semble due à la raie tellurique 6563,53 qui est superposée à la pointe rouge $H_{\alpha_{2r}}$. De même l'aile violette de la raie observée en absorption sur le disque semble passer un peu plus rapidement à l'émission que l'aile rouge. Ces particularités, ainsi que la question de la longueur d'onde des « flancs » de la raie aux différents niveaux mériteraient une étude approfondie. Dans le présent travail, nous avons éliminé les dissymétries en combinant les moitiés violette et rouge des profils. (Voir ci-dessous une suggestion pour l'interprétation de ces dissymétries de la raie).

Les résultats sont donnés dans le tableau I. Les brillances sont exprimées en % de celle du spectre continu du centre du Soleil à la longueur d'onde 6560 Å.

Par ailleurs, le Tableau II donne les caractéristiques essentielles des profils d'émission: largeur équivalente en Å de spectre continu du centre du disque solaire et demi-largeur brute. L'aspect même des profils indique clairement que leur largeur énorme dans la basse chromosphère est due à l'auto-absorption. On peut chercher à corriger les largeurs observées de l'auto-absorption en remarquant qu'elle n'affecte pas les ailes de la raie: si nous portons en abscisses $\overline{\Delta\lambda^2}$ et en ordonnées le logarithme de $I(\Delta\lambda)$ (fig. 1), on trouve pour $h > 7''$ une droite correspondant à un profil gaussien; pour les valeurs de h plus faibles, les points correspondant aux ailes de la raie se placent également sur une droite, les points provenant de l'intérieur de la raie se trouvant au-dessous de cette droite. Dans tous les cas, la droite définie par les ailes de la raie dans le diagramme $(\log I, \overline{\Delta\lambda^2})$ doit représenter le profil gaussien qu'aurait la raie en l'absence de l'auto-absorption. *Pour toutes les hauteurs apparentes supérieures à $1''3$, la demi-largeur de H_α ainsi corrigée est de $1,0$ Å.*

(3) C. DE JAGER, « Recherches astr. Observ. Utrecht », 13, Part I, p. 13, (1952).

(4) G. ABETTI, « Osserv. Mem. Osservatorio Astrofis. Arcetri », 46, p. 26 (1929).

TABLEAU I.

Brillances spectrales I_λ dans la raie H_α à différentes distances h du limbe solaire ⁽¹⁾.

h	Longueur d'onde $\Delta\lambda = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	Continu
-4,5'' . .	10,5	11,3	15,7	27,0	38,5	44,0	46,5	47,3	48
-3,3'' . .	12	11	15	24	34	40	42,5	43,4	43,2
-2,2'' . .	10	10,5	13,5	20,5	29	35	37	36,7	36,5
-1,2'' . .	10	10,5	12,7	18,5	24,2	26,5	27,1	26,8	26,4
+0,1'' . .	9,9	10,35	12,1	16,2	19,3	17	(12,9)	(9,4)	0?
1,3'' . .	9,2	9,6	10,8	14,2	14,6	(9,8)	(4,6)	(2,2)	
2,4'' . .	8,35	8,61	9,6	11,45	10,4	5,9	(1,9)	(0,65)	
3,6'' . .	7,5	7,60	8,1	8,55	6,6	(2,4)	(0,95)		
4,7'' . .	5,85	6	6,1	5,35	3,15	(1,0)	(0,15)		
5,8'' . .	3,92	3,87	(3,5)	(2,6)	(1,30)	(0,3)			
7,0'' . .	(2,12)	(2,04)	(1,70)	(1,12)	(0,52)	(0,20)			
8,1'' . .	(1,08)	(0,98)	(0,72)	(0,46)	(0,245)	(0,09)			
9,3'' . .	(0,43)	(0,38)	(0,28)	(0,175)	(0,085)				

⁽¹⁾ Les valeurs de I comprenant une correction de scintillation supérieure à 20% sont données entre parenthèses. Ces profils ne sont pas corrigés des effets instrumentaux, pratique ment négligeables.

TABLEAU II.
Demi-largeur brute et largeur équivalente de H α .

Hauteur apparente	1''3	2''4	3''6	4''7	5''8	7''	8''1	9''3
Demi-largeur brute (Å)	2.41	2.10	1.85	1.63	1.32	1.23	1.10	1.05
Largeur équivalente	27.9	21.6	15.2	9.6	5.4	2.27	0.98	0.43

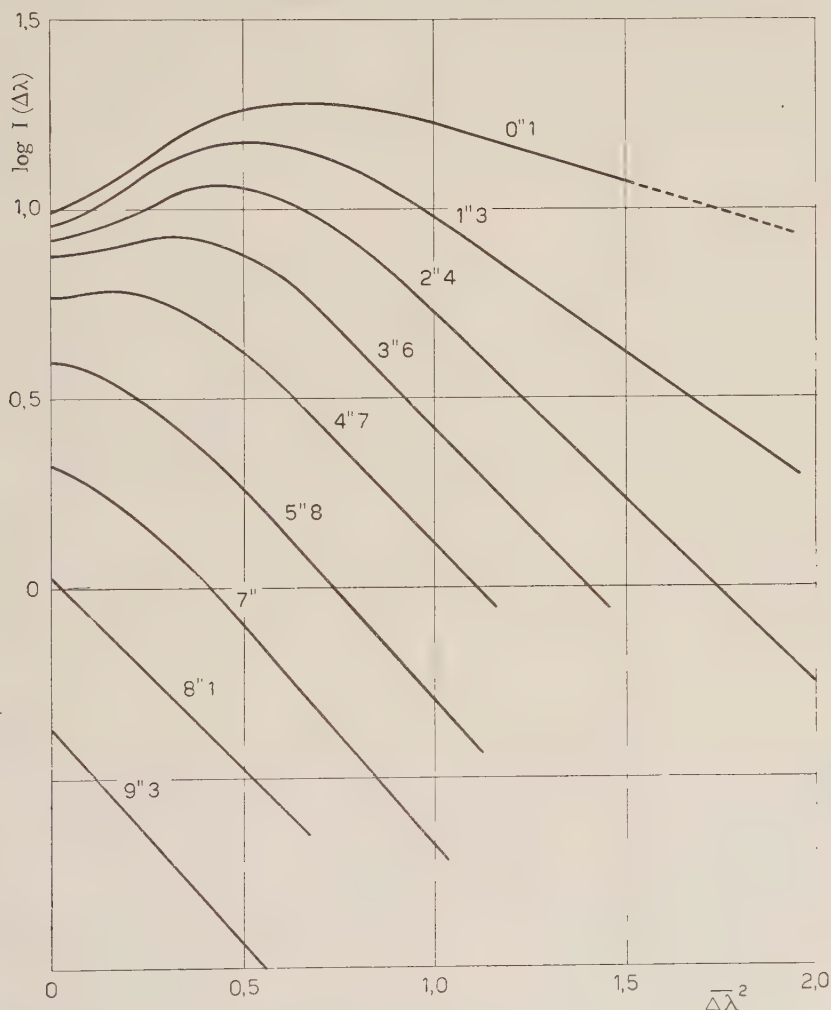


Fig. 1. — Représentation graphique des profils de la raie H α moyenne dans la chromosphère. En abscisses est porté le carré $\Delta\lambda^2$ de la distance en Å au centre de la raie, en ordonnées le logarithme de la brillance, en centièmes de celle du spectre continu au centre du disque solaire. Avec cette représentation les profils Doppler purs sont des droites. En extrapolant la partie rectiligne des profils déformés par auto-absorption, on obtient le profil corrigé de celle-ci.

Ce n'est qu'au-dessus de $7''$ que la chromosphère peut être considérée comme optiquement mince pour l'ensemble de la raie H_α . A partir de cette hauteur apparente, la largeur équivalente de la raie décroît exponentiellement avec h .

IV. ETUDE SPECIALE DES SPICULES. - Sur beaucoup de nos spectres on distingue des condensations dans H_α qui paraissent correspondre à des spicules isolés ou à de petits groupes de spicules. Dans une note préliminaire ⁽⁵⁾ l'un de nous a donné les résultats de mesures des vitesses radiales de ces condensations: il trouve que ces vitesses ont une répartition approximativement gaussienne de demi-largeur $0,5 \text{ \AA}$ (vitesse quadratique moyenne $13,7 \text{ km/sec}$).

Depuis, nous avons étudié en détail un spectre qui montre 5 spicules au moins bien isolés, à des altitudes comprises entre 4.200 et 6.200 kilomètres; sur le même spectre deux autres spicules sont visibles plus haut, mais avec une brillance trop faible pour être mesurable.

a) *Profil de H_α .*

Tout d'abord nous avons cherché à déterminer le profil de H_α dans les spicules (H_α^s) en retranchant aux brillances observées sur les maxima des condensations, celles des minima voisins. Les profils obtenus ainsi pour H_α^s sont gaussiens (parfois avec des ailes renforcées ?) sans trace d'auto-absorption. Souvent ils sont nettement déformés par la superposition partielle de spicules différents, effet qui a tendance à augmenter leur largeur. Les demi-largeur trouvées sont les suivantes, corrigées du profil instrumental:

Spicules nos	I	II	III	IV	V	Moyenne
Demi-largeur H_α^s	0,50	0,75	0,85	0,75	0,75	0,7
Hauteur (kms)	6150	5650	4950	4400	4200	

b) *Brillance vraie des spicules et du fond.*

Dans une deuxième approximation nous avons essayé d'isoler rigoureusement les spicules du fond, et d'obtenir leurs brillances corrigées des effets de la scintillation. Pour cela nous avons tracé les courbes donnant la brillance monochromatique le long de la fente du spectrographe pour 12 longueurs d'onde dans H_α , puis les enveloppes des minima les plus profonds et les plus éloignés des spicules: ces enveloppes nous donnent le « fond interspiculaire ». Ce qui se trouve au-dessus est de la lumière des spicules: nous cherchons alors à représenter la variation de la lumière spiculaire le long de la fente pour chaque longueur d'onde, en admettant qu'elle est le résultat de la déformation par la scintillation, d'une répartition réelle où les spicules sont des bandes de largeur $2''$ 3 ou $4''$ 6, de brillance uniforme dans leur largeur.

(5) R. MICHARD, « The Observatory », 74, p. 209 (1954).

Par essais successifs, on peut trouver la largeur et la brillance de chacun des spicules qui concourent à la répartition globale de la lumière, à condition qu'ils soient à peu près distincts. Bien entendu ce procédé ne peut conduire à des résultats très précis. Dans certains cas un même maximum peut être représenté aussi bien par deux spicules étroits que par un spicule large.

La figure 2 donne le résultat de ces opérations: les courbes tracées sont la répartition observée de la brillance le long de la fente pour $\lambda = 6.563,0$ (à titre d'exemple), et la répartition probable composée de spicules en crénaux. On peut lire la brillance maximum et la largeur de chaque spicule; un chiffre donne l'effet Doppler-Fizeau de l'objet. Pour le spicule II, deux variantes sont proposées. L'ensemble des courbes de brillance monochromatique a été utilisé pour tracer cette répartition probable des spicules sur la fente.

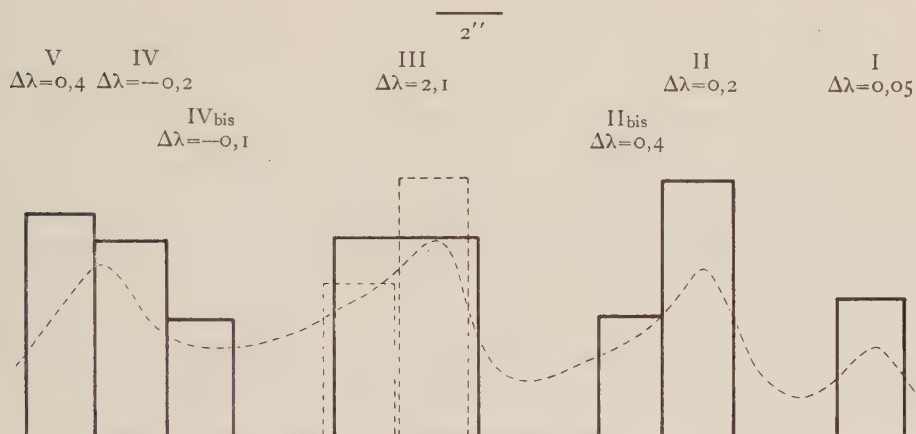


Fig. 2. — Disposition probable des spicules du spectre étudié le long du bord solaire, avec leur brillance maximum au point où la fente les coupe; les chiffres $\Delta\lambda$ indiquent le déplacement Doppler trouvé pour chaque spicule par rapport à la position normale de H_{α} . En trait discontinu, répartition *observée* de la lumière le long de la fente pour $\lambda = 6.563,0$.

On a obtenu également les profils H_{α}^s pour chaque spicule, les demi-largeurs étant en bon accord avec celles trouvées ci-dessus. Le fond interspiculaire est composé en partie de lumière « diffusée » par la frange chromosphérique intense dont les spicules émergent; après correction pour cet effet il reste une brillance notable, de l'ordre de la moitié de celle de la chromosphère moyenne. La figure 3 donne, en fonction de la hauteur apparente, la brillance maximum de chaque spicule présent sur le cliché, du fond interspiculaire et de la chromosphère moyenne.

Les spicules semblent avoir entre 4.200 et 6.200 km un gradient de brillance beaucoup plus faible que celui qui est commun à la chromosphère moyenne et au fond interspiculaire.

Il paraît raisonnable d'admettre que le fond, comme la chromosphère moyenne, est en réalité une superposition de spicules non résolus; la brillance des spicules semblant décroître lentement avec l'altitude, le gradient

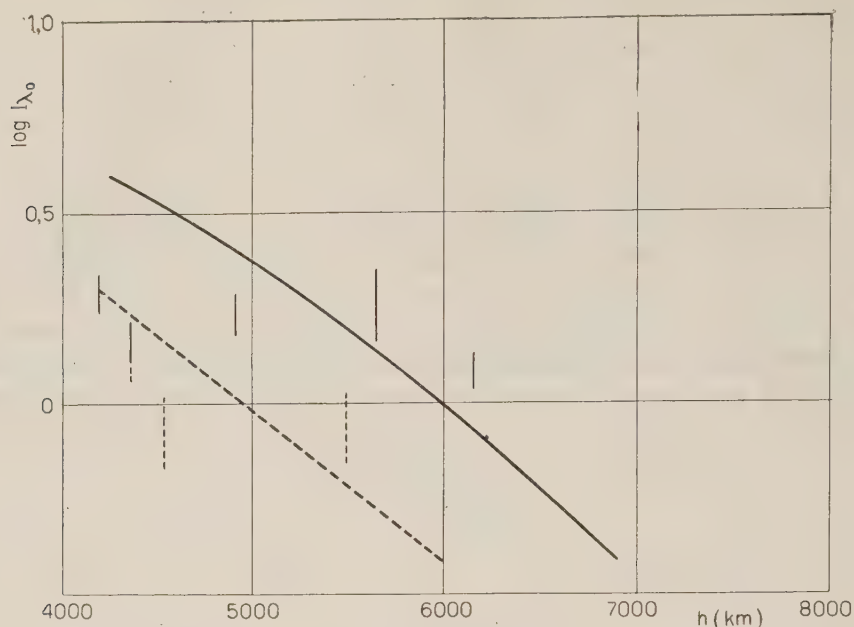


Fig. 3. - Variations avec la distance au limbe des brillances de la chromosphère moyenne, du fond interspiculaire et des spicules dans le spectre étudié. Des traits verticaux s'efforcent d'indiquer le degré d'indétermination de la brillance de chaque spicule.

de brillance de la chromosphère moyenne doit être dû à la diminution du nombre moyen de spicules qui se trouvent sur la ligne de visée lorsque celle-ci s'écarte du limbe.

c) *Effet Doppler des spicules.*

Lorsque les profils de H_{α} sur les spicules sont tracés après suppression du fond interspiculaire, on constate qu'ils manifestent des effets Doppler beaucoup plus élevés que ceux des profils bruts.

Les valeurs de $\Delta\lambda$ trouvées pour les 5 spicules principaux du spectre étudié ici sont supérieures en moyenne de plus de 50 % à celles qui leur ont été attribuées dans nos premières mesures ⁽⁵⁾. En conséquence, il semble raisonnable d'admettre que la demi-largeur de la répartition gaussienne des effets Doppler des spicules est de l'ordre de $0,75 \text{ \AA}$ (vitesse moyenne quadratique = $20,5 \text{ km/s}$), plutôt que de $0,5 \text{ \AA}$. Ceci n'est nullement en contradiction avec le peu que l'on sait des vitesses apparentes des spicules et de leurs inclinaisons moyennes.

D'autre part, il est tentant de supposer que la demi-largeur trouvée pour le profil de H_{α} dans la chromosphère moyenne (1 \AA) provient de la composition des demi-largeurs du profil de H_{α} dans les spicules ($0,70 \text{ \AA}$, ou moins?) et de la répartition gaussienne des effets Doppler (demi-largeur $0,75 \text{ \AA}$, ou plus?).

Une étude plus complète des profils de H_{α} sur les spicules est projetée à l'aide de l'ensemble de nos spectres.

V. CONCLUSIONS. — Nous pouvons résumer ainsi les principaux résultats de cette étude.

a) La raie H_{α} sur les spicules entre 4.200 et 6.200 km a en moyenne une largeur de 0,70 Å; cette valeur est probablement une *limite supérieure* car souvent on ne peut être certain d'avoir isolé la lumière d'un spicule unique.

b) Les spicules présentent des effets Doppler de distribution gaussienne de demi-largeur 0,5 Å au moins, et plus probablement 0,75 d'après nos nouveaux résultats. Cette valeur elle-même peut être une limite inférieure, car la superposition des spicules tend en moyenne à réduire leur vitesse radiale apparente.

c) Le rayonnement général de la chromosphère en H_{α} est, probablement dû uniquement à la superposition des spicules; cette hypothèse, concurremment avec l'effet d'auto-absorption, rend compte de la largeur de la raie.

d) Dans la basse chromosphère, en fait au-dessous de 7'', la raie H_{α} est affectée par l'auto-absorption. Pour une ligne de visée passant à la base de la chromosphère, l'épaisseur optique doit être si considérable que l'observateur ne « voit » que les régions chromosphériques situées en avant du limbe apparent; les dissymétries de H_{α} dans la basse chromosphère signifient peut-être que dans ces régions, la matière qui se rapproche de l'observateur est plus abondante, ou plus brillante que celle qui s'éloigne. Autrement dit, les spicules ascendants doivent être plus brillants que les descendants.

e) Dans la haute chromosphère, au-dessus de 6'', la décroissance de H_{α} résulte de la décroissance du nombre de spicules présents sur la ligne de visée plutôt que de la chute de brillance dans les spicules eux-mêmes.

REMARQUE FINALE. — Que devient la structure spiculaire pour d'autres raies que H_{α} ? L'examen de nos spectres nous permet d'affirmer qu'elle est pratiquement la même pour H_{β} où l'on retrouve les fluctuations de brillance et de vitesse radiale si caractéristiques. Par contre, et bien que nous ayons obtenu nos spectres de D_3 aux mêmes jours et pratiquement aux mêmes heures que les H_{α} , ils ne montrent aucune trace de la structure spiculaire: la raie de l'hélium présente de faibles fluctuations de brillance, mais jamais les effets Doppler spiculaires, qui seraient pourtant évidents sur une raie sensiblement plus fine que H_{α} . Nous sommes donc fondés à conclure, au moins provisoirement, que *la raie He 5876 n'est pas émise par les spicules*, mais seulement par la domaine interspiculaire.

Des recherches destinées à préciser certains points du présent travail sont en cours, ainsi que l'étude des raies H_{β} , D_3 et du triplet Infrarouge de Ca II.

L'un de nous (R. Michard) est heureux de remercier ici le Professeur G. Abetti, le Professeur G. Righini, Directeur de l'Observatoire d'Arcetri, tout le personnel de cet Observatoire et en particulier M.elle M. C. Ballario, Astronome, pour l'accueil si amical et l'aide constante reçus à Arcetri.

Astrofisica. — *Sul gradiente adiabatico di un miscuglio di elio e radiazione.* Nota di ADELE MARTINI e ALBERTO MASANI, presentata (*) dal Corrisp. F. ZAGAR.

È noto che la condizione per la quale si generano dei moti convettivi in seno a una massa gassosa è che il gradiente termico del miscuglio materia-radiazione che si ha quando tale miscuglio compie una trasformazione adiabatica, sia minore del corrispondente gradiente termico in condizioni di equilibrio radiativo.

Per procedere al confronto dei due gradienti è quindi importante conoscere quale valore assume quello adiabatico quando il miscuglio si trova soggetto a certe condizioni fisiche, quello radiativo essendo fornito dal particolare modello di atmosfera esaminato. Si sa che la precedente condizione per il verificarsi dei moti convettivi può realizzarsi in una zona vicina alla superficie di una stella per l'abbassarsi del gradiente adiabatico in seguito alla ricombinazione degli ioni H e He con i loro elettroni.

Nel 1952 uno di noi ⁽¹⁾ fece uno studio sul gradiente adiabatico per un miscuglio composto di radiazione e di H e He in parti uguali in peso e per un altro miscuglio composto di radiazione e di H puro relativamente a un campo di temperature e pressioni elettroniche valido nelle atmosfere di stelle dei primi tipi spettrali. Si riteneva allora che non esistessero stelle aventi un contenuto di elio maggiore, sebbene nel 1942 D. Popper ⁽²⁾ avesse scoperto, e nel 1947 confermato ⁽³⁾, che la stella HD 124448 di tipo spettrale B₂ ha uno spettro che mostra una particolare ricchezza di elio in contrapposizione a una particolare povertà di idrogeno.

Ma in questi ultimi anni sono state scoperte altre due stelle che mostrano le stesse caratteristiche spettrali; ciò fa pensare che questo tipo di stelle sia più frequente di quanto si è creduto finora. Si tratta della stella HD 160641 di tipo spettrale O, scoperta da W. Bidelman ⁽⁴⁾ e della stella HD 168476 di tipo spettrale B scoperta da A. D. Thackeray e A. J. Wesselink ⁽⁵⁾ e illustrata ancora dal primo ⁽⁶⁾ nel 1954.

Tutte tre queste stelle vanno sotto il nome di elio-stelle per indicare appunto la preminenza di questo elemento nei confronti dell'idrogeno il quale non manifesta la sua presenza nello spettro con alcuna riga né in emissione né in assorbimento.

(*) Nella seduta dei 12 novembre 1955.

(1) A. MASANI, «Mem. S.A.I.», 24-15-1953.

(2) D. POPPER, «P.A.S.P.», 54-160-1942.

(3) D. POPPER, «P.A.S.P.», 59-320-1947.

(4) W. BIDELMAN, «Ap. J.», 116-227-1952.

(5) A. D. THACKERAY e A. J. WESSELINK, «Obs.», 72-248-1952.

(6) A. D. THACKERAY, «M.N.», 114-93-1954.

Una caratteristica comune a queste stelle è la elevatissima velocità radiale: — 65 Km/sec, + 100 Km/sec, — 165 Km/sec rispettivamente nell'ordine con cui le abbiamo ricordate. Il valore positivo della seconda è importante perché indica che non si tratta di atmosfere peculiari in espansione ma piuttosto di stelle ad alta velocità, per il resto essendo del tutto normali.

Ci è sembrato pertanto opportuno estendere il calcolo del gradiente adiabatico al caso di una atmosfera composta di He e radiazione prendendo come campo T — Pe quello stesso usato nel precedente lavoro poiché queste stelle sono dei primissimi tipi spettrali. I calcoli sono stati eseguiti seguendo il metodo indicato da F. Zagar ⁽⁷⁾ che ha, su quello seguito precedentemente, il merito di essere insieme più preciso e più rapido. Ne riportiamo i risultati nella tabella acclusa.

Da un confronto con i risultati ottenuti nella Nota precedente risulta che il gradiente adiabatico in un miscuglio di idrogeno puro e radiazione non mostra, nel campo di ricerca che abbiamo scelto, alcun abbassamento; in un miscuglio di radiazione e di idrogeno e elio in parti uguali in peso si ha un minimo ben pronunciato che si accentua con l'aumentare della pressione elettronica per la temperatura $\log T = 4,54998$. In un miscuglio di radiazione e elio puro, che qui consideriamo, il gradiente adiabatico ha praticamente lo stesso andamento del precedente.

Ciò fa concludere che mentre la composizione H-He non ha alcuna importanza alle basse pressioni elettroniche, ne ha una piuttosto grande alle pressioni elettroniche maggiori; in queste ultime condizioni le piccole percentuali di He danno un valore del gradiente adiabatico che non subisce poi modificazioni notevoli fino alle percentuali più alte.

I nostri risultati si comprendono analizzando la tabella dei gradi di ionizzazione dell'H e He riportati in ⁽¹⁾ e tenendo presente che il meccanismo che abbassa il gradiente adiabatico è dovuto, in queste condizioni fisiche, alla variabilità del grado di ionizzazione dell'elemento presente nell'atmosfera.

$\log T \backslash \log P_e$	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8
4.40005	0.2499	0.2505	0.2564	0.2709	0.3003	0.3339
4.44994	0.2495	0.2492	0.2484	0.2563	0.2782	0.3138
4.49996	0.2485	0.2485	0.2396	0.2327	0.2362	0.2609
4.54998	0.2497	0.2495	0.2475	0.2390	0.2198	0.2049
4.59999	0.2500	0.2500	0.2499	0.2495	0.2457	0.2286
4.65002	0.2500	0.2500	0.2499	0.2503	0.2514	0.2538
4.70001	0.2500	0.2500	0.2500	0.2502	0.2509	0.2541

(7) F. ZAGAR, « Rend. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere », 86-66-1953.

Si constata infatti che mentre l'H è praticamente tutto ionizzato nel nostro campo di studio, l'He è quasi completamente ionizzato una sola volta, ma subisce un effetto molto variabile nella seconda ionizzazione che ha il suo massimo appunto nei valori di P_e e T nei quali il gradiente assume i valori minimi. Pertanto una diminuzione analoga a questa deve verificarsi in una zona di più piccoli valori di P_e e T nei quali la massima variazione del grado di ionizzazione interessa l'HeI e in quella, diversa da questa, in cui la massima variazione del grado di ionizzazione interessa l'H (per le stelle contenenti l'H in superficie). Questi effetti sono importanti fin dalle percentuali di He basse e rimangono invariate per alte percentuali di questo elemento.

Geodesia. — *In risposta ad una Nota di Corradino Mineo.* Nota di ANTONIO MARUSSI, presentata (*) dal Socio G. CASSINIS.

1. In una Nota presentata a questa Accademia nella seduta del 13 giugno 1955, e pubblicata nel fascicolo n. 6 dello stesso mese di questi « Rendiconti », il Mineo critica alcuni lavori da me svolti negli ultimi anni. Il modo in cui la critica è stilata, tradisce la sua finalità, che non è certo quella di portare un fattivo contributo alla Geodesia; tanto più che appena essa esce dalle allusioni volutamente vaghe, ed affronta argomenti concreti che consentono una replica, si dimostra sempre infondata o addirittura errata.

È ciò che mi propongo di provare.

2. Contrariamente a quanto crede il Mineo, lo scopo che mi sono prefisso nella mia Memoria sulla Geodesia Intrinseca (1) non è per nulla la risoluzione di un problema di Dirichlet, ma bensì lo studio locale della struttura del campo di gravità terrestre, condotto valendomi di soli elementi intrinseci del campo stesso, ed accessibili perciò alla misura.

La sola lettura dell'introduzione alla citata Memoria avrebbe risparmiato questo malinteso; e non fa dunque meraviglia se, con simili errate premesse, il Mineo trovi difficoltà a seguire gli sviluppi; e trovi in particolare da ridire sull'uso delle omografie e dei tensori che sono invece, nell'ordine di idee seguito, gli strumenti naturali di calcolo: le prime, quando si considerino le varie entità in sé; quando esse si riferiscano a coordinate, i secondi. Tale lettura avrebbe anche evitato il richiamo ad una terna cartesiana unica per tutto il campo, che appunto si vuol evitare, in quanto non ne è elemento intrinseco.

Un'altra erronea premessa, e che cioè le coordinate da me usate ammettano quale terna coordinata quella descritta dal Mineo nella nota in calce (3) a p. 571 della sua critica, lo porta ad affermare che le equazioni di Mainardi Codazzi (25,6) e (25,7) per le superfici $\varphi = \text{cost.}$, $\lambda = \text{cost.}$ sarebbero errate, come alcuni esempi in suo possesso mostrerebbero; e che quelle (25,8) relative

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) Memoria n. 7 della Commissione Geodetica Italiana, III serie, Milano, 1951.

alle superfici equipotenziali non sarebbero le equazioni da lui stesso date, ad esempio a p. 7, formula (8), nella sua Memoria *Sulle superfici riferite ad un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del geode* ⁽²⁾.

Per quanto si riferisce alla prima affermazione, invito il Mineo a produrre gli esempi in suo possesso, affinché risulti provata la verità delle sue asserzioni, che a me risultano errate; e per quanto si riferisce alla seconda, basta confrontare le formule delle due Memorie, che coincidono financo nel simbolismo (salvo che la longitudine è indicata da me con λ anziché con ω).

Che poi la terna descritta dal Mineo non possa essere terna principale di un sistema di coordinate, oltre ad essere di per sé abbastanza evidente, è dimostrato a p. 16 della mia Memoria.

È anche ovvio come il sistema $\varphi = \text{cost.}$, $\lambda = \text{cost.}$, $W = \text{cost.}$, non possa essere un sistema triplo ortogonale, altro che in un evidente caso banale privo di ogni interesse; anzi, le (15,6) a p. 20 della mia Memoria forniscono gli azimut dei paralleli e dei meridiani, e le (20,1) la direzione della linea isozenitale, che rappresentano appunto le linee coordinate del sistema; non si capisce quindi in base a quale nuovo equivoco il Mineo mi attribuisca l'intenzione di trovare una condizione che affermo invece non esistere.

3. Al n. 2 della mia Nota *Determinazione dell'angolo fra la tangente in un estremo e la corrispondente sezione normale contenente l'altro estremo per un arco finito di geodetica su di una superficie qualunque* ⁽³⁾ che forma oggetto delle ulteriori considerazioni del Mineo, la superficie Σ sulla quale si immagina tracciata la linea geodetica, è descritta fin da principio; ed anche qui una più attenta lettura avrebbe risparmiato un nuovo equivoco riguardo le formule (1), le quali, per essere κ la curvatura normale e τ la torsione geodetica, com'è spiegato nella riga successiva, e per essere assunta uguale a zero la curvatura tangenziale, appartengono per l'appunto ad una geodetica di Σ , e non ad una curva gobba dello spazio ordinario o ad una linea retta.

Né mi sembra che la formula (8) possa essere letta da alcuno in forma diversa da com'è scritta; e chiunque vede che la parte principale dell'angolo cercato è $(s^2/6) \kappa \tau$.

4. Il Mineo afferma poi che alcune formule della mia Nota *Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superficie* ⁽⁴⁾ sarebbero errate, e che in altre sarebbe stata usata promiscuamente la notazione di derivazione ordinaria e covariante, ma non dice quali siano queste formule. E poiché a me risulta invece che le formule sono esatte, e che nessuna confusione nelle derivazioni è avvenuta, invito il Mineo a precisare le sue affermazioni, indicando quali siano le formule secondo lui errate, e dove ne sia l'errore.

(2) « Giornale di Matematiche di Battaglini », vol. XLVIII, 1910.

(3) « Rend. Acc. Linc. », ser. VIII, vol. XII, fasc. 5, 1952.

(4) « Rend. Acc. Linc. », ser. VIII, vol. XVI, fasc. 4, 1954.

Che il sistema T_{rs}^i sia un tensore, già considerato del resto nel 1924 dall'Eddington, risulta ancor prima che dai calcoli elementari del Mineo, dal suo stesso significato geometrico; e se la formula (5) fu riportata, non è certo per dimostrare ciò che già è noto ed evidente, ma bensì perché occorre conoscere, per ciò che segue, l'espressione effettiva di T_{rs}^i in funzione del tensore che fornisce il modulo di deformazione.

Segue una serie di enunciazioni, quale il richiamo di una formula data dal Bianchi, che nulla hanno a che vedere con l'argomento; l'unica citazione che vi abbia qualche attinenza, è quella riportata dal Trattato del Pizzetti. Essa però non si riferisce, come crede il Mineo, all'alterazione della curvatura tangenziale delle sole linee coordinate nelle rappresentazioni conformi; ma racchiude invece, come osserva il Pizzetti stesso ⁽⁵⁾, un risultato che vale per qualunque linea. L'enunciato si riassume dunque nel teorema trovato ancora nel 1886 dal matematico olandese Schols, che si ritrova come caso particolarissimo delle mie formule, in fondo alla mia Nota.

Sarebbe ora assai interessante confrontare i calcoli, lunghi ma non difficili, fatti dal Mineo, che condurrebbero alla mia formula (10), con procedimenti diversi da quelli da me usati; calcoli del resto inutili se, com'egli afferma, il problema fosse già stato risolto in precedenza.

5. Non è facile seguire il Mineo nella confusa critica ch'egli vuol fare alla mia Nota *Determinazione a priori del modulo di deformazione lineare nella rappresentazione conforme di Gauss* ⁽⁶⁾. In questa Nota, il modulo di deformazione viene determinato valendosi dell'equazione alle derivate parziali del second'ordine alla quale soddisfa il suo logaritmo in ogni rappresentazione conforme, e delle condizioni al contorno caratteristiche della proiezione di Gauss, che consistono nell'annullarsi del logaritmo del modulo e della sua derivata normale lungo un arco di meridiano: tali condizioni determinano pienamente il modulo stesso e non - come crede il Mineo - a meno di una funzione armonica.

Cambiando l'arco di curva portante dei valori al contorno, si ottengono altre proiezioni; così ad esempio se il modulo è assunto stazionario lungo un arco di parallelo, si ha la proiezione di Lambert, e così via; è su simili argomenti che ho fatto lavorare alcuni miei allievi, e continuerò a farlo.

6. Se nei primi quattro paragrafi della Nota del Mineo ho potuto trovare, pur nell'accavallarsi delle argomentazioni non sempre serene, qualche concreto argomento al quale mi è stato facile rispondere, mi riesce invece assai difficile trovare un simile argomento nel quinto paragrafo, la cui inconsueta intonazione non pare certo ispirata alla critica obbiettiva.

(5) *Trattato di Geodesia Teoretica*, Bologna, Zanichelli, 1928, p. 380, formula (40) e righe che seguono.

(6) « Rend. Acc. Linc. », ser. VIII, vol. XI, fasc. 3-4, settembre-ottobre 1951.

Così ad esempio il Mineo mi fa dire ciò che non ho mai pensato di dire, valendosi di citazioni volutamente monche, quale quella che si riferisce alla corrispondenza fra geoidi ed ellissoidi; egli ben conosce invece la mia Nota *Sulla rappresentazione del geoidi sull'ellissoide* ⁽⁷⁾ ove prospetto una rappresentazione conforme delle due superfici una sull'altra, appunto allo scopo di tener conto della loro non applicabilità; e sa quindi che quanto egli afferma nella sua critica non risponde al vero.

Ma già il linguaggio usato dal Mineo avrà persuaso dei veri intendimenti ch'egli si era proposto nella sua critica.

Fisica. — *Sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio di un filo, percorso da corrente, in campo magnetico.* Nota di CARLO BERNARDINI, presentata ^(*) dal Socio E. PERSICO.

1. Già da qualche anno è stata presa in considerazione la possibilità di studiare le traiettorie di particelle cariche in un campo magnetico usando un filo conduttore opportunamente teso, percorso da corrente ed immerso nello stesso campo ⁽¹⁾. Le principali difficoltà pratiche che si incontrano con questo metodo (noto, nella letteratura di lingua inglese, con il nome di *floating-wire method*) consistono nello stabilire l'entità delle correzioni dovute al peso del filo stesso, alla sua rigidità ed al campo da esso generato ⁽²⁾; quando i termini corrispondenti a questi due effetti sono trascurabili rispetto a quello che contiene il campo esterno, allora l'analogia tra l'equazione della traiettoria delle particelle e quella delle configurazioni d'equilibrio del filo è completa. Supporrò in seguito di essere proprio in queste condizioni, tanto meglio realizzabili quanto maggiore è l'intensità dei campi presi in considerazione.

Si incontrano, però, con questo metodo, dei casi di instabilità delle configurazioni del filo; il presente lavoro è dedicato alla ricerca ed interpretazione di essi.

L'esistenza di questi casi è facilmente intuibile; infatti, se il campo ha proprietà focalizzanti, un fascetto sottile di particelle uscenti da una sorgente puntiforme S formerà la prima immagine astigmatica di S in un certo punto I. Si intuisce ora che, quando gli estremi fissi del filo sono in S ed I, così come vi sono infinite traiettorie adiacenti che passano per quei due punti, vi possono essere infinite configurazioni di equilibrio.

Mostrerò che, se esistono di tali punti I e se uno di essi cade tra i punti fissi S e Q del filo, allora l'equilibrio delle configurazioni di esso è instabile.

(7) « Bollettino di Geodesia e Scienze Affini », anno X, n. 3, 1951.

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) J. LOEB, « Comptes Rendus », 222, 488 (1946); L. CRANBERG, *U. S. Atomic Energy Commission*, AECU 1670; ved. anche SYMONDS, « Rep. on Progr. in Phys. », 18, 83 (1955).

2. Consideriamo un filo omogeneo, perfettamente flessibile ed inestendibile, fissato all'estremo S, passante per Q e teso all'altro estremo da un peso P. Sia i la corrente che lo percorre e \mathbf{B} il campo magnetico agente su di esso. Il punto P del filo è individuato dall'arco s contato a partire da S; τ è il versore della tangente al filo in P e T la tensione. L'equazione di equilibrio del filo è la seguente ⁽²⁾:

$$(1) \quad \frac{d}{ds} (\tau T) = -i \tau \wedge \mathbf{B}.$$

Questa è anche l'equazione delle traiettorie di una particella di carica q e momento p , soggetta alla forza di Lorentz, se T, i sono tali che $T/i = -p/q$. Si vede subito che T (come p) è una costante e vale P.

Mi limiterò allo studio del « caso piano »: precisamente, in un riferimento cartesiano (x, y, z) , supporrò che le componenti del vettore \mathbf{B} siano della forma

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = \sum_m z^m X_m(x, y) \\ B_y = \sum_m z^m Y_m(x, y) \\ B_z = B(x, y) + \sum_m z^m Z_m(x, y). \end{array} \right.$$

In tal caso, il piano $z = 0$ ha un ruolo privilegiato; esistono, come si può facilmente verificare, configurazioni del filo interamente contenute in questo piano: mi limiterò allo studio di esse.

L'interesse delle (2) sta nel fatto che molti campi che si incontrano in pratica sono di quella forma: per esempio, quelli delle macchine acceleratrici a campo magnetico.

Le funzioni X, Y, Z non sono tutte indipendenti, a causa delle equazioni di Maxwell; da queste si ottiene, tra l'altro, che dev'essere $Z_1 \equiv 0$ e questa sola conseguenza è sufficiente per quel che segue.

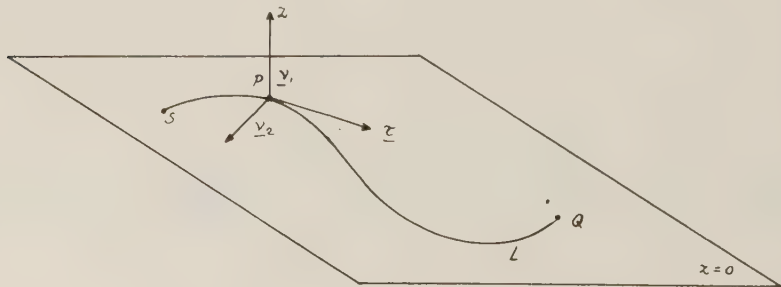


Fig. 1.

(2) Vedi, per esempio, LEVI CIVITA e AMALDI, *Meccanica Razionale*, I.

3. Nel piano $z = 0$, sia L una configurazione del filo. Riferiamo i punti vicini ad L ad un sistema di coordinate s, r, z così definito (ved. figura): s è l'arco, contato su L a partire da S ; r e z le distanze da L contate lungo la normale principale e la binormale rispettivamente. L'elemento lineare è dato da

$$(2) \quad ds'^2 = \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 ds^2 + dr^2 + dz^2$$

dove $R(s)$ è il raggio di curvatura di L nel punto P individuato da s . Indico inoltre con \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 rispettivamente i versori delle direzioni z ed r in P . L'elemento di superficie $d\sigma_i$ normale a \mathbf{v}_i ha l'espressione

$$(3) \quad \begin{cases} d\sigma_1 = \left(1 + \frac{r}{R}\right) ds dz \\ d\sigma_2 = \left(1 + \frac{r}{R}\right) ds dr. \end{cases}$$

4. Sia δP uno spostamento virtuale, normale ad L , nullo in S e Q , che porta da P (su L) a P' . Converrà metterne le componenti sotto la forma:

$$(4) \quad r(P') = \varepsilon f(s), \quad z(P') = \eta g(s)$$

dove $f(s), g(s)$ sono due funzioni continue, finite, nulle agli estremi $s = 0$ ed $s = l_0$; ed ε, η due parametri infinitesimi, indipendenti da s . Calcolerò il lavoro virtuale δW_m della forza magnetica su tutto il filo immaginando che ε ed η crescano gradualmente da 0 al loro valore effettivo ed integrando il lavoro $d\delta W$ corrispondente ad un incremento (infinitesimo del secondo ordine) $d\varepsilon, d\eta$. Il lavoro virtuale della forza magnetica agente su ds , corrispondente all'incremento $d\delta P$ di δP è

$$d^2 \delta W_m = i (\mathbf{ds} \wedge d\delta P) \times \mathbf{B} = i d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{B}$$

dove $d\boldsymbol{\sigma} = d\sigma_1 \mathbf{v}_1 + d\sigma_2 \mathbf{v}_2$. Facendo uso delle (2), (3), (4) ed integrando su $ds, d\varepsilon, d\eta$ si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} \delta W_m &= i\varepsilon \int_0^{l_0} B ds + \frac{1}{2} i\varepsilon^2 \int_0^{l_0} \left(\frac{B}{R} + \frac{\partial B}{\partial r} \right) f^2 ds + \\ &+ \frac{1}{2} i\eta^2 \int_0^{l_0} g^2 \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}_2) ds + O(\varepsilon^3, \eta^3 \dots). \end{aligned}$$

Questa espressione si semplifica grazie ad una delle equazioni di Maxwell; infatti l'annullarsi della componente s del $\text{rot } \mathbf{B}$ porta alla relazione

$$\frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}_2) = - \frac{\partial B}{\partial r}.$$

Se la lunghezza del filo tra S e Q aumenta, nello spostamento virtuale, di δl , il peso tensore si solleva di δl e quindi la gravità fa un lavoro negativo pari a

$$\delta W_p = - T \delta l = - T \varepsilon \int_0^{l_0} \frac{f}{R} ds + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{l_0} f'^2 ds + \frac{1}{2} \eta^2 \int_0^{l_0} g'^2 ds + O(\varepsilon^3, \eta^3 \dots)$$

(l'apice indica derivazione rispetto ad s). Il lavoro virtuale delle forze esterne sul filo è, complessivamente, $\delta W = \delta W_m + \delta W_p$.

4. Annullando i termini del 1° ordine di δW si ottiene la relazione ben nota $iBR = T$ che determina la funzione $R(s)$ ed assicura che la L è una configurazione d'equilibrio. Passiamo a studiarne la stabilità. I termini del secondo ordine, $\delta_2 W$, di δW , sono del tipo

$$\delta_2 W = M\varepsilon^2 + N\eta^2$$

dove

$$M = \frac{1}{2} T \int_0^{l_0} \left[\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \ln B}{\partial r} \right) f^2 - f'^2 \right] ds,$$

$$N = \frac{1}{2} T \int_0^{l_0} \left[- \frac{1}{R} \frac{\partial \ln B}{\partial r} g^2 - g'^2 \right] ds.$$

Per la stabilità è sufficiente che la forma quadratica $\delta_2 W$ sia definita negativa; non è, a rigore, necessario, perché possono esservi casi in cui la forma è semi-definita negativa e tuttavia si ha stabilità grazie ai termini di ordine ≥ 3 ; rinuncio, per semplicità, a questi casi. Notiamo che, sia M che N sono della forma

$$\mathcal{F}[\Phi] = \int_0^{l_0} [a(s) \Phi^2 - \Phi'^2] ds$$

dove $a(s)$ è assegnata, e Φ rappresenta la f o la g , a meno di un fattore di normalizzazione. Consideriamo l'equazione:

$$(5) \quad \Phi'' + [\lambda + a(s)] \Phi = 0$$

in cui λ è un parametro, con le condizioni agli estremi $\Phi(0) = \Phi(l_0) = 0$ ed indichiamone gli autovalori con $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$, intendendo che λ_n sia l'autovalore associato alla soluzione Φ_n che si annulla in n punti oltre agli estremi. È noto che $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$. Identifichiamo le Φ_n con le soluzioni ortonormali di (5) nell'intervallo $0, l_0$. Allora una qualunque Φ che soddisfa la condizione d'annullarsi per $s = 0, l_0$, può essere espressa dalle serie

$$\Phi = \sum_m c_m \Phi_m \text{ e quindi}$$

$$\mathcal{F}[\Phi] = - \sum_m \lambda_m c_m^2.$$

Segue che, se $\lambda_0 > 0$, $\mathcal{F}[\Phi] < 0$ per qualunque scelta delle c_m . Ora, λ_0 è una funzione di l_0 ; supporrò $a(s)$ tale che, per valori sufficientemente piccoli di l_0 sia $\lambda_0 > 0$. Detta quindi l_0^* la più piccola radice di $\lambda_0(l_0) = 0$, $\mathcal{F}[\Phi]$ può diventare positiva per $l_0 > l_0^*$. Ritornando alle M, N , possiamo applicare quanto sopra e trovare il più piccolo valore, l_0^* , di l_0 per cui una di esse può diventare negativa. Per $l_0 \geq l_0^*$ le configurazioni del filo non sono più stabili.

È sufficiente ora ricordare ⁽³⁾ che la (5), per $\lambda = 0$ e per le due forme speciali di $a(s)$ che figurano in M, N, è l'equazione dei raggi parassiali attorno all'asse ottico curvo L, per stabilire che l_0^* è proprio l'arco che corrisponde alla prima immagine astigmatica I di S. Da questo segue quanto è stato enunciato alla fine del § 1.

6. Un esempio molto semplice di applicazione dei risultati ora esposti è quello del campo di un betatrone ⁽⁴⁾ in cui

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \ln B}{\partial r} = - \frac{n}{R^2}$$

dove n (compreso tra 0 ed 1) ed R sono praticamente costanti (teoria « lineare »). Le radici l_0^* di $\lambda(l_0) = 0$ per le due forme di $a(s)$ sono rispettivamente $\frac{\pi R}{\sqrt{1-n}}$, $\frac{\pi R}{\sqrt{n}}$, cioè le semilunghezze d'onda delle cosiddette oscillazioni di betatrone. Questo esempio rende chiara l'interpretazione data nel § 1 dei casi di instabilità del filo in termini di traiettorie. Si può aggiungere che, in generale, la presenza di due distinti valori di l_0^* rende conto del fatto che il sistema ha due fuochi astigmatici; il filo diviene instabile in corrispondenza del primo di essi, cioè del più piccolo valore di l_0^* .

Ringrazio il prof. E. Persico per avermi proposto l'argomento e per il suo continuo interesse e consiglio.

Ottica. — *Sul profilo strumentale teorico d'uno spettrografo astronomico.* Nota di ALDO KRANJC, presentata ^(*) dal Corrisp. F. ZAGAR.

Una riga d'emissione, per quanto monocromatica, non dà mai nello spettrogramma un'immagine infinitamente sottile, ma è sempre dotata di una certa larghezza la quale è teoricamente limitata contemporaneamente dalla larghezza della fenditura e dalla sua immagine di diffrazione sulla lastra: stringendo dunque la fenditura diminuisce la larghezza dell'immagine, ma sotto un certo limite essa non diminuisce più. È stato calcolato il profilo strumentale teorico nell'ipotesi d'un sistema di onde cilindriche incoerenti i cui assi giacciono nel piano della fenditura e sono ad essa paralleli ⁽¹⁾. Ciò può essere ottenuto in pratica mediante una sorgente filiforme incoerente disposta trasversalmente alla fenditura e su questa messa a fuoco mediante una lente

(3) Ved. WENDT, « Zeitsch. für Physik », 120, 720 (1942). In particolare, l'equazione (30) di quel lavoro, semplificata per il nostro caso in cui non vi è campo elettrico e la torsione di L è nulla.

(4) KERST, SERBER, « Phys. Rev. », 60, 53 (1941).

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) *Zum Einfluss der Spaltbreite auf die Intensitätsverteilung in Spektrallinien*, « Van Cittert Zsf. f. Phys. », 65, 547 (1930).

cilindrica parallela alla fenditura. Nel caso di uno spettrografo per uso astronomico le cose sono disposte diversamente, perché la luce proveniente da una stella è raccolta dallo specchio principale e dopo una seconda riflessione sullo specchio secondario Cassegrain è concentrata sulla fenditura dello spettrografo. Ma qui si ha un'immagine della stella che è assai maggiore della figura di diffrazione, a causa della scintillazione, e si ha un dischetto luminoso in cui ogni punto riceve radiazione incoerente rispetto ai punti circostanti. Di solito poi nella pratica spettrografica la fenditura viene tenuta non più larga del dischetto immagine ed inoltre per comodità di registrazione si fa scorrere la stella sulla fenditura per avere spettri di altezza opportuna. Ne segue che l'immagine sulla lastra corrisponde ad un sistema di onde sferiche incoerenti emergenti da una porzione rettangolare, stretta ed alta, della fenditura.

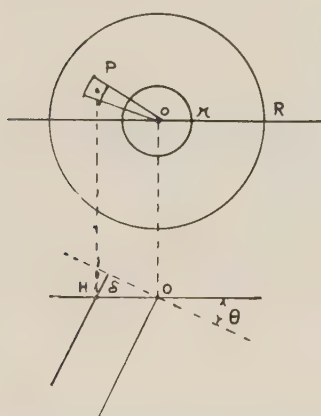


Fig. 1.

Ma queste onde sferiche non illuminano uniformemente il collimatore dello spettrografo a causa dello schermo costituito dallo specchio Cassegrain del telescopio. A causa di queste differenti condizioni di funzionamento il profilo strumentale di una riga monocromatica sarà diverso da quello calcolato da Van Cittert e passiamo a calcolarlo.

Da un punto della fenditura esce un'onda sferica la quale è diaframmata angularmente dall'apertura del telescopio (purché il collimatore dello spettrografo abbia diametro sufficiente). Dal collimatore l'onda emerge piana e naturalmente a sezione circolare. Per calcolare la forma della figura di diffrazione all'infinito

possiamo evidentemente supporre che il collimatore sia diaframmato in modo da avere la stessa apertura del sistema telescopico Cassegrain, e con un dischetto opaco nel centro corrispondente all'ombra dello specchio secondario. Sia dunque R il raggio efficace del collimatore, che è leggermente inferiore a quello reale per motivi di facilità di aggiustamento e di rendimento ottico (vedi fig. 1), ed r il raggio dell'ombra dello specchio secondario sul collimatore.

Supponiamo che l'onda sferica sia isotropa; ciò è sicuramente falso, e per convincersene basta porre la pupilla dell'occhio in corrispondenza all'immagine di una stella formata dal telescopio: si vede lo specchio Cassegrain illuminato dalla stella in modo che sembra ribollire per la scintillazione. Ma per ora tralasciamo questa difficoltà.

Consideriamo un elemento di superficie libera $\rho d\rho d\varphi$ del collimatore, ove ρ e φ sono le coordinate polari rispetto al centro. L'ampiezza di vibrazione inviata nella direzione θ è proporzionale, almeno in media nel tempo di qualche secondo, all'area $\rho d\rho d\varphi$. Quanto alla fase si osservi che il contributo dell'elemento in P è in anticipo del cammino δ rispetto al contributo dovuto ad un ipotetico elemento situato nel centro O .

Si ha dunque, ponendo uguale a zero la fase nel centro O, che il contributo di P è dato da:

$$(1) \quad \rho \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \overline{OH} \frac{\sin \theta}{\lambda} \right) d\rho d\varphi \quad \text{ove } T = \text{periodo,} \\ \lambda = \text{lunghezza d'onda.}$$

Ma è

$$(2) \quad \overline{OH} = \rho \cos \varphi$$

e perciò la (1) si trasforma nella

$$(3) \quad \rho \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\rho \cos \varphi \sin \theta}{\lambda} \right) d\varphi d\rho = \\ = \left[\rho \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{\rho \cos \varphi \sin \theta}{\lambda} + \rho \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{\rho \cos \varphi \sin \theta}{\lambda} \right] d\varphi d\rho.$$

Per trovare la vibrazione A (θ) sen $2\pi t/T$ nell'istante t nella direzione θ basta evidentemente integrare la (3) rispetto a φ tra 0 e 2π e rispetto a ρ tra r ed R.

$$(4) \quad \sin 2\pi \frac{t}{T} \int_0^{2\pi} \int_r^R \rho \cos 2\pi \frac{\rho \cos \varphi \sin \theta}{\lambda} d\varphi d\rho + \\ + \cos 2\pi \frac{t}{T} \int_0^{2\pi} \int_r^R \rho \sin 2\pi \frac{\rho \cos \varphi \sin \theta}{\lambda} d\varphi d\rho.$$

L'integrale è esprimibile a mezzo delle funzioni di Bessel e si trova notoriamente

$$(5) \quad A(\theta) = 2\pi \left[R^2 \frac{J_1(z_R)}{z_R} - r^2 \frac{J_1(z_r)}{z_r} \right]^{(2)}$$

ove

$$(6) \quad z = \frac{2\pi\rho \sin \theta}{\lambda} \quad z_r = \frac{2\pi r \sin \theta}{\lambda} \quad z_R = \frac{2\pi R \sin \theta}{\lambda}.$$

Da questa formula si può ricavare la distribuzione d'intensità nella centrica calcolando $A(\theta)^2$.

A titolo di esempio nel diagramma di fig. 2 è riportato l'andamento dell'intensità relativo alla combinazione del telescopio riflettore Zeiss di Merate con lo spettrografo Zeiss II. Il diametro dello specchio principale è di 102 cm,

(2) Se il collimatore non avesse la parte centrale schermata bisognerebbe porre $r = 0$. Allora i raggi dei cerchi scuri della centrica di diffrazione sono determinati dagli zeri della funzione di Bessel $J_1(z_R)$. Il primo zero si ha per $z_R = 3.8317$ e quindi per θ tale che

$$\frac{2\pi \sin \theta R}{\lambda} = 3.8317.$$

Approssimando il seno con l'arco, si ha la ben nota formula

$$\theta = \frac{3.8317 \lambda}{2\pi R} = 1,22 \frac{\lambda}{\text{diametro}}.$$

del secondario di 28 cm; la focale risultante è di 17,22 metri, a cui corrisponde un'apertura di $1/16,9$. Invece il collimatore dello spettrografo Zeiss II ha un diametro di 50 mm ed una focale di 880 mm., cioè ha un'apertura di $1/17,6$. Ciò equivale a dire che lo spettrografo sfrutta solo una parte dello specchio; per fortuna non si perde molto perché il diametro utile dello specchio risulta di 98 cm anziché 102. Proporzionalmente sul collimatore risulta allora

$$R = 25 \text{ mm} \qquad r = 7,2 \text{ mm.}$$

In fig. 2 il diagramma punteggiato si riferisce al caso attuale; quello a punti e linee invece corrisponde al caso normale in cui il collimatore è uniformemente illuminato, cioè $r = 0$.

La curva a trattini invece è il diagramma corrispondente al caso trattato da Van Cittert.

Determiniamo ora l'influenza che ha sulla centrica il fatto che non si ha una sola sorgente di onde sferiche (questo sarebbe il caso di una sorgente puntiforme posta nella fenditura) ma un insieme di sorgenti incoerenti disposte su una retta giacente nella fenditura, distante x dal suo asse. In analogia a quanto fatto precedentemente per θ e z_R cambiamo la scala di misura dell'angolo x/f ove f = focale del collimatore, in modo che se x/f è uguale alla semilarghezza della figura fondamentale di diffrazione, si ottenga nella nuova scala il valore π . Poniamo dunque

$$(7) \qquad \sigma = \frac{2\pi R}{\lambda} \frac{x}{f}.$$

Si avrà allora

$$(8) \qquad B(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\theta) dl$$

ove $B(\sigma)$ è l'intensità risultante e θ è l'angolo che la congiungente un segmento generico della retta sorgente con il punto in esame fa con la direzione della propagazione geometrica. A rigore bisognerebbe estendere l'integrale tra limiti finiti a causa dell'altezza finita di uno spettrogramma stellare; ma a causa della rapida convergenza a zero delle funzioni di Bessel rispetto a z_R , che è grande perché l'altezza dello spettro è assai maggiore del raggio fondamentale di diffrazione, si può con ottima approssimazione portare i limiti a $\pm \infty$.

Inoltre a causa della simmetria della funzione integranda basterà calcolare

$$(9) \qquad B(\sigma) = 2 \int_0^{\infty} A^2(\theta) dl.$$

Posto $r/R = \omega$ si ha dalla (5)

$$(10) \qquad B(\sigma) = 2 \int_0^{\infty} 4\pi^2 R^4 \left[\frac{J_1(z_R)}{z_R} - \omega^2 \frac{J_1(z_r)}{z_r} \right]^2 dl.$$

Siccome poi è sempre $\theta \ll 1$ si può porre

$$z_R^2 = \sigma^2 + l^2$$

e perciò

$$(11) \quad B(\sigma) = 8\pi^2 R^4 \int_0^\infty \left[\frac{J_1(\sqrt{\sigma^2 + l^2})}{\sqrt{\sigma^2 + l^2}} - \omega^2 \frac{J_1(\omega \sqrt{\sigma^2 + l^2})}{\omega \sqrt{\sigma^2 + l^2}} \right]^2 dl.$$

Una volta nota la funzione $B(\sigma)$ per trovare il profilo strumentale in w basta calcolare l'integrale

$$(12) \quad I(w) = \int_{w-\varepsilon/2}^{w+\varepsilon/2} B(\sigma) d\sigma$$

ove

$$(13) \quad \varepsilon = \frac{2\pi R}{\lambda} \frac{d}{f} \quad d = \text{larghezza della fenditura.}$$

Si vede che, a differenza di quello che succede nel caso più semplice della figura di diffrazione ed anche nel caso della centrica dovuto al diaframma circolare, in questo caso tra il primo ed il secondo massimo la I non scende al valore zero: ciò è dovuto al fatto che le intensità si sommano ed anche dove si aveva nel caso circolare $I = 0$, arrivano i contributi di centriche le quali hanno il centro distante quanto corrisponde ad esempio al secondo massimo; ne segue che nonostante l'effetto dello specchio Cassegrain il profilo di una riga spettrale è più diffuso di quanto risulterebbe dalla formula della diffrazione fondamentale.

La funzione $B(\sigma)$ può essere calcolata mediante la teoria delle funzioni analitiche nel piano complesso, ma è più semplice ricorrere alle quadrature numeriche ed è riportata nel diagramma di fig. 2 sotto forma di linea continua.

Si vede dunque dal diagramma della $B(\sigma)$ rispetto a quello corrispondente al caso fondamentale che, se per semilarghezza di una riga intendiamo la distanza z ove l'intensità della figura di diffrazione è la metà del massimo nel centro, la semilarghezza nel caso fondamentale è 0,445 raggi di centrica fondamentale; se si tiene conto dello specchio del Cassegrain, dell'altezza della fenditura, supposta assai più stretta del raggio della centrica, la semilarghezza sale al valore 0,493. Quindi il potere separatore viene peggiorato nel rapporto di 0,493/0,445 cioè del 10 %.

Più difficile è tener conto dell'effetto della scintillazione sul profilo strumentale; ciò essenzialmente per la mancanza di sicuri dati d'osservazione. Però sin d'ora si può asserire che essa ha influenza sul profilo strumentale in base alla falsità dell'ipotesi che l'ampiezza di vibrazione dell'onda sferica emergente dall'elemento di superficie del collimatore sia costante in tutti i suoi punti.

È intuitivo che ciò può produrre sia un allargamento che un restringimento della figura di diffrazione; è però facile vedere che in media si avrà un allargamento, che a stima deve risultare trascurabile. Ma se invece le varie zone dello specchio principale ricevessero radiazione incoerente per effetto

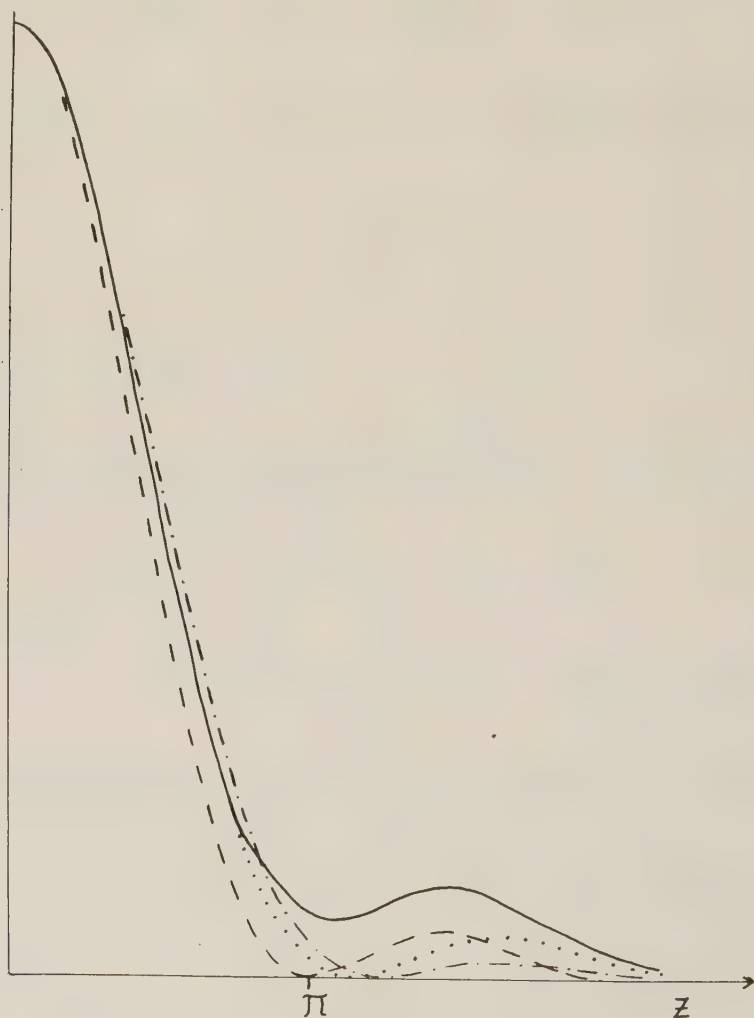


Fig. 2.

della differenza di cammino ottico nell'atmosfera, il risultato sarebbe molto alterato.

Ovviamente le complicazioni dovute alla scintillazione non sorgono nel caso della determinazione del profilo teorico di un microfotometro, anzi le formule si semplificano per la mancanza del dischetto centrale schermante; basta porre allora $r = 0$.

Chimica. — *Legami covalenti nei composti intermetallici. I composti PrGe e CaGe* (*). Nota di ALDO IANDELLI, presentata (**) dal Socio L. ROLLA.

Già molto tempo fa, Pauling mise in evidenza la possibilità di considerare il legame metallico come un particolare tipo di legame covalente non localizzato; e successivamente propose una relazione empirica fra il numero di elettroni partecipanti ad ogni legame e la distanza interatomica corrispondente. Le applicazioni della formula non hanno dato in molti casi risultati troppo soddisfacenti; il che non può stupire se si pensa che le caratteristiche metalliche di una sostanza non corrispondono ad un tipo di valenza unico, ma che si può avere insieme ad una certa percentuale di legame metallico, anche scambi di elettroni o formazione di legami covalenti. È questo carattere misto che fa sì che non si possano generalizzare regole come quelle di Hume-Rothery, e che d'altra parte non si possano nemmeno conservare quelle che valgono per i composti chimici ordinari.

Prima di qualunque discussione quantitativa sarebbe perciò molto utile di conoscere qualitativamente in che stato si trovano gli atomi nel composto, ed i primi indizi da considerare sono evidentemente quelli basati sulla loro disposizione nel reticolo. Ora, una conseguenza di un legame metallico generale, non localizzato, è la formazione di reticoli con alti numeri di coordinazione e generalmente con alta simmetria. Tutte le volte che questo non succeda, e che rispetto alle altre strutture possibili venga preferita una di quelle, in cui con diminuzione dei numeri di coordinazione, vengono a formarsi aggruppamenti di una delle specie atomiche presenti (si pensi, per gli elementi, alle strutture del Ge, Bi, Se per esempio) è logico pensare alla formazione di legami covalenti veri e propri fra gli atomi in questione.

Composti intermetallici di questo tipo non sono molto numerosi rispetto agli altri più normali, e solo da non molto tempo ne sono stati studiati alcuni rappresentanti. In una Nota precedente⁽¹⁾ sono stati descritti composti di formula MX_2 con strati esagonali di atomi X; in questa verranno riferite le strutture di due composti: PrGe e CaGe, nei quali si ha la formazione di catene di atomi X; e che rappresentano i primi di una serie molto numerosa, attualmente in corso di studio.

Il composto PrGe è stato identificato nello studio termico del diagramma Pr-Ge, nel quale è caratterizzato da un punto di fusione superiore a 1500° . Un campione assai puro ed in forma microcristallina è stato ottenuto da un blocchetto di una lega, più ricca di qualche % di Pr rispetto alla composizione teorica, che si è lentamente disfatto per lenta ossidazione all'aria. Il com-

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica fisica dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) A. IANDELLI, questi « Rendiconti », vol. XIX, fasc. 1-2, 2° sem., pp. 39-43 (1955).

posto CaGe è stato preparato per reazione dei due metalli a 1000° in crogiolo di ferro saldato e lentissimo raffreddamento fino a temperatura ambiente. La lega ottenuta era molto ben cristallizzata, ma assai più ossidabile all'aria di PrGe.

La determinazione della struttura è stata eseguita nel modo più completo per PrGe. Una lamina monocristallina di $0,8 \times 0,1$ mm. e di qualche centesimo di mm. di spessore ha dato fotogrammi di Laue indicanti la presenza di tre assi binari perpendicolari; e tre cristalli rotanti nelle tre direzioni hanno fornito i periodi corrispondenti per la cella rombica risultante. Valori più precisi delle costanti reticolari sono stati ricavati da fotogrammi del cristallo rotante ($K_\alpha\text{Cu}$), e da fotogrammi delle polveri ($K_\alpha\text{Fe}$) asimmetrici. È risultato: $a = 4,465$; $b = 11,076$; $c = 4,056$ kX.

Fotogrammi di Weissenberg hanno fornito le regole di estinzione che sono quelle generali caratteristiche del gruppo $Cm\ cm$ (D_{2h}^{17}). Dalla densità sperimentale: 6,78 si calcola un numero di molecole per cella elementare di $3,9 \cong 4$, e si trova facilmente dalle Tabelle internazionali che le uniche posizioni possibili sono rappresentate dalle 4 (c). Si hanno cioè, per ogni cella:

$$4 \text{ atomi Ge in: } Oy_1 \frac{1}{4}; O\bar{y}_1 \frac{3}{4}; \frac{1}{2} \frac{1}{2} + y_1 \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \frac{1}{2} - y_1 \frac{3}{4}$$

$$4 \text{ atomi Pr in: } Oy_2 \frac{1}{4}; O\bar{y}_2 \frac{3}{4}; \frac{1}{2} \frac{1}{2} + y_2 \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \frac{1}{2} - y_2 \frac{3}{4}$$

con due parametri y_1 ed y_2 da stabilire.

Per le riflessioni permesse, il fattore di struttura prende la forma:

$$|F| = (f_{\text{Ge}} \cos 2\pi ky_1 + f_{\text{Pr}} \cos 2\pi ky_2) \quad \text{per } l \text{ pari}$$

$$|F| = (f_{\text{Ge}} \sin 2\pi ky_1 + f_{\text{Pr}} \sin 2\pi ky_2) \quad \text{per } l \text{ dispari}$$

e da queste espressioni è stato possibile ottenere i valori di y_1 ed y_2 direttamente. Fotogrammi di Weissenberg intorno all'asse a hanno permesso infatti di ricavare i valori assoluti di F per gli indici $0\ k\ l$ ed $1\ k\ l$. Le due espressioni precedenti forniscono allora un sistema di equazioni nelle due incognite y_1 ed y_2 , con un numero di equazioni molto superiore a quello delle incognite; ma purtroppo non molto semplice a trattare analiticamente, data la loro forma trigonometrica. È stato possibile però trovare un metodo di soluzione grafico, nel modo seguente. Se il fattore di struttura è per esempio del primo tipo, e si disegnano con gli assi delle ascisse coincidenti le due curve $f_{\text{Ge}} \cos 2\pi ky_1$ e $f_{\text{Pr}} \cos 2\pi ky_2$ in funzione rispettivamente di y_1 ed y_2 , il segmento di ordinata compreso fra di loro dà evidentemente la somma dei due termini. Se le due curve sono disegnate su due fogli di carta trasparente e si fanno scorrere l'una rispetto all'altra, mantenendo coincidenti gli assi delle ascisse, si possono cercare le coppie di valori y_1 ed y_2 che soddisfano l'equazione, con un certo valore di $|F|$. Se si disegnano tutte le coppie di curve corrispondenti ai vari k , e si fanno scorrere contemporaneamente le une sulle altre si possono trovare i valori di y_1 ed y_2 che soddisfano simultaneamente nel modo migliore a tutte le equazioni ottenute.

TABELLA I.

PrGe: Intensità osservate e calcolate con $y_2 = 0,359$ e $y_1 = 0,0745$.

hkl	Intensità		hkl	Intensità		hkl	Intensità	
	calc.	oss.		calc.	oss.		calc.	oss.
020	0,5	—	222	0,2	—	191	5,9	—
110	0,4	—	260	0,0	—	223	24,3	mf
021	7,2	—	152	0,0	—	281		
111	44,6	ff	171	0,6	—	153	18,4	m ⁺
130	20,1	f	311	14,5	m ⁺	400		
040	11,0	mf	080	0,4	—	0.10.0	3,4	dd?
131	31,9	f ⁺	330	6,7	d	420	0,1	—
041	12,3	m ⁺	062	0,0	—	063	11,0	md
200	16,1	mf	261	14,5	m	370	25,4	mf
220	0,1	—	242	16,9	m ⁺	0.10.1	32,6	f
002	14,3	mf [—]	023	2,5	—			
150	0,0	—	081	22,8	mf	421	9,5	d
022	0,1	—	331			352	0,0	—
060	0,0	—	113	14,6	m	371	2,2	—
221	7,4	d	350	0,0	—	440	19,3	m ⁺
112	0,8	—	133	14,4	m	192	0,9	—
151	7,4	d	043	5,5	—	282	4,6	d
240	11,3	md	172	34,7	f	004	23,1	mf
061	9,0	d	312	0,7	—	441	32,8	f
132	16,7	md ⁺	190	0,2	—	173	2,0	—
042	10,4	d	351	6,1	—	313	26,0	mf
241	12,1	md	280	0,9	—	024	0,2	—
202	34,2	f ⁺	262	0,1	—	2.10.0	19,7	mmf
170			082	17,7	m			
310	1,3	—	332					

Con questo sistema è risultato per PrGe: $y_1 = 0,0745$; $y_2 = 0,359$; $a \pm 1\%$. Nella tabella I sono stati riportati i valori delle intensità ottenute dai fotogrammi delle polveri, che mostrano un buon accordo con quelli calcolati con i valori precedenti dei parametri.

Per CaGe la determinazione della struttura è stata eseguita dai soli fotogrammi delle polveri, che appaiono abbastanza simili a quelli di PrGe. Operando ogni volta su terne di righe ben misurabili si può usare il metodo di estrapolazione a $\theta = 90^\circ$, che si adopera normalmente per il sistema cubico, cominciando dalle prime righe del fotogramma alle quali per tentativi vengono assegnati gli indici. I valori finali ottenuti per estrapolazione a 90° sono: $a = 4,556$; $b = 10,815$; $c = 3,997 \text{ \AA}$ e la struttura appare la stessa di PrGe.

TABELLA II.

CaGe: Ricerca del valore migliore per y_2 : Intensità calcolate per $y_1 = 0,076$.

hkl	per $y_2 =$				hkl	per $y_2 =$			
	0,35	0,355	0,36	0,365		0,35	0,355	0,36	0,365
111	57,6	56,2	54,8	53,4	133	49,9	54,2	58,6	62,9
130	16,3	15,4	14,3	15,4	312	11,4	10,8	10,2	9,7
040	11,9	12,2	13,1	13,8	172	85,7	88,6	88,3	85,0
131	102,6	111,8	120,9	130,1	400	26,7	26,7	26,7	26,7
200	46,3	46,3	46,3	46,3	281	62,8	56,5	47,9	37,5
041	52,4	46,8	42,0	37,2	191	9,8	6,9	5,8	6,2
002	33,5	33,5	33,5	33,5	370	64,0	66,1	65,9	63,5
150	13,7	10,5	7,8	5,6	0.10.0	3,5	3,1	2,1	1,0
060	3,0	3,9	5,6	6,8	243	106,2	96,4	86,6	76,8
112	13,9	13,2	12,5	11,8	352	35,2	27,5	20,4	14,9
151	0,5	0,6	0,8	1,2	440	21,5	23,6	25,4	26,7
240	13,5	14,8	15,9	16,8	371	0,0	1,5	2,3	11,0
042	11,9	13,0	14,0	14,7	0.10.1	35,9	49,6	63,8	76,3
241	60,8	55,2	49,5	43,8	441	159,1	144,5	129,7	114,9
202	42,0	42,0	42,0	42,0	004	74,4	74,4	74,4	74,4
170	40,1	41,4	41,3	39,8	313	111,9	109,3	106,6	103,9
331	44,0	47,9	51,7	55,5					

TABELLA III.

CaGe: Intensità osservate e calcolate con $y_1 = 0,076$ e $y_2 = 0,362$.

<i>hkl</i>	Intensità		<i>hkl</i>	Intensità		<i>hkl</i>	Intensità	
	calc.	oss.		calc.	oss.		calc.	oss.
020	11,7	<i>md</i>	170	40,8	<i>f</i> ⁻	332	16,2	<i>d</i>
110	16,9	<i>m</i>	222	7,9	<i>d</i>	400	26,7	<i>md</i>
021	1,7	—	260	34,2	<i>m</i> ⁺	223	12,6	<i>d</i>
111	54,3	<i>f</i> ⁻	311			082		
130	13,8	<i>md</i>	330	15,6	<i>m</i>	281	46,2	<i>f</i> ⁻
040	13,4	<i>md</i>	152			191		
131	124,7	<i>ff</i>	171	3,4	—	420	5,0	—
200	46,3	<i>m</i> ⁺	080	0,9	—	153	1,2	—
041	40,4	<i>mf</i> ⁺	062	27,5	<i>m</i> ⁺	370	66,9	<i>f</i>
220	7,0	<i>d</i>	261			0.10.0		
002	33,5	<i>mf</i>	331	53,2	<i>mf</i> ⁺	421	22,1	<i>md</i>
150	6,8	<i>d</i>	242	25,0	<i>m</i> ⁺	063		
221	3,2	—	023	1,1	—	243	100,7	<i>f</i>
022	5,2	<i>d</i>	081	15,9	<i>m</i>	352		
060	18,0	<i>m</i>	113	26,7	<i>m</i> ⁺	440	99,3	<i>f</i>
112			350	4,6	<i>dd</i>	371		
151	17,2	<i>md</i>	133	70,4	<i>f</i>	0.10.1	123,8	<i>ff</i>
240			312			441		
061	13,5	<i>md</i>	043	23,3	<i>m</i>	282	12,7	—
132	15,4	<i>md</i>	351	0,9	—	192	21,2	?
042	61,5	<i>f</i>	172	83,4	<i>f</i>	004	180,0	<i>ff</i>
241			280	15,9	<i>d</i>	313		
202	42,0	<i>mf</i> ⁺	190			402	194,2	<i>ff</i>
310	4,6	—	262	19,8	<i>d</i>			

I parametri sono stati questa volta determinati dalle intensità dei fotogrammi delle polveri, calcolandole per varie coppie di valori di y_1 ed y_2 . In una prima serie è stato cercato il valore migliore di y_1 , facendolo variare da

0,66 a 0,080 e tenendo costante y_2 . Il valore migliore è risultato $y = 0,076$, e con questo sono state calcolate le intensità per $y_2 = 0,350$; 0,355; 0,360; 0,365 (vedi tabella II). I valori finali migliori sono risultati: $y_1 = 0,076$; $y_2 = 0,362$, con i quali è stata calcolata la tabella III, nella quale sono riportate le intensità osservate ⁽²⁾.

Il tipo di struttura trovato per PrGe e CaGe è stato osservato per primo da E. Hellner ⁽³⁾ per il composto CaSi, e ne era noto finora un altro solo rappresentante (ThAl). Nella figura 1 sono disegnate due sezioni della cella elementare di PrGe con piani $x = 0$ ed $x = 1/2 a$. Ogni atomo di Ge (cerchi

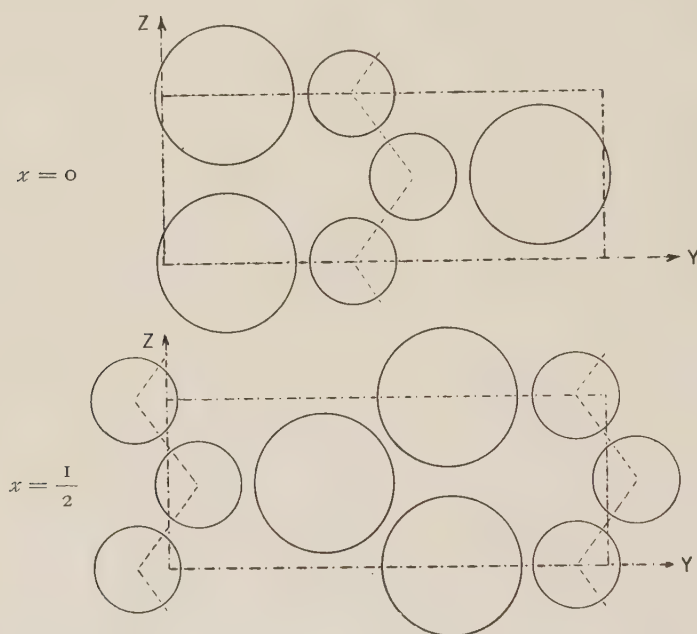


Fig. 1. - PrGe Sezioni della cella el. $x = 0$; $x = 1/2$.

piccoli) ha solo due atomi della stessa specie vicini, a distanza d_1 ; ed è circondato da 4 + 1 atomi Pr a distanze circa uguali fra di loro: d'_1 e d''_1 . Ogni atomo Pr ne ha intorno due a distanza d_2 , altri 4 (Pr) a distanza d'_2 poco diversa dalla precedente; ed inoltre 4 + 1 Ge a distanze d'_1 e d''_1 . I valori corrispondenti per i due composti sono i seguenti:

	a (kX)	b	c	y_1	y_2	d_1	d'_1	d''_1	d_2	d'_2
PrGe	4,465	11,076	4,056	0,074 ₅	0,359	2,63	3,11	3,14	3,73	3,87
CaGe	4,556	10,815	3,997	0,076	0,362	2,60	3,11	3,12	3,56	3,92

(2) P. ECKERLIN, dell'Eduard Zintl Institut di Darmstadt, al quale avevo comunicato, insieme ad altri, i risultati precedenti, mi ha scritto di avere anch'egli trovato, nello studio dei composti formati dal Ca col Ge lo stesso composto CaGe, con valori delle costanti e dei parametri vicinissimi a quelli riportati nel presente lavoro.

(3) E. HELLNER «Zeit. anorg. allgem. Chem.», 261, 226 (1950).

La stabilità della struttura appare legata alla tendenza degli atomi di Ge a formare catene piane, in mezzo alle quali vanno a disporsi gli atomi più grandi (Pr o Ca), in modo da circondarsi del numero maggiore di atomi dell'altra specie.

Vari altri composti dello stesso tipo sono in corso di studio e fra questi vanno rammentati: PrGa, CaGa, SrGe, CaSn, SrSn, e BaPb per i quali vengono attualmente cercati i valori più precisi dei parametri y_1 ed y_2 . Anche in questi casi, tuttavia esistono le catene di atomi X, che possono formarsi quindi anche fra atomi con caratteristiche metalliche molto più spiccate del Ge, come Ga, Sn e Pb.

Zoologia. — *Rigenerazione e azione toracizzante nel polichete ermafrodita « Salmacina incrustans »* (*). Nota di FULVIO RANZOLI, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Il serpulide *Salmacina incrustans* è dotato di una elevata capacità rigenerativa, come hanno dimostrato numerose osservazioni compiute in questi ultimi anni: tagli effettuati a vari livelli, su esemplari ben sviluppati, hanno avuto come esito la ricostituzione delle parti mancanti sia ai monconi anteriori che a quelli posteriori, con la formazione di organismi completi. La velocità di rigenerazione è tanto maggiore quanto più grande è il numero di metameri che costituiscono il frammento (*).

Un tale potere rigenerativo e in particolare quello dei monconi posteriori, può essere utilizzato per studiare i problemi della sessualità e dell'origine e differenziamento delle cellule germinali in questo Serpulide, che matura i propri gameti, dapprima maschili e più tardi di ambo i sessi, nel tratto anteriore dell'addome (fig. 1). Infatti, non appena la ferita si è rimarginata, dai monconi posteriori si formano *ex novo* l'estremità cefalica e i primi due segmenti del torace; questo raggiunge poi la normale lunghezza di 8-10 metameri, per trasformazione di un numero adeguato di metameri addominali. Pure dalla trasformazione di preesistenti segmenti addominali si origina la zona acheta, fra il torace e l'addome.

Per le ricerche che abbiamo in corso i più adatti sono i frammenti posteriori ottenuti sezionando le Salmacine a livello della zona acheta, perché sono abbastanza lunghi per avere una rapida rigenerazione, mentre la mag-

(*) Ricerche eseguite presso il Centro di Studio per la Biologia alla Stazione Zoologica di Napoli e l'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Modena.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) M. LA GRECA, *Autotomia, moltiplicazione e rigenerazione in « Salmacina incrustans »* Clap., « Arch. Zool. it. », vol. 31, p. 239 (1947); E. VANNINI, *Neoblasti e rigenerazione dei segmenti genitali nel serpulide ermafrodita « Salmacina incrustans »* Clap., « Atti Ist. Veneto S. L. A. », vol. 105, p. 50 (1947); M. LA GRECA, *Ricerche sulla rigenerazione dei Serpulidi*, « Arch. Zool. it. », vol. 37, p. 61 (1952); M. LA GRECA, *I fenomeni di rigenerazione nei Policheti Sabellimorfi*, « Ann. Ist. Sup. Sci. Lett. S. Chiara Napoli », N. 4 (1953); E. VANNINI e F. RANZOLI, *Rigenerazione, schizogonia e maturazione sessuale nel polichete ermafrodita « Salmacina incrustans »*, « Boll. di Zool. », vol. 21, p. 467 (1954).

gior parte dei metameri addominali che portavano gameti vengono a trovarsi spostati e trasformati, nell'animale rigenerato, in porzione toracica e acheta. L'addome residuo rimane pertanto sprovvisto di gameti ed è interessante studiare come se ne formino di nuovi in quelli che sono divenuti i primi segmenti addominali. Se non che, durante gli esperimenti relativi, si è osservato in un notevole numero di esemplari, rigenerati da monconi posteriori, uno sviluppo eccessivo della regione toracica che raggiungeva una lunghezza più che doppia del normale (fig. 2). Il processo di trasformazione di segmenti addomi-



Fig. 1. - Esemplare adulto in fase ermafrodita; la freccia indica la zona acheta, cui seguono il tratto maschile e quello femminile dell'addome.



Fig. 2. - Esemplare rigenerato da moncone posteriore, con un numero di metameri toracici più che doppio del normale.

nali in toracici evidentemente non si arrestava, per oscuri motivi, al momento giusto. Si ritiene generalmente che il centro induttore di tale trasformazione risieda nella zona cefalica ⁽²⁾; secondo Berrill e Mees, che studiarono questi problemi in *Sabella pavonina* ⁽³⁾, detto centro sarebbe sensibile ad un'azione iperattivante della luce: di modo che gli animali, che hanno rigenerato la testa, riformerebbero un torace di lunghezza normale solo se allevati all'oscuro, protetti dalla luce così come lo sono dal tubulo in cui vivono normalmente.

(2) N. J. BERRILL, *Regeneration in «Sabella pavonina» (Sav.) and other Sabellid worms*, « Journ. Exper. Zool. », vol. 58, p. 495 (1931); N. J. BERRILL e D. MEES, *Reorganization and regeneration in «Sabella»*. I. *Nature of gradient, summation and posterior reorganization*, « Journ. Exper. Zool. », vol. 73, p. 67 (1936); M. LA GRECA, op. cit. (1947, 1952, 1953).

(3) N. J. BERRILL e D. MEES, *Reorganization and regeneration in «Sabella»*. II. *The influence of temperature*. III. *The influence of light*, « Journ. Exper. Zool. », vol. 74, p. 61 (1936).

Una analoga spiegazione si potrebbe adottare per la toracizzazione eccessiva di *Salmacina*, descritta da La Greca e da Vannini; per quanto non sia certo pensabile un'efficace azione schermante da parte dei sottili e bianchi tubi calcarei verso la luce, che è piuttosto intensa nei fondali di bassa profondità su cui vive la *Salmacina incrustans*. Ho quindi voluto vedere se fosse stato possibile raccogliere una conferma sperimentale che autorizzasse ad estendere alle Salmacine le conclusioni dei predetti Autori e, a tale scopo, ne ho sezionato duecento esemplari adulti ermafroditi a livello della zona acheta e ne ho lasciato rigenerare gli addomi in ambiente a temperatura costante. Un gruppo di cento addomi è stato tenuto nell'oscurità per tutto il periodo dell'esperimento, mentre i rimanenti vennero illuminati per sedici ore al giorno con un tubo fluorescente. Tutte le altre condizioni di allevamento erano invece le stesse per i due gruppi e corrispondevano rigorosamente a quelle praticate nelle precedenti esperienze, pure condotte presso la Stazione Zoologica di Napoli e con materiale della stessa provenienza.

La cicatrizzazione della ferita e la rigenerazione non si sono svolte con eguale prontezza nei due gruppi. Negli animali tenuti alla luce, in un primo tempo si è avuta una elevata mortalità, dovuta principalmente alla lentezza della rimarginazione e all'infestazione da parte di muffe; gli esemplari sopravvissuti hanno però riacquisito presto il ritmo rigenerativo constatato nelle precedenti esperienze. La mortalità iniziale fra le Salmacine allevate all'oscuro è stata più ridotta e le condizioni generali più soddisfacenti; benché al termine dell'esperienza avessero cominciato a declinare, la sopravvivenza è stata quasi doppia rispetto all'altro gruppo. Dopo quaranta giorni dall'amputazione tutti gli esemplari sono stati esaminati e ne è stato computato il numero di metameri toracici e addominali; i dati ottenuti sono riuniti nelle tabelle I e II: nella I è messa a confronto la lunghezza del torace tra le Salmacine tenute all'oscuro e alla luce; nella II lo stesso vien fatto per la lunghezza dell'addome.

Si può così notare, contrariamente a quanto ci si sarebbe potuto attendere per analogia con *Sabella pavonina*, come una elevata incidenza di toracizzazioni abnormi si sia verificata anche tra gli animali tenuti all'oscuro. Non solo, ma fra questi si trovano in pari numero toraci di lunghezza normale e doppia e sono pure presenti gli individui con il massimo numero di segmenti. Si potrebbe obiettare che ciò dipenda dalla maggiore rapidità di rigenerazione rispetto alle Salmacine esposte alla luce; ma tale evenienza, come ho già detto, si è riscontrata solo inizialmente; infatti nei due gruppi è uguale il numero di esemplari con torace formato da meno di sei segmenti; inoltre fra quelli tenuti alla luce è maggiore il numero dei metameri addominali, per cui la lunghezza complessiva dell'animale è circa la stessa. Che il numero dei metameri toracici e addominali fosse inversamente proporzionale si era già osservato nelle precedenti esperienze; per comprendere il meccanismo della toracizzazione è invece più interessante il confronto con i dati relativi agli individui schizogonici ottenuti nell'estate del 1952.

TABELLA I.

Frequenze dei monconi posteriori di Salmacina, rigenerati in ambiente oscuro e illuminato; divisi in classi in base al numero di segmenti toracici.

Ambiente	Numero dei segmenti toracici														Numero medio segmenti
	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	17-18	19-20	21-22	23-24	25-26	27-28	29-30	
Oscuro	1	6	10	8	9	2	10	2	6	1	3	—	—	1	12,6
Illuminato	3	4	10	7	3	5	2	—	2	1	—	—	—	—	9,9

TABELLA II.

Frequenze dei monconi posteriori di Salmacina, rigenerati in ambiente oscuro e illuminato; divisi in classi in base al numero di segmenti addominali.

Ambiente	Numeri dei segmenti addominali											Numero medio segmenti
	3-6	7-10	11-14	15-18	19-22	23-26	27-30	31-34	35-38	39-42	43-46	
Oscuro	2	7	8	7	14	8	6	5	1	—	1	19,9
Illuminato	—	1	6	2	6	6	10	4	2	—	—	23,9

TABELLA III.

Frequenze degli schizozoidi originatisi dai monconi anteriori e posteriori di Salmacine rigenerate e di quelli staccati da Salmacine immature e sessuate; divisi in classi in base al numero di segmenti toracici.

Schizozoidi provenienti da	Numero dei segmenti toracici												
	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	17-18	19-20	21-22	23-24	25-26	27-28	29-35
Monconi anter. II tipo	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Monconi anter. III tipo	I	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Monconi anter. IV tipo	—	43	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Monconi poster. I tipo	I	—	—	—	—	—	—	I	—	—	—	—	I
Monconi poster. II tipo	I	3	—	—	I	—	I	—	I	—	I	—	—
Monconi poster. III tipo	—	2	I	I	I	—	—	—	—	—	—	—	—
Immaturo	9	68	11	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Maschi	4	34	6	2	2	—	—	I	—	—	—	—	—
Ermafroditi	I	18	16	3	2	2	2	—	—	—	—	—	—

TABELLA IV.

Frequenze degli schizozoidi originatisi dai monconi anteriori e posteriori di Salmacine rigenerate e di quelli staccati da Salmacine immature e sessuate; divisi in classi in base al numero di segmenti addominali.

Schizozoidi provenienti da	Numero dei segmenti addominali							
	3-6	7-10	11-14	15-18	19-22	23-26	27-30	31-34
Monconi anter. II tipo .	—	—	—	4	5	1	—	—
Monconi anter. III tipo .	—	—	—	4	4	2	—	—
Monconi anter. IV tipo .	2	5	5	19	10	2	—	—
Monconi poster. I tipo .	—	2	—	—	—	1	—	—
Monconi poster. II tipo .	—	1	1	4	1	—	1	—
Monconi poster. III tipo .	—	—	—	4	1	—	—	—
Immaturi	—	4	17	32	23	10	5	—
Maschi	—	4	7	16	6	12	4	—
Ermafroditi	—	1	6	4	16	16	1	—

In *Salmacina* la schizogonia si manifesta nel tratto posteriore dell'ad-

dome (fig. 3), dietro ai segmenti in cui maturano i gameti⁽⁴⁾. Nei nostri esperimenti si erano allora allevati sei gruppi di schizozoidi separatasi spontaneamente dai monconi anteriori e posteriori di Salmacine in rigenerazione; nonché altri tre gruppi di individui schizogonici ottenuti staccandoli con gli aghi da Salmacine immature, di sesso maschile ed ermafrodite, producendo così una parziale lesione alla regione cefalica. I dati ricavati al termine dell'esperimento, dal conteggio dei metameri toracici e addominali, sono riportati nelle tabelle III e IV. Già ad un primo esame si osserva uno sviluppo normale del torace solo negli schizogonici originatisi da monconi anteriori di tre lunghezze diverse; quelli originatisi dai tre tipi di monconi



Fig. 3. - Esemplare adulto in fase maschile e riproduzione asessuale; la freccia indica l'estremità anteriore dello schizozoide.

(4) E. VANNINI, *Studi sulla sessualità e sui poteri rigenerativi nel polichete ermafrodita « Salmacina incrustans » Clap. - I. Osservazioni sul ciclo riproduttivo sessuale e asessuale*, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 22, p. 211 (1950).

posteriori ⁽⁵⁾ e quelli staccati da Salmacine immature e sessuate presentano invece il fenomeno della toracizzazione esagerata (figg. 4 e 5).

A questo punto vien fatto di chiedersi cosa abbiano in comune i segmenti posteriori, rigeneranti le regioni toracica e cefalica, con una parte degli schizozoidi delle precedenti esperienze, che possa averne esteso la toracizzazione ad un numero di segmenti maggiore del normale. Penso non possa trattarsi che del trauma alla regione cefalica, che ha esercitato una propria azione direttamente negli individui la cui testa è stata lesa o asportata, oppure indirettamente negli schizozoidi originatisi dai monconi posteriori. Il quadro completo è infatti il seguente: non si toracizzano oltre i limiti normali le Sal-



Fig. 4. - Esemplare schizogonico staccatosi spontaneamente da un moncone posteriore rigenerato; il numero di metameri toracici è doppio del normale.



Fig. 5. - Esemplare schizogonico staccato con aghi da *Salmacina* ermafrodita; il numero dei metameri toracici, dopo 50 giorni, è salito a 18 e i primi segmenti addominali contengono gameti maschili.

macine rigenerate dai monconi anteriori di nessun tipo, la cui testa non era stata toccata, né gli individui schizogonici da esse formati in un secondo tempo; si toracizzano oltre i limiti normali le Salmacine provenienti da rigenerazione di monconi posteriori (allevate alla luce o nell'oscurità), i loro schizozoidi, nonché quelli originatisi spontaneamente su Salmacine immature o sessuate, ma staccati, con gli aghi, prima della loro completa formazione.

Mi sembra quindi confermato che anche in *Salmacina* l'azione induttrice della trasformazione di segmenti addominali in segmenti toracici risieda

(5) Nel 1952, come nelle precedenti esperienze del Vannini, si erano tagliate le Salmacine ermafrodite a quattro diversi livelli: I, fra il quarto e il quinto segmento toracico; II, nella zona acheta; III, dopo quella maschile; IV, dopo quella femminile. Vennero allevati tutti i frammenti anteriori e posteriori, ma si originarono schizozoidi solo dai segmenti anteriori ottenuti dal II, III, IV tipo di taglio e dai posteriori del I, II, III tipo.

nella regione cefalica. Tale azione è più intensa o di maggiore durata quando la regione cefalica è neoformata per rigenerazione della parte anteriore, oppure se ha riparato una lesione parziale; una volta cessata l'induzione, l'esemplare con torace allungato può maturare gameti nei primi metameri addominali (fig. 5), come di norma ⁽⁶⁾. L'azione induttrice si esplica anche sulle Salmacine che si stanno sviluppando per schizogenesi all'estremità dell'addome dei monconi posteriori appena rigenerati: tale effetto a distanza, che si manifesta toracizzando i metameri addominali di un nuovo individuo che si forma spontaneamente e senza subire lesioni, fa pensare che si tratti di uno stimolo di natura umorale. La luce non ha però nessuna influenza iperattivante sullo svolgimento del fenomeno.

Fisiologia vegetale. — *Auxine, antiauxine e ossidazione dell'acido ascorbico in preparati mitocondriali di «Pisum sativum»* ^(*).
Nota di ERASMO MARRÈ e ORESTE ARRIGONI, presentata ^(**) dal Socio S. TONZIG.

È stato precedentemente rilevato come diverse auxine esplichino una azione di controllo sull'ossidazione dell'acido ascorbico sia *in vivo* [1] che *in vitro* [2, 3]. Esperienze condotte su preparati enzimatici a grado di purificazione relativamente elevato individuano nell'effetto inibente delle auxine sull'ascorbico ossidasi il meccanismo d'azione del fenomeno [4]. L'interesse di questi reperti, da un punto di vista funzionale, deriva dalla possibilità che essi offrono di collegare i dati precedentemente raccolti sull'azione fisiologica dell'acido ascorbico con quelli relativi all'azione fisiologica delle auxine: in quanto essi suggeriscono che molti tra gli effetti degli ormoni di crescita possano interpretarsi come secondari ad un'azione diretta, primaria, dell'auxina sul ricambio dell'acido ascorbico [5].

I risultati esposti nella presente Nota portano un'ulteriore, significativa conferma all'ipotesi che l'azione dell'auxine sul metabolismo dell'acido ascorbico costituisca un momento essenziale del meccanismo per cui queste sostanze regolano la funzionalità della cellula vegetale. Essi infatti, mentre da un lato dimostrano come l'effetto inibente delle auxine sull'ossidazione dell'ascorbico sia ben rilevabile anche su preparati mitocondriali (e cioè in organelli che conservano, strutturalmente, molte delle caratteristiche proprie del citoplasma organizzato), dall'altro portano una prima indicazione circa la specificità di questa azione: dimostrando come la capacità di inibire l'ossidazione dell'acido ascorbico, che appare costante in tutti i composti saggiati ad azione auxinica positiva, sia per contro assente o molto ridotta per altre

(6) E. VANNINI e F. RANZOLI, op. cit. (1954).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

sostanze, anche strutturalmente simili ai primi, ma ad azione fisiologica nulla od opposta a quella auxinica (antiauxine).

MATERIALI E METODI.

Tra le auxine a disposizione abbiamo scelto gli acidi indolacetico (IA) (Merck) naftilacetico (NA) (Merck), p-clorofenossiacetico (PCPA) (Eastman) come rappresentanti dei tre principali gruppi chimici cui questi ormoni appartengono. Come antiauxine abbiamo usato gli acidi trans-cinnamico (TC) (Merck) e tri-iodobenzoico (TIBA) (Merck), il dicloroanisolo (DCA) (NBC) e l'idrazide maleica (MH) (Eastman).

L'azione di questi composti è stata studiata su preparati mitocondriali ottenuti dalla parte apicale (circa 1 cm.) di piantine ziolate di pisello (*Pisum sativum* v. Alaska coltivate per 7 giorni a 25 gradi C., in camera oscura. La tecnica seguita nell'allestimento dei preparati è stata quella precedentemente descritta [6]. In tutte le esperienze i mitocondri, dopo la prima centrifugazione a $20000 \times g$, sono stati sottoposti a un lavaggio in saccarosio 0,5 M. Tutte le operazioni fino all'inizio dell'incubazione con substrato sono state condotte in camera refrigerata. La determinazione dell'attività ascorbico-ossidasi, in presenza o assenza delle auxine e antiauxine, è stata eseguita secondo la tecnica precedentemente descritta [4].

ESPERIENZE E RISULTATI.

I dati della Tabella I dimostrano come la reazione dell'attività ascorbico-ossidasi in preparati mitocondriali alle tre auxine usate, sia sostanzialmente identica a quella già rilevata [4] per l'ascorbico-ossidasi di preparati enzimatici ottenuti purificando, secondo Powers et al. [7], la frazione solubile del plasma: consista cioè in una netta diminuzione dell'attività che per tutti e tre gli ormoni, alla concentrazione usata, oscilla intorno al 30%.

Nelle esperienze della Tabella II abbiamo studiato il rapporto tra concentrazione in auxina (IA) e effetto inibente sull'ossidasi. I dati dimostrano come l'inibizione, da una zona di massimo per le concentrazioni tra 10^{-4} M e 10^{-5} M, si attenui quindi gradualmente per quelle minori, apparendo ancora ben sensibile nella zona tra 10^{-6} M e 10^{-7} M, e scomparendo solo per valori in auxina estremamente bassi (10^{-8} M). Dati che sembrano ben significativi dal punto di vista fisiologico, in quanto dimostrano la coincidenza tra gamma di concentrazioni attive sull'enzima qui studiato *in vitro* e gamma di concentrazioni attive *in vivo* sulla crescita.

I dati della Tabella III dimostrano come le antiauxine studiate a concentrazioni ed in condizioni sperimentali pari a quelle per cui le auxine mostrano il massimo di attività, appaiano invece praticamente sprovviste di azione sull'ascorbico-ossidasi (con la possibile riserva di una lieve attività per l'acido trans-cinnamico).

TABELLA I.

Azione degli acidi indolacetico, naftilacetico e p-clorofenossiacetico sull'ossidazione dell'acido ascorbico in preparati mitocondriali di pisello.

Composizione dell'incubato: Mitocondri, quantità corrispondente a 1 gm peso fresco per prova. Tampone TRIS 0.1 M, pH 7.3. AA 0.1 %. Vol. fin. 5 cc. Dosaggi su 1 cc. Temp. 20° C. Prove agitate al ritmo di 60 oscillazioni/min. pr. Dati come media di 2 determinazioni.

Aggiunte	AA ossidato in 5 min. pr. (per cc.)	Inibizione
Nessuna (controlli)	134	—
IA 10^{-5} M	90	32 %
NA 10^{-5} M	87	35 %
PCPA 10^{-5} M	96	28 %

TABELLA II.

Azione dell'acido indolacetico (AIA) sull'ossidazione dell'acido ascorbico (AA) in preparati mitocondriali di pisello.

Comp. dell'incubato: mitocondri lavati 2 volte, quantità corrispondente a 0.9 gm peso fresco per prova. Tampone TRIS 0.1 M, pH 7.3. AA 1000 γ /cc. - Vol. fin. 5 cc. Dosaggi su 1 cc. Temp. 20° C. Prove agitate al ritmo di 60 oscillazioni/min. pr. - Dati come medie di 2 determinazioni.

Concentrazione in AIA	γ AA ossidato dopo 5 min. pr. (per cc)	Inibizione
O (controlli)	105	—
I, $1 \cdot 10^{-8}$ M	106	0
I, $1 \cdot 10^{-7}$ M	95	9 %
I, $1 \cdot 10^{-6}$ M	85	18 %
I, $1 \cdot 10^{-5}$ M	76	27 %
I, $1 \cdot 10^{-4}$ M	69	31 %

TABELLA III.

Azione di alcune auxine e antiauxine sull'attività ascorbico ossidativa in preparati mitocondriali di pisello.

Composizione dell'incubato: mitocondri lavati 2 volte, quantità corrispondente a 1 g_m peso fresco per prova. Tampone TRIS 0,1 M, pH 7, AA 1000 γ /cc. Vol. fin. 5 cc. Dosaggi su 1/cc. Temperatura 20°C. Prove agitate al ritmo di 60 oscillazioni m. pr. Dati come medie di 2 determinazioni.

Aggiunte	γ AA ossidato in 5 min. pr.	Inibizione
(—) Controlli.	114	—
AIA 10^{-5} M	90	21 %
NAA 10^{-5} M	85	25 %
Tr. cinnamico 10^{-5} M	107	6 %
TIBA 10^{-5} M	114	—
DCA 2×10^{-5} M	112	2 %
Idrazide maleica 10^{-5} M	112	2 %

CONCLUSIONI.

I risultati di queste esperienze possono riassumersi dicendo che l'effetto delle auxine e delle antiauxine sull'ossidazione dell'acido ascorbico, in preparati mitocondriali mostra un ben singolare parallelismo con quanto è noto circa l'azione *in vivo* di queste sostanze sulla crescita e altri processi fisiologici a questa collegati (respirazione, assunzione d'acqua, ecc.). Infatti mentre, da un lato, praticamente identico risulta il campo delle concentrazioni attive, dall'altro ben difficile appare il considerare come una fortuita coincidenza il fatto che, tra le diverse sostanze saggiate, tutte e soltanto quelle attive sulla crescita inducano, a concentrazioni d'ordine fisiologico, un chiaro effetto sull'ossidazione dell'acido ascorbico. E non è necessario sottolineare quanto tale parallelismo rafforzi l'ipotesi che l'azione sul metabolismo dell'ascorbico costituisca un importante anello nella catena di reazioni per cui le auxine regolano, con la crescita, la funzionalità della cellula vegetale.

Da un altro punto di vista, i risultati qui esposti aprono la via ad ulteriori, suggestive ricerche. È noto che *in vivo* la caratteristica essenziale delle antiauxine è quella di antagonizzare, attraverso un meccanismo presumibilmente competitivo (McRae ed altri [8]), l'azione delle auxine. È quindi evidente che l'eventuale rilevamento di un effetto competitivo tra auxine e antiauxine

a livello dell'ascorbico-ossidasi potrebbe portare a risultati di grande interesse non solo per quanto riguarda il meccanismo d'azione dell'auxina e il senso fisiologico del suo effetto inibente sull'ossidazione dell'ascorbico, ma anche ai fini di una chiarificazione dello spinoso problema dei rapporti tra auxine e antiauxine.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., 16, 758 (1954).
- [2] I. H. MILLER and R. H. BURRIS, « Am. Journ. Bot. », 38, 547 (1951).
- [3] O. ARRIGONI ed E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., 17, 390 (1954).
- [4] E. MARRÈ ed O. ARRIGONI, *ibid.*, 18, 539 (1955).
- [5] S. TONZIG ed E. MARRÈ, in corso di stampa.
- [6] E. MARRÈ e C. DUGNANI, « N. Giorn. Bot. It. », n. s., 61, 214 (1954).
- [7] W. H. POWERS, S. LEWIS and C. R. DAWSON, « Journ. Gen. Phys. », 27, 167 (1944).
- [8] D. H. McRAE and J. BONNER, « Physiol. Plantarum », 6, 485 (1953).

Fisiologia. — *Colina e sviluppo sessuale del pollo* (*). Nota (**) di GIUSEPPE ALIBRANDI, presentata dal Socio C. CIACCIO.

L'alimentazione latteca esclusiva determina nei polli in accrescimento un completo arresto dello sviluppo sessuale ⁽¹⁾ ⁽²⁾.

Questa peculiare azione dell'alimentazione latteca sinora non è stata corretta da alcuna sostanza di costituzione chimica ben definita ⁽³⁾ ⁽⁴⁾. Che questa azione sia dovuta ad una carenza è dimostrato dal fatto che l'aggiunta al latte di una quantità di polvere di germe di grano sgrassata corrispondente al 9 % del residuo secco del latte permette il completo sviluppo sessuale dei polli in esperimento ⁽⁵⁾.

Con le presenti esperienze ci siamo proposti di ricercare se qualche sostanza chimicamente ben definita aggiunta al latte possa impedire il manifestarsi di questa tipica castrazione alimentare.

Abbiamo studiato l'eventuale effetto della colina in tal senso. Abbiamo scelto la colina perché è noto come il fabbisogno alimentare di questo aminoalcoole è per i polli assai elevato, aggirandosi intorno al grammo e mezzo per ogni chilogrammo di alimento ⁽⁶⁾. Una prova che la colina rappresenti un fattore essenziale per il pollo è rappresentata dal fatto che quando la dieta ne è priva la somministrazione di manganese non è più capace di prevenire l'insorgenza della perosi dei pulcini.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della Università di Messina.

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 settembre 1955.

(1) G. MARTINO, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 9, 217 (1934).

(2) E. FULCHIGNONI e A. ALIBRANDI, « Quaderni della Nutrizione », 4, 105, (1937).

(3) A. ALIBRANDI, « Reale Accademia d'Italia: Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat. », 1, 77, (1939).

(4) A. ALIBRANDI, « Arch. Fisiol. », 44, 163 (1945).

(5) G. ALIBRANDI, questi « Rendiconti », 11, 116, (1951).

(6) F. USUELLI, « Rivista di Zootecnia », n. 7 1950 (p. 11 dell'estratto).

Usando tecniche descritte nei lavori sopra citati abbiamo sottoposto tre gruppi di polli maschi di due mesi di età ad alimentazione lattea mediante polvere di latte intero preparata col metodo Krause.

Un gruppo di animali riceveva solo latte in impasto semidenso ed acqua a volontà.

Un secondo gruppo veniva veniva assoggettato al medesimo trattamento ma al latte venivano aggiunte vitamine e sali minerali che nelle precedenti esperienze non si erano dimostrati capaci di correggere questa peculiare carenza.



Fig. 1. - Pollo di sei mesi di età appartenente ai controlli alimentati con grano, mais, verdure e polvere di latte intero integrata con sali minerali, vitamine e colina.

Il terzo gruppo riceveva la medesima dieta del secondo ed in più un grammo e mezzo di colina ⁽⁷⁾ per ogni 125 grammi di polvere di latte, vale a dire per ogni chilogrammo di latte ricostituito.

L'aggiunta di colina non parve per nulla agevolare lo sviluppo sessuale dei polli pur contribuendo a migliorarne lo sviluppo ponderale e le condizioni generali di salute rispetto agli animali degli altri due gruppi e specialmente agli animali del primo.

Tutti gli animali furono sacrificati al sesto mese di età allorché controlli della stessa razza e della stessa covata, tenuti a dieta libera di grano, mais,

(7) La colina veniva somministrata come cloridrato.

verdure e polvere di latte intero integrata come per gli animali del terzo gruppo, erano tutti già sessualmente maturi.

Anche questa volta l'arresto dello sviluppo sessuale venne confermato dall'esame istologico delle gonadi che non dimostrò alcuna differenza tra gli animali del secondo e del terzo gruppo.



Fig. 2. - Pollo di sei mesi di età appartenente al terzo gruppo di animali, alimentati con polvere di latte intero integrata con sali minerali, vitamine e colina.

La figura 1 rappresenta un controllo dell'età di sei mesi.

La figura 2 un pollo del terzo gruppo della medesima età.

Fisiologia. — *La inibizione propriocettiva riflessa come causa dell'atonìa fastigiale* (*). Nota di GIUSEPPE MORUZZI e OTTAVIO POMPEIANO, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Da precedenti ricerche [Moruzzi e Pompeiano⁽¹⁾], eseguite su Gatti decerebrati, era risultato che: *a*) la lesione del polo caudale del nucleo del tetto di un lato fa scomparire o riduce fortemente la rigidità estensoria negli arti contralaterali; *b*) il quadro di atonia estensoria è pressoché identico, ma ipsilaterale alla lesione, quando questa distrugge la parte rostrale del nucleo del tetto; *c*) pure ipsilaterale alla lesione è l'atonìa prodotta da distruzione fastigiale totale [conferma di Sprague e Chambers⁽²⁾]; *d*) lesioni fastigiali parziali,

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Pisa e di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Rendiconti Accad. Lincei », XVIII, 420 (1955).

(2) J. M. SPRAGUE e W. W. CHAMBERS, « J. Neurophysiol. », XVI, 451 (1953).

simmetricamente eseguite, non determinano mai atonia estensoria, ma lasciano sussistere, in ambo i lati, la tipica rigidità da decerebrazione.

Sul fondamento di questi risultati si poteva concludere che la scomparsa o la marcatissima riduzione della rigidità da decerebrazione si aveva solo quando le lesioni fastigiali erano *asimmetriche*. In base alle conoscenze anatomiche sulle vie efferenti fastigiali [cfr. Jansen e Brodal ⁽³⁾], queste lesioni dovevano interessare prevalentemente: *a*) le cellule d'origine di uno dei fasci uncinati (lesione caudo-fastigiale unilaterale); *b*) le cellule d'origine del fascio fastigio-bulbare diretto e le fibre del fascio uncinato proveniente dal lato opposto (lesione rostro-fastigiale unilaterale); *c*) entrambi i sistemi di Russell, distrutti da un lato alla loro origine e dall'altro dopo l'incrociamiento del rispettivo fascio, e inoltre le cellule d'origine del fascio fastigio-bulbare diretto di un solo lato (lesione fastigiale totale unilaterale).

Quando invece la lesione era *simmetrica*, si osservava rigidità anziché atonia. Il che è in accordo con la nozione classica della persistenza della rigidità da decerebrazione dopo ablazione cerebellare totale [Sherrington ⁽⁴⁾, Beritoff e Magnus ⁽⁵⁾], ma è incompatibile con l'ipotesi [Sprague e Chambers ⁽⁶⁾] che un gruppo di neuroni fastigiali sia indispensabile al mantenimento della rigidità degli arti ipsilaterali. Per questa ragione abbiamo pensato che nel determinismo dell'atonia fastigiale intervenisse anche un'inibizione attiva da parte di altre vie o strutture nervose.

Poiché l'atonia fastigiale si osserva [Moruzzi e Pompeiano ⁽¹⁾] dopo decerebrazione postcolliculare, dopo topectomia della corteccia del *lobus anterior* e del *lobulus ansoparamedianus* e, limitatamente agli arti anteriori, dopo sezione postbrachiale del midollo spinale, si poteva escludere che essa fosse dovuta a un'attività tonica inibitrice di strutture mesencefaliche o cerebellari (con la esclusione del verme posteriore e dei nuclei fastigiali) o delle cellule di Cooper-Sherrington [Sprague ⁽⁶⁾], che pure danno luogo a imponenti fenomeni di « release » (effetto Schiff-Sherrington) per interruzione della loro scarica ascendente. Restavano però da prendere in esame altre sorgenti d'inibizione riflessa del tono estensore, la cui esistenza è stata dimostrata nel preparato decerebrato, e precisamente: *a*) la inibizione autogena, che almeno in parte nasce nei recettori del Golgi appartenenti all'arto di cui si registra il tono [cfr. Granit ⁽⁷⁾]; *b*) la inibizione crociata, dimostrata dall'aumento della rigidità in un arto per deafferentazione dell'arto omologo contralaterale [Stella ⁽⁸⁾, Cardin ⁽⁹⁾]; *c*) la inibizione ascendente, che si dimostra abolendo

(3) J. JANSEN e A. BRODAL, *Aspects of cerebellar anatomy*. Oslo, Johan Grundt Tanum, 1954.

(4) C. S. SHERRINGTON, « J. Physiol. », XXII, 319 (1897-98).

(5) J. S. BERITOFF e R. MAGNUS, « Pflüger's Arch. », CLIX, 249 (1914).

(6) J. M. SPRAGUE, « J. Neurophysiol. », XVI, 464 (1953).

(7) R. GRANIT, *Receptors and sensory perception*. New Haven, Yale University Press, 1955.

(8) G. STELLA, « Atti Soc. med. chir., Padova », XXIII, 5 (1944).

(9) A. CARDIN, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXII, 81, 607, 609 (1946).

dapprima la rigidità nel treno anteriore mediante radicotomia dorsale bilaterale da C_{VI} a T_{II} e poi ristabilendola con la deafferentazione del treno posteriore [Stella ⁽¹⁰⁾].

Le presenti ricerche, eseguite con tecniche già ricordate [Moruzzi e Pompeiano ⁽¹¹⁾] su 46 Gatti decerebrati, che presentavano atonia prodotta da lesione unilaterale caudo-fastigiale, hanno dimostrato che l'inibizione riflessa crociata è una delle cause principali di questo tipo d'atonia cerebellare. L'inibizione ascendente non è invece un elemento determinante, almeno nelle nostre condizioni sperimentali. Il problema dell'inibizione autogena è stato per ora accantonato.

Nella seguente esposizione dei risultati, gli arti contralaterali alla lesione caudo-fastigiale vengono per brevità chiamati «atonici», anche se a volte essi presentano solo marcata ipotonia estensoria o finanche un lieve ipertono flessorio [cfr. Moruzzi e Pompeiano ⁽¹¹⁾]; gli arti ipsilaterali alla lesione fastigiale vengono chiamati «spastici», in essi essendo la rigidità estensoria non solo presente, ma nettamente più intensa di quella che di regola si osserva nel preparato decerebrato.

1. La deafferentazione acuta degli arti «spastici», eseguita tra C_V e T_{II} ovvero tra L_{III} e S_{II} , ne produceva la totale flaccidità [conferma di Sherrington ⁽⁴⁾]. Negli arti del lato opposto, resi in precedenza atonici con la lesione fastigiale, l'effetto era esattamente inverso, ma del pari localizzato. Pertanto la rigidità ricompariva solamente nell'arto anteriore o solamente in quello posteriore, quando la deafferentazione contralaterale interessava rispettivamente i segmenti cervico-toracici o quelli lombo-sacrali del midollo spinale.

2. La scomparsa dell'atonia fastigiale era legata alla soppressione di una inibizione tonica riflessa e non a fenomeni irritativi. L'inversione dell'asimmetria posturale era infatti un fenomeno permanente, che poteva essere seguito per tutto il tempo in cui il preparato rimaneva in vita (fino a 8 ore) e che perdurava anche dopo novocainizzazione dei monconi centrali delle radici posteriori. Inoltre l'atonia fastigiale mancava, limitatamente al solo arto anteriore o posteriore, quando l'arto omologo contralaterale era stato deafferentato 3 giorni prima della decerebrazione; l'arto cronicamente deafferentato presentava la ben nota flaccidità sherringtoniana [Sherrington ⁽⁴⁾]. L'esatta localizzazione della lesione cerebellare era dimostrata, funzionalmente, dalla presenza della tipica asimmetria fastigiale nel treno ad afferenze intatte e, anatomicamente, dall'esame istologico seriato (Nissl e Weil) del cervelletto.

3. Un'emisezione spinale, eseguita ipsilateralmente e rostralmente ai centri segmentali degli arti «spastici», determinava la scomparsa della loro rigidità [conferma di Sherrington ⁽⁴⁾], mentre la faceva riapparire nell'arto

(10) G. STELLA, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXII, 78 (1946).

omologo « atonico ». Quando l'emisezione spinale veniva fatta a T_{XII}, l'effetto sull'arto posteriore ipsilaterale appariva particolarmente netto, in quanto la sua flaccidità contrastava con l'ipertono dell'arto anteriore dello stesso lato. Per ottenere flaccidità dell'arto anteriore occorre fare l'emisezione a C_V. Non era dunque necessario deafferentare l'arto « spastico » per fare ricomparire la rigidità nell'omologo arto « atonico ». L'emisezione spinale poteva agire: *a*) interrompendo le scariche facilitanti vestibolo-spinali e reticolo-spinali, e di conseguenza riducendo l'attività tonica degli α -neuroni (arto flaccido) e dei γ -neuroni (atonia intrafusale), col risultato finale di sopprimere lo stimolo adeguato per i recettori muscolari e tendinei [cfr. Rossi ⁽¹¹⁾, Granit ⁽⁷⁾]; oppure *b*) interrompendo il flusso ascendente degli impulsi inibitori provenienti dall'arto « spastico », nel caso che le rispettive vie di conduzione s'incrocino al di sopra dell'emisezione. L'ipotesi *a*) è provata dagli esperimenti che verranno appresso riportati; essi non permettono però di escludere categoricamente l'ipotesi *b*).

4. Era noto da tempo che l'infiltrazione novocainica del muscolo tricipite, nel Gatto decerebrato, ne abolisce l'ipertono dopo circa 5-10 minuti, per una paralisi dei propriocettori [Liljestrand e Magnus ⁽¹²⁾]. Era noto del pari che l'effetto della novocaina non si limita all'arto infiltrato, almeno nel Piccione talamico, e questa osservazione rappresentava la prova diretta di una regolazione del tono posturale attraverso riflessi lunghi, d'origine propriocettiva [Pupilli ⁽¹³⁾]. Entrambe queste osservazioni sono state confermate nei nostri esperimenti. L'infiltrazione con 0,75-1 ml di novocaina all'1 % del tricipite del lato « spastico » non solo ne determinava l'atonia, ma faceva ricomparire la rigidità nel tricipite del lato « atonico ». Entrambi gli effetti procedevano di pari passo, insorgevano 5-10 min dopo l'infiltrazione e persistevano per circa 1-2 ore. Potevano essere riprodotti, con minore intensità, mediante la tenotomia del capo lungo del M. tricipite e quindi venire completati con l'infiltrazione novocainica (0,5 ml di soluzione all'1 %) limitata al capo mediale del tricipite. L'infiltrazione novocainica sottocutanea o dei muscoli flessori del gomito era senza effetto, per identiche dosi. Questi dati di fatto dimostrano come l'inibizione crociata che determina l'atonia fastigiale sia d'origine propriocettiva.

5. Con la lesione caudo-fastigiale cronica (7 giorni), istologicamente controllata, si produceva una sindrome di atonia crociata nell'animale non decerebrato. Questo fenomeno, che sarà altrove descritto [Batini e Pompeiano ⁽¹⁴⁾], nel nostro caso serviva solo al controllo fisiologico della esatta localizzazione della lesione fastigiale. In un secondo tempo si eseguiva una de-efferentazione,

(11) G. ROSSI, « Arch. Fisiol. », XXV, 146 (1927).

(12) G. LILJESTRAND u. R. MAGNUS, « Pflüger's Arch. », CLXXVI, 168 (1919).

(13) G. C. PUPILLI, « Sperimentale », XC, 673 (1936).

(14) C. BATINI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », in stampa.

limitata al solo arto posteriore non atonico: la paralisi di quest'arto s'accompagnava a scomparsa dell'atonia nell'arto omologo contralaterale. In un terzo tempo (2 giorni dopo) si procedeva alla decerebrazione, riducendo così al massimo il trauma operatorio. L'atonia fastigiale crociata era presente nel solo arto anteriore, mentre in quello posteriore essa mancava del tutto, l'arto contralaterale a quello paralizzato per de-efferentazione presentando una netta rigidità estensoria. Questi esperimenti dimostrano che non è necessario deafferentare l'arto « spastico », con la radicotomia dorsale o l'infiltrazione novocainica, per impedire la comparsa dell'atonia fastigiale o rendere rigido l'arto contralaterale « atonico »: basta sopprimere, nell'arto « spastico » stesso, lo stimolo tonico specifico dei propriocettori. La de-efferentazione dev'essere particolarmente efficace a questo scopo, in quanto essa produce una paralisi delle fibre muscolari intrafusali [cfr. Granit ⁽⁷⁾].

6. Resta da localizzare il punto in cui s'incrociano le vie che con un meccanismo d'inibizione tonica riflessa mantengono questo tipo di atonia cerebellare. L'atonia fastigiale crociata e il suo rovesciamento prodotto dalla deafferentazione dell'arto « spastico » potevano ottenersi dopo: *a*) decerebrazione postcolliculare; *b*) sezione postbrachiale del midollo spinale; *c*) topectomia corticale del lobo anteriore; *d*) topectomia bilaterale ansoparamediana; *e*) sezione sagittale mediana del mesencefalo e del ponte e dopo i seguenti interventi combinati: *a + b*, *c + d*, *a + b + c + e*. Questi esperimenti dimostrano che l'incrociamiento può avvenire a livello spinale o bulbare oppure a livello del verme posteriore e dei nuclei fastigiali.

7. L'atonia fastigiale crociata di un arto anteriore non dava luogo a rigidità, quando si deafferentava l'arto posteriore ipsilaterale, quello contralaterale o entrambi gli arti posteriori, oppure quando si procedeva all'emissione spinale a T_{XII}, ipsilaterale o contralaterale, o alla sezione postbrachiale totale del midollo spinale. Questi esperimenti dimostrano che l'inibizione ascendente, riflessa [Stella ⁽⁸⁾] o intraspinale [Ruch ⁽¹⁵⁾, Sprague ⁽⁶⁾], è assai meno efficiente dell'inibizione crociata, almeno quando gli arti anteriori non sono deafferentati.

(15) T. C. RUCH, « Amer. J. Physiol. », CXIV, 457 (1935-36).

Fisiologia. — *Modificazioni dell'elettroencefalogramma di Cane per effetto dell'applicazione di stimoli chimici sulla corteccia degli emisferi cerebellari* (*). Nota di PAOLO CREPAX e ETTORE FADIGA, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Abbiamo preso in esame le modificazioni dell'attività elettrica della corteccia cerebrale di Cane, provocate dal trattamento superficiale del *lobulus ansiformis* con soluzioni di diverse sostanze (picrotossina, prostigmina, cardiazolo e diisopropilfluorofosfato), capaci di esercitare sulle cellule nervose un'azione stimolante [Hyde, Beckett e Gellhorn ⁽¹⁾; Toman e Davis ⁽²⁾] e i cui effetti sui neuroni cerebellari non sono stati a nostra conoscenza indagati ⁽³⁾. Facciamo presente come le osservazioni di Canestrari, Crepax e Machne ⁽⁴⁾, secondo cui l'applicazione locale di stricnina sul *lobulus ansiformis* del cervelletto provoca, nel Cane e nel Gatto, un aumento di ampiezza dei potenziali elettrici derivabili dai giri sigmoidei, provino la possibilità di indagare l'azione di uno stimolo chimico sui neuroni cerebellari mediante la registrazione dell'attività elettrica delle aree cerebrali collegate anatomicamente col cervelletto. D'altra parte, l'impiego di stimoli chimici nello studio sperimentale delle funzioni cerebellari ci è sembrato meritasse considerazione, giacché con l'uso di agenti di tale natura la registrazione dei potenziali elettrici di una qualunque parte del nevrasso può esser effettuata in modo continuo per tutto il tempo che dura la stimolazione, senza il disturbo degli artefatti che lo stimolo elettrico inevitabilmente provoca.

I nostri esperimenti sono stati eseguiti in Cani del peso medio di kg 10. L'intervento preparatorio consisteva nell'incisione e nello scollamento delle parti molli pericraniche; nell'apertura di una breccia nelle parti ossee sovrastanti al cervelletto e infine nell'avvitamento alla teca cranica di elettrodi metallici, la cui punta giungeva in contatto della superficie esterna della dura madre. La preparazione dell'animale veniva eseguita d'ordinario in anestesia locale, associata a leggera narcosi eterica; e le registrazioni venivano iniziate, quando gli effetti della narcosi erano interamente dissipati.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) J. HYDE, S. BECKETT a. E. GELLHORN, « J. Neurophysiol. », XII, 17 (1949).

(2) J. E. P. TOMAN a. J. P. DAVIS, « J. Pharmacol. » (Part 2), XCVII, 425 (1949).

(3) DOW [« J. Neurophysiol. », XII, 245 (1949)], in una Memoria che concerne i potenziali d'azione della corteccia cerebellare destati dalla stimolazione elettrica locale, riferisce di aver osservato un aumento dell'ampiezza dei potenziali stessi per effetto dell'applicazione topica di picrotossina.

(4) R. CANESTRARI, P. CREPAX et X. MACHNE, « Arch. Psic. Neurol. Psychiat. », XVI, 19 (1955).

Alla somministrazione di morfina (5 mg/kg, per via sottocutanea) o di piccole quantità di cloralosio (7 mg/kg, per via intravenosa) si è proceduto solo in quei casi in cui appariva necessaria la presenza di segni di una più netta «sincronizzazione» nel tracciato basale, a fine di accertare gli effetti delle stimolazioni effettuate.

Abbiamo proceduto sistematicamente alla registrazione della pressione arteriosa (manometro a mercurio collegato col capo centrale dell'A. femorale), poiché le variazioni del livello emopressorio hanno ripercussioni immediate sulla eccitabilità cerebellare.

Mediante un elettroencefalografo Grass mod. III D a 8 penne scriventi, i potenziali elettrici cerebrali venivano registrati da punti simmetrici dei lobi frontali parietali e occipitali, secondo schemi che si riportano nelle singole illustrazioni.

Incisa la dura, il cervelletto veniva protetto mediante un sottile strato di olio di vaselina, che si aveva poi cura di asportare da quei punti della superficie dell'organo sui quali s'intendeva far agire lo stimolo chimico. Le varie sostanze erano disciolte in soluzione di NaCl al 9‰, tranne il diisopropilfluorofosfato che era sciolto in glicole propilenico⁽⁵⁾. Esse sono state impiegate nelle concentrazioni seguenti: picrotossina all'1‰; prostigmina al 2,5‰; cardiazolo e diisopropilfluorofosfato all'1‰.

Per rimuovere dalla corteccia la sostanza applicatavi in soluzione, si procedeva al lavaggio del punto stimolato mediante soluzione fisiologica, usando batuffoli di ovatta imbevuti di liquido di Ringer e rinnovandoli di frequente. In genere, tranne in ricerche di orientamento, tra l'applicazione di una sostanza e quella successiva trascorrevano almeno 20 min. La normalizzazione del tracciato per altro avveniva sempre in un tempo più breve.

L'applicazione delle sostanze era fatta sul *lobulus ansiformis*, indifferentemente sul *crus I* o sul *crus II*. Per assicurarci che le modificazioni elettroencefalografiche osservate erano dovute a modificazioni funzionali dei neuroni cerebellari situati nella corteccia delle lamelle trattate, abbiamo indagato gli effetti del trattamento locale di altri punti della superficie cerebellare: tale controllo è stato fatto effettuando l'applicazione di cartine impregnate delle diverse sostanze su lamelle facilmente accessibili del *lobus medius* (parte vermiana del *lobulus simplex* e *tuber vermis*) ovvero del *lobus posterior* [*pyramis* e lamelle dorsali dell'*uvula*, adiacenti alla *pyramis*; cfr. Ingvar⁽⁶⁾], lamelle la cui stimolazione elettrica non evoca palesi modificazioni dell'attività della corteccia cerebrale.

(5) Ci siamo naturalmente accertati che tale solvente, applicato sulla corteccia cerebellare, è inefficace a modificare l'elettroencefalogramma. Inoltre, tenuto conto delle osservazioni fatte da SNIDER e MAGOUN [*J. Neurophysiol.*, XII, 335 (1949)] intorno alla eccitabilità meccanica dei neuroni cerebellari, con altri controlli abbiamo escluso la possibilità che la semplice apposizione di dischetti di carta bibula abbia effetto stimolante.

(6) S. INGVAR, «*Folia neurobiol.*», XI, 205 (1918).

Gli esperimenti hanno dimostrato come un aumento dell'ampiezza dei potenziali elettrici cortico-cerebrali si osservi entro 15 sec - 2 min dall'inizio del trattamento della corteccia del *lobulus ansiformis* con le diverse sostanze saggiate; e come, sul fondamento dei risultati forniti dalle prove sopra riferite, tale effetto possa sicuramente riferirsi a un'azione stimolante delle sostanze medesime sui neuroni della corteccia cerebellare trattata.

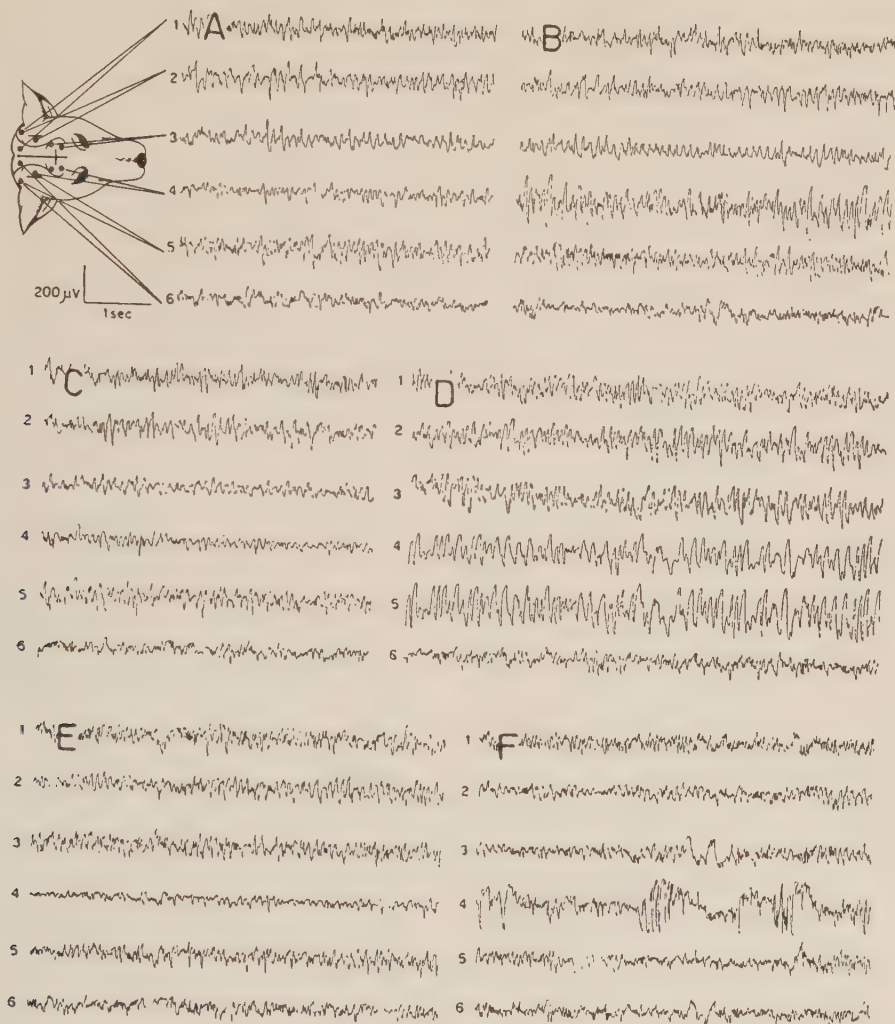


Fig. 1. - Modificazioni dell'attività elettrica della corteccia cerebrale di Cane per effetto del trattamento di un medesimo punto del *trus II* di sinistra mediante soluzioni di picrotossina (1 p. 1000), di prostigmina (2,5 p. 1000) e di diisopropil-fluorofosfato (1 p. 100).

A: attività elettrica spontanea 1 h dopo la fine della narcosi eterica. B: 1 min dopo applicazione di picrotossina. C: 21 min dopo B e 12 min dopo la fine del lavaggio dell'area trattata. D: 2 min dopo C e 30 sec dopo applicazione di prostigmina. E: 28 min dopo D e 22 min dopo la fine del lavaggio dell'area trattata. F: 3 min dopo E e 20 min dopo applicazione di diisopropilfluorofosfato.

Le differenze tra le diverse sostanze esaminate concernono essenzialmente la sede delle modificazioni elettroencefalografiche provocate dal trattamento di un medesimo punto della

superficie neocerebellare: per quanto si riferisce a tempo di latenza e caratteri degli effetti elettrici descritti, le sostanze non si contraddistinguono per particolarità notabili e costanti. Mentre la picrotossina (fig. 1 B e il diisopropilfluorofosfato (fig. 1 F) producono un aumento dei potenziali elettrici corticali che il più spesso è circoscritto al giro sigmoideo contralaterale rispetto al *lobulus ansiformis* trattato, la prostigmina (fig. 1 D) e il cardiazolo (fig. 2) accrescono l'ampiezza dei potenziali delle aree motorie e della corteccia parietale e temporale di entrambi i lati.

Le differenze ora rilevate potrebbero essere soltanto di ordine quantitativo, quando una risposta circoscritta si consideri l'effetto di una stimolazione relativamente poco intensa e una risposta diffusa all'opposto la conseguenza di stimolazioni più forti; ovvero dipendere da intrinseche particolarità, di ordine biochimico, dell'azione dei diversi farmaci sugli elementi nervosi, conforme all'ipotesi prospettata da Canestrari, Crepax e Machne ⁽⁴⁾ per spiegare la sede delle alterazioni elettroencefalografiche dovute al trattamento stricninico della corteccia cerebellare.

Poiché la prima spiegazione può facilmente vagliarsi attraverso il confronto degli effetti di concentrazioni progressivamente crescenti di ciascuna delle sostanze saggiate, converrà posporre a tale ricerca l'eventuale verifica, assai più impegnativa, del meccanismo dell'azione stimolante esercitata dalle sostanze stesse sui neuroni della corteccia cerebellare.

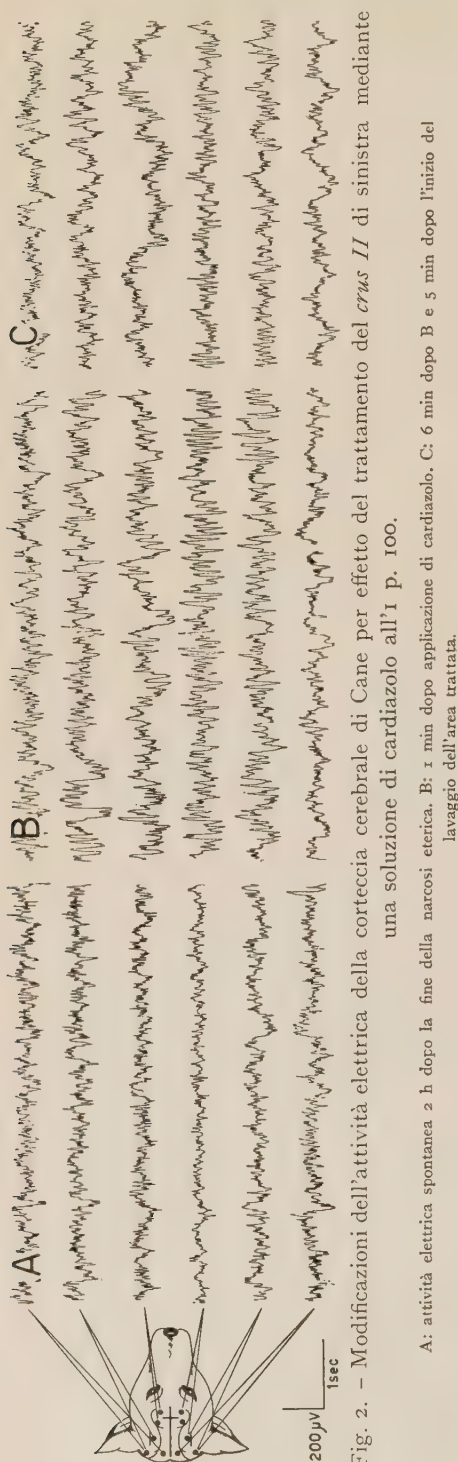


Fig. 2. - Modificazioni dell'attività elettrica della corteccia cerebrale di Cane per effetto del trattamento del *crus II* di sinistra mediante una soluzione di cardiazolo all'1 p. 100.

A: attività elettrica spontanea 2 h dopo la fine della narcosi eterica. B: 1 min dopo applicazione di cardiazolo. C: 6 min dopo B e 5 min dopo l'inizio del lavaggio dell'area trattata.

Fisiologia. — *Analisi degli effetti provocati dall'acetilcolina nella corteccia cerebrale isolata* ^(*). Nota di FRANCESCO INFANTELLINA, presentata ^(**) dal Socio G. C. PUPILLI.

L'acetilcolina (ACh) determina nella corteccia cerebrale un aumento dell'attività spontanea: tale effetto è stato ottenuto, in esperimenti eseguiti in Mammiferi, mediante applicazione locale della sostanza sulla corteccia precedentemente trattata con eserina [Sjöstrand ⁽¹⁾, Miller, Stavraký e Woon-ton ⁽²⁾, Chatfield e Dempsey ⁽³⁾, Kristiansen e Courtois ⁽⁴⁾, Funderburk e Case ⁽⁵⁾] ovvero sulla corteccia non sottoposta a tale pretrattamento [Brenner e Merritt ⁽⁶⁾, Forster e Mc Carter ⁽⁷⁾, Funderburk e Case ⁽⁵⁾, Essig ⁽⁸⁾], come pure per somministrazione intrarteriosa [Bonnet e Bremer ⁽⁹⁾, Moruzzi ⁽¹⁰⁾, Bremer e Chatonnet ⁽¹¹⁾], intracisternale [Bornstein ⁽¹²⁾] o intravenosa [Williams ⁽¹³⁾] di piccole dosi di ACh. Un'azione depressiva sull'attività elettrica corticale, esercitano all'opposto le forti concentrazioni [Sjöstrand ⁽¹⁾, Brenner e Merritt ⁽⁶⁾, Forster e Mc Carter ⁽⁷⁾, Essig ⁽⁸⁾, Funderburk e Case ⁽⁵⁾] e le dosi elevate [Bonnet e Bremer ⁽⁹⁾, Moruzzi ⁽¹⁰⁾; Bornstein ⁽¹²⁾].

Tra gli anticolinesterasici, l'eserina e la prostigmina, pur favorendo la azione eccitante e convulsivante dell'ACh [Sjöstrand ⁽¹⁾, Miller *et alii* ⁽²⁾, Chatfield e Dempsey ⁽³⁾, Kristiansen e Courtois ⁽⁴⁾, Funderburk e Case ⁽⁵⁾, Bremer e Chatonnet ⁽¹¹⁾], da sole riducono l'attività elettrica della corteccia cerebrale [Miller *et alii* ⁽²⁾, Chatfield e Dempsey ⁽³⁾].

L'attività convulsiva dovuta all'ACh o a questa stessa sostanza associata agli anticolinesterasici, viene inibita o abolita dall'atropina [Miller *et alii* ⁽²⁾, Funderburk e Case ⁽⁵⁾, Bornstein ⁽¹²⁾, Bremer e Chatonnet ⁽¹¹⁾]. Alcuni autori

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) T. SJÖSTRAND, « J. Physiol. », XC, 41 P (1937).

(2) F. R. MILLER, G. W. STAVRAKY a. G. A. WOONTON, « Amer. J. Physiol. », CXXIII, 147 (1938).

(3) P. O. CHATFIELD a. E. W. DEMPSEY, « Amer. J. Physiol. », CXXXV, 633 (1942).

(4) K. KRISTIANSEN a. G. COURTOIS, « EEG clin. Neurophysiol. », I, 265 (1949).

(5) W. H. FUNDERBURK a. T. J. CASE, « EEG clin. Neurophysiol. », III, 213 (1951).

(6) C. BRENNER a. H. H. MERRITT, « Arch. Neurol. Psychiat. », XLVIII, 382 (1942).

(7) F. M. FORSTER a. R. H. MC CARTER, « Amer. J. Physiol. », CXLIV, 168 (1945).

(8) C. F. ESSIG, « Fed. Proc. », X, 40 (1951).

(9) V. BONNET et F. BREMER, « C. r. Soc. Biol. », CXXVI, 1271 (1937).

(10) G. MORUZZI, « Arch. internat. Physiol. », XLIX, 33 (1939).

(11) F. BREMER et J. CHATONNET, « Arch. internat. Physiol. », LVII, 106 (1949).

(12) M. B. BORNSTEIN, « J. Neurophysiol. », IX, 347 (1946).

(13) D. WILLIAMS, « J. Physiol. », XCIX, 8 P (1940-41).

hanno per altro ottenuto, a tale riguardo, risultati negativi [Brenner e Merritt ⁽⁶⁾, Forster ⁽¹⁴⁾].

Da quanto ho esposto, risulta che l'azione dell'ACH è stata valutata sul fondamento degli effetti di aumento o depressione dell'automatismo elettrico corticale. Il preparato di lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto, ideato e utilizzato da Burns ⁽¹⁵⁾ e da Burns e Grafstein ⁽¹⁶⁾, permette di disporre di una porzione corticale elettricamente silente, la quale risponde in modo caratteristico e costante agli stimoli elettrici: l'applicazione di uno stimolo elettrico di sufficiente voltaggio provoca un'onda superficie-negativa rapida e seguita da un'onda superficie-positiva lenta, sulla quale s'inscrive una scarica asincrona di frequenza pari a 65 pulsazioni al sec in media. Quando la distanza tra punto stimolato e punto di derivazione supera i 5-10 mm, l'onda negativa è spesso assente [cfr. Adrian ⁽¹⁷⁾, Burns ⁽¹⁸⁾, Eccles ⁽¹⁹⁾]. Quali siano gli effetti che su tale preparato esercitano l'acetilcolina, l'eserina e l'atropina, è stato indagato con le presenti ricerche.

Il lembo isolato di corteccia cerebrale comprende un breve tratto del giro soprasilviano o del giro ectosilviano medio; la sua superficie è all'incirca mm 20×10 e lo spessore mm 7. Un pozzetto, ottenuto coi lembi sollevati della cute del cranio dell'animale, permette di mantenere sotto olio di vaselina la corteccia messa allo scoperto e tenuta alla temperatura di 37°, 5-38°C mediante una lampada a raggi infrarossi.

Per la stimolazione mi sono servito di uno stimolatore Grass: la durata dello stimolo, costituito da un'onda rettangolare, è di msec 0,5. Come elettrodi di stimolazione ho usato fili di platino del diametro di mm $2-3 \times 10^{-2}$, le cui estremità sferiche erano tra loro mantenute alla distanza di circa mm 0,5.

L'attività elettrica del preparato era registrata mediante un oscillografo a doppio raggio Du Mont 322 e una camera Grass; l'amplificazione veniva effettuata mediante un preamplificatore differenziale, ad accoppiamento diretto. La derivazione era monopolare, l'elettrodo di derivazione essendo una micropipetta riempita di soluzione di NaCl al 0,9 %. L'elettrodo indifferente era costituito da una piccola sfera di Ag-AgCl. La coppia di elettrodi di derivazione era collegata con un ripetitore catodico.

Ho adoperato soluzioni di acetilcolina (manganocloruro), di eserina (salicilato) e di atropina (solfato) in liquido di Krebs-Henseleit o in quello di Ringer-Locke per Mammiferi. Il pH delle soluzioni variava tra 7,0 e 7,4.

Dischetti di carta da filtro, imbevuti della soluzione del farmaco, venivano applicati sulla superficie del preparato secondo la tecnica di Baglioni

(14) F. M. FORSTER, « Arch. Neurol. Psychiat. », LIV, 391 (1945).

(15) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXII, 156 (1951).

(16) B. D. BURNS e B. GRAFSTEIN, « J. Physiol. », CXVIII, 412 (1952).

(17) E. D. ADRIAN, « J. Physiol. », LXXXVIII, 126 (1936).

(18) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXI, 50 (1950).

(19) J. C. ECCLES, « EEG clin. Neurophysiol. », III, 449 (1951).

e Magnini ⁽²⁰⁾, e lasciati *in situ* per 2-10 min. In alcuni esperimenti, l'ACh è stata somministrata per via intracarotidea, secondo la tecnica descritta da Bonnet e Bremer ⁽⁹⁾ e da Moruzzi ⁽²⁰⁾; la soluzione di ACh (manganocloruro) in liquido di Ringer-Locke, preparata al momento, era iniettata nell'A. carotide del lato opposto a quello del lembo corticale.

Il 40 % all'incirca dei preparati di lembo isolato di corteccia cerebrale, esaminati 45-60 min dopo la fine dell'allestimento, è risultato privo di attività spontanea. Circa ai fattori che possono dar origine a pulsazioni elettriche continue nel preparato, riferirò nel lavoro *in extenso*. Nella presente Nota si riferiscono i risultati di esperimenti eseguiti su preparati privi di attività spontanea. I fenomeni osservati si possono riassumere come segue.

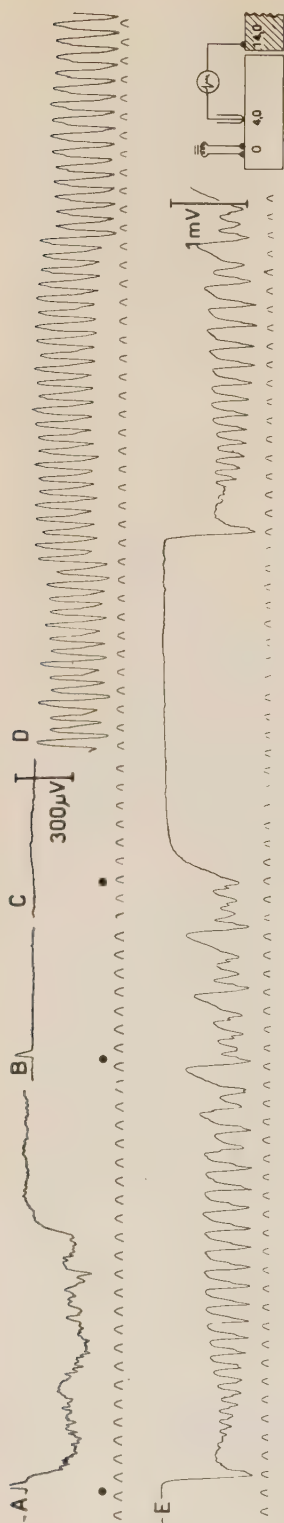
1° L'applicazione locale di ACh (manganocloruro) in soluzione al 0,2-0,5-1 %, modifica assai poco l'attività corticale provocata; la risposta allo stimolo elettrico, con soglia immutata o talora lievemente innalzata, è leggermente appiattita e la sua durata è diminuita.

2° L'eserina (salicilato) in soluzione all'1 %, applicata sul lembo corticale privo di attività elettrica, deprime la risposta del preparato allo stimolo isolato.

3° Per effetto dell'applicazione di ACh in soluzione all'1 % sulla corteccia cerebrale priva di attività spontanea e precedentemente trattata con eserina all'1 %, compaiono dopo 1-2 min onde negative monofasiche, rapide, ampie (μV 800, in media) e ritmiche, la cui frequenza varia da 8 a 16 al sec (10/sec in media). Ciascuna onda presenta generalmente una componente più piccola sovrapposta; per effetto del graduale e progressivo aumento di ampiezza di tale componente, talora il ritmo viene a raddoppiarsi. Questa attività convulsiva dura alcuni minuti, interrotta soltanto da brevi pause di 0,5-5 sec; successivamente il ritmo si modifica, nel senso che treni di onde della durata complessiva di 0,5-2 sec si alternano con pause di 0,5-1 sec, permanendo costante la frequenza e diminuendo il voltaggio fino a 150-50 μV : l'attività ritmica scompare dopo min 15-60 (fig. 1). Le soluzioni di ACh al 0,2 e al 0,5 %, applicate sul lembo precedentemente trattato con eserina, sono spesso inefficaci; tuttavia nei casi in cui col trattamento compare un'attività elettrica, i caratteri di questa sono analoghi a quelli dianzi descritti, la durata dell'effetto risultando molto spesso breve (5-15 min).

4° L'atropina (solfato), applicata localmente in soluzione al 0,2-0,5 e 1 %, aumenta l'ampiezza e la durata della risposta del lembo. Sul preparato così trattato con atropina, l'applicazione di eserina all'1 % e seguita da quella di ACh all'1 %, non determina la comparsa dell'attività caratteristica che suole manifestarsi in assenza di atropina; si osserva, al contrario, un innalzamento della soglia della risposta provocata e il suo appiattimento. L'effetto è costante.

5° L'applicazione di atropina in soluzione al 0,5-1 %, per 5-10 min, su un preparato che presenta un'attività ritmica per effetto del precedente



trattamento con eserina e ACh, provoca dopo 2-3 min una notevole riduzione dell'attività elettrica continua e dopo 10-15 min la scomparsa di ogni segno di attività spontanea o provocata. Questo effetto inibitorio può talora mancare.

6° Nel lembo di corteccia privo di attività elettrica spontanea, l'iniezione per via intracarotidea di 0,2 ml di soluzione contenente μg 0,01-0,2 di ACh (manganocloruro), provoca la comparsa di un'attività corticale. I cui caratteri non sono molto costanti: compaiono pulsazioni di basso potenziale (30-50 μV) e di frequenza pari a 40-50 Hz oppure onde isolate di elevato voltaggio (300-1000 μV) ovvero, infine, pulsazioni irregolari per ritmo e voltaggio. Le dosi di ACh superiori a μg 0,3 non provocano attività. La soglia della risposta corticale allo stimolo elettrico isolato, è abbassata per effetto di dosi di ACh fino a μg 0,2 ed è innalzata per dosi più elevate (μg 0,2-1).

L'intensa attività ritmica, in alcuni casi persistente fino a 1 h, che insorge nel lembo di corteccia cerebrale per il trattamento con eserina e ACh e dopo iniezione intracarotidea di μg 0,01-0,2 di ACh, depone innegabilmente per un'azione diretta del-

Fig. 1. - Lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto. Il cerchio pieno indica la stimolazione. Tempo = 0,1 sec. La deflessione verso l'alto esprime una variazione negativa del potenziale. La figura a destra indica la posizione degli elettrodi di stimolazione e di derivazione e inoltre la rispettiva loro distanza in mm. La parte della figura tratteggiata si riferisce al tratto di corteccia necrotizzata per elettrocoagulazione. L'amplificazione va riferita al tratto di grafico in cui è segnata e a tutti gli altri tratti precedenti privi d'indicazione. Azione dell'eserina all'1 % applicata localmente per la durata di 7 min e dell'acetilcolina applicata per min 7. A, prima del trattamento: per uno stimolo della tensione di 4,8 V la risposta del preparato è costituita da un'onda rapida negativa seguita da una deflessione lenta positiva. B, prima del trattamento: per uno stimolo di voltaggio appena inferiore a quello usato in A, la risposta del preparato è costituita dalla sola onda negativa. C, 5 min dopo l'inizio del trattamento con eserina: la risposta del preparato per uno stimolo di voltaggio pari al doppio di quello usato in A. D e E, rispettivamente 3 e 10 min dopo l'inizio del trattamento con acetilcolina (corrispondenti a 10 e 17 min dopo l'inizio del trattamento con eserina): attività prolungata del preparato, che si manifesta senza l'applicazione di stimoli elettrici.

l'ACh sugli elementi corticali. E perché tale effetto compaia, non è necessario un elevato tono cerebrale: esso si manifesta, dopo il trattamento, in preparati privi di attività elettrica spontanea.

Non sono mancate riserve e critiche circa ai risultati ottenuti per mezzo dell'applicazione locale di soluzioni di ACh [cfr. Eccles ⁽²¹⁾]. Occorre dire che con tale procedimento si sono generalmente usate soluzioni di concentrazione relativamente elevata (fino al 10-20 ‰), di guisa che gli effetti ottenuti potrebbero dipendere da fattori osmotici o dal pH delle soluzioni adoperate. Nelle mie indagini all'opposto sono state impiegate, per il trattamento locale del lembo, soluzioni di ACh molto meno concentrate e il cui pH corrisponde alla zona della neutralità o di una debole alcalinità. E se è certo che anche le concentrazioni di tali soluzioni non sono confrontabili con quelle in cui la sostanza agisce liberandosi in seno ai tessuti, è pure vero che dosi di μg 0,01-0,2 di ACh si dimostrano attive con la somministrazione della sostanza per via intracarotidea, secondo quanto risulta dai miei esperimenti che a questo riguardo concordano con le osservazioni di Bonnet e Bremer ⁽⁹⁾, di Moruzzi ⁽¹⁰⁾, e di Bremer e Chatonnet ⁽¹¹⁾.

L'attività ritmica che compare nel lembo per effetto dell'ACh, è un aspetto dell'azione ritmogena che l'ACh esercita in generale sul sistema nervoso e che è stata osservata per la prima volta nel corso di osservazioni concernenti l'attività dei centri vasomotori e del centro cardiomodatore [Pupilli ^(22,23)]. A determinare il ritmo nel lembo isolato contribuiscono molto probabilmente anche le variazioni di concentrazione della sostanza a livello dei neuroni che a essa reagiscono: le scariche di onde si alternano con le pause, corrispondentemente all'accumulo e alla distruzione della sostanza attiva.

L'atropina, applicata in soluzione al 0,2-1 ‰ sul lembo isolato avanti l'applicazione di eserina e ACh, impedisce gli effetti corticali dell'acetilcolina; li rimuove, quando venga applicata dopo il trattamento della corteccia con eserina e ACh. Questa azione inibitrice è specifica, perché la successiva applicazione sul lembo di soluzione di stricnina all'1 ‰ determina la comparsa delle caratteristiche risposte stricniniche al singolo stimolo elettrico.

I caratteri dell'attività provocata dal trattamento del lembo con eserina e ACh, mostrano che gli elementi corticali attivati sono situati in uno strato non superficiale del lembo. Infatti, come si osserva nettamente durante la fase delle scariche e delle pause alterne, l'attività è costituita da onde difasiche o negative inscritte su un'ampia e lenta onda positiva (cfr. fig. 1, E), espressione dell'attività di elementi di strati corticali profondi.

(21) J. C. ECCLES, « J. Neurophysiol. », X, 197 (1947).

(22) G. C. PUPILLI, « Arch. Fisiol. », XXIX, 476 (1931).

(23) G. C. PUPILLI, « Arch. Fisiol. », XXXI, 519 (1932).

Fisiologia. — *Nascita ed adattamento all'ambiente* (*). Nota I di ENRICO MESSERI, presentata (**) dal Socio C. CIACCIO.

Nessuna esigenza ecologica più globale e profonda esiste oltre quella inerente alla nascita, in corrispondenza della quale tutti gli organismi viventi, e l'uomo in particolare, rivelano un forte patrimonio di potenzialità di assuefazione che spesso serve a permettere loro la sopravvivenza.

La nascita, la comparsa sulla Terra e l'inizio di una dura lotta di ambientazione contro situazioni locali ostili, costituisce pertanto il primo problema ecologico per la continuazione e la selezione della specie, rappresentando l'inizio di una profonda metamorfosi che coinvolge tutti i sistemi e gli organi con le rispettive funzioni, e inducendo trasformazioni ed integrazioni di funzioni preesistenti in rapporto a esigenze ambientali nuove.

In questa breve rassegna sarà presa in considerazione, prima la vita intrauterina nei suoi aspetti ecologici, e successivamente verrà analizzata la radicale rivoluzione fisiologica che permette i primi contatti del neonato con l'ambiente fisico terrestre.

ASPETTI E FINALITÀ ECOLOGICHE DELLA VITA INTRAUTERINA. — Fino dai primordi del concepimento il nuovo essere è costretto ad adattarsi all'ambiente endouterino della madre attraverso complessi meccanismi, solo in parte noti. Nei mammiferi, sino dallo stadio della morula e della gastrula, il nuovo organismo si modifica profondamente non solo per la naturale evoluzione verso stadi più maturi, ma anche per esigenze di ordine ambientale.

Per la specie umana possediamo invero poche esperienze dirette e pertanto spesso ci si riferisce a ricerche sperimentali su mammiferi morfologicamente molto vicini all'uomo. Indagini sperimentali sugli antropomorfi hanno dimostrato che l'uovo fecondato, dopo aver migrato nelle trombe di Falloppio, verso il 6° giorno dal concepimento scende nella cavità uterina, dove rimane libero e mobile per circa altrettanti giorni prima di annidarsi nella mucosa. In questo periodo di apparente inerzia e passività l'uovo vien nutrito e protetto con oscuri meccanismi messi in atto probabilmente dal progesterone, che rappresenta (dal nostro punto di vista) il principale responsabile dell'insediamento del nuovo organismo sulla parete uterina, dato che nel coniglio, tolto il concorso del corpo luteo, l'uovo fecondato si attarda nelle trombe e si segmenta, ma giunto nella cavità uterina vi muore, senza possibilità di annidamento. La suddivisione del materiale dell'uovo fecondato nelle prime zone a vario potere prospettico e lo smistamento delle potenze morfogenetiche racchiuse in esso avvengono quindi in uno stato di sospensione libera del-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale, Università Messina.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

l'uovo nel suo ambiente. Finalità ecologiche sollecitano l'uovo in segmentazione a sostare nella cavità uterina per dar tempo al processo di annidamento. Ciò avviene attraverso ad una ipotetica secrezione, capace di scavare un nido nella mucosa uterina, che colmato al di sopra si trasforma in un ricettacolo chiuso da una membrana superficiale, che poi diviene villosa, orientandosi verso la formazione della placenta. Questo mirabile processo di ancoramento e di successivo occultamento, nello spessore della mucosa, impedisce ai flussi secretivi dell'utero di trascinare all'esterno l'uovo, condannandolo in tal caso alla morte, come succede di regola quando esso non è fecondato. Le modificazioni ambientali si compenetrano a tal punto da alterare le vecchie strutture sia dell'uovo sia della mucosa, e tale alterazione diviene sempre più profonda risalendo la gerarchia delle specie più evolute dei mammiferi (placenta adeciduata nella giumenta, compenetrazione intervascolare nei carnivori, placenta emocoriale nella donna). I villi rappresentano pertanto nella loro struttura istologica gli elementi essenziali per gli scambi fetoplacentari. Il corion, l'amnios e relativo liquido, sono delle formazioni di tutela per l'embrione che è costretto in un ambiente angusto e sottoposto a pressioni varie ed improvvise per la posizione endoaddominale nella madre. Ogni trauma sull'addome materno infatti, trasmesso, all'utero, si ripercuote ugualmente su tutta la superficie dell'embrione, divenendo così frazionato nella sua potenza pressoria e quindi innocuo, entro certi limiti, per la vita del feto. Il cordone ombelicale permette con la sua lunghezza ogni movimento all'embrione nel ristretto spazio riservatogli, evitando così che esso subisca una modellazione di origine esogena; come avverrebbe, qualora dovesse restare inerte sempre nella medesima posizione, e come realmente accade in quei casi di malformazione fetale dovuta alla mancanza o scarsità di liquido amniotico o per briglie o aderenze varie che obbligano il feto ad una quasi totale immobilità. In fine la motilità fetale nelle sue singole parti, specie per quanto riguarda gli arti, sembra permettere e facilitare l'ontogenesi sia della muscolatura che delle articolazioni e delle loro funzioni, considerando che senza l'esercizio anche parziale di dette funzioni, né il muscolo sarebbe così sviluppato e attivo alla nascita, né le articolazioni normalmente efficienti. Anche in questo caso quindi assistiamo ad uno svincolamento del soggetto in sviluppo dal pericolo del modellamento da parte dell'ambiente, condizione necessaria alla realizzazione della normale morfogenesi nel mondo animale, in contrapposizione con quanto si verifica in quello vegetale. Il funicolo ombelicale, permette oltre a quanto sopra abbiamo considerato, la nutrizione del feto attraverso la funzione placentare. Il liquido amniotico rappresenta un notevole volume (circa mezzo litro) di aspetto limpido fino al 5° mese, poi lievemente torbido per secrezioni fetali. Oltre alle funzioni speciali suesposte esso serve, attraverso alla deglutizione da parte del feto, a permettere che le cavità virtuali dell'apparato digerente possano divenire cavità reali e a sollecitare pertanto le secrezioni ghiandolari degli organi annessi all'apparato gastroenterico, iniziando una specie di allenamento per le impellenti esigenze funzionali trofiche della vita extrauterina, immediatamente

dopo la nascita. Oltre a ciò la presenza del liquido amniotico serve a facilitare il travaglio del parto.

Consideriamo ora la placenta, enorme organo provvisorio costituito soprattutto per soddisfare una necessità vitale dell'embrione: il nutrimento. Essa costituisce un grande deposito di sangue materno che circola con molta lentezza, sì da permettere ai villi fetali di assimilare il nutrimento per il complesso metabolismo dell'embrione. Ciò avviene come è noto, non per semplice dialisi o filtrazione, ma attraverso ad una cernita attiva e specifica, con un processo metabolico del tutto paragonabile a quello della vita extrauterina sia nei riguardi dei glucidi, lipidi e protidi, come degli elementi minerali ed ormonici. Un altro aspetto ecologico della funzione placentale è dato dalla difesa che quest'organo esplica nei riguardi del feto; considerando infatti lo scarso patrimonio immunitario di questo, la placenta trattiene al livello dell'epitelio villare i microrganismi patogeni ad eccezione di qualcuno che è capace di ledere questa barriera (*spirochete*, virus), mentre non trattiene i veleni endogeni od esogeni di origine batterica o materna, né gli ormoni in gran parte accumulati nella placenta, o da essa direttamente elaborati.

Altro aspetto ecologico prenatale è dato dall'importanza che lo spazio endouterino e la nutrizione elargita dalla madre hanno sullo sviluppo del feto; è noto infatti che una madre pluripara permette un accrescimento maggiore del feto rispetto alla prima gravidanza, così pure altre condizioni ambientali come aderenze, briglie amniotiche, ecc., possono determinare malformazioni o addirittura mutilazioni nel corpo del feto. Analogamente processi tossici, di natura ancora oscura, possono impedire la prosecuzione della gravidanza, oppure ledere profondamente il sistema nervoso del bambino (ittero nucleare in rapporto al fattore RH).

Anche la circolazione fetale ci offre largo campo per considerazioni fisiologiche; alcune strutture cardiovascolari sono in funzione di una vita prettamente parassitaria e destinate a scomparire poco dopo la nascita, o soggette a profonde modificazioni inerenti alla futura vita autonoma del neonato. La caratteristica circolazione fetoplacentale, cessa bruscamente la sua funzione all'atto della nascita per adattarsi urgentemente a due esigenze fondamentali: la respirazione e la nutrizione, e pertanto le strutture morfologiche atte alla prima circolazione si modificano profondamente (forame di Botallo, valvole di Eustachio, dotto di Botallo, dotto di Aranzio, tubercolo del Löwer, arterie polmonari, ecc.), per adattarsi alla fisiologia dell'animale terrestre (funzione respiratoria, gastroenterica, renale, termoregulatoria, neuromuscolare, endocrina, ecc.).

Il travaglio del parto che rappresenta una serie di azioni prettamente meccaniche per l'espulsione del feto, costituisce la fase terminale della vita intrauterina, caratterizzata da una speciale irrequietezza del feto, che giunto al suo termine di maturazione, si ribella all'angustia dello spazio e coadiuvato dalla reazione dell'ambiente uterino, procede, attraverso i noti tempi del parto, fino alla nascita. Per attuare nei limiti fisiologici la nascita l'organismo materno si trasforma profondamente sia nell'utero, sia lungi da esso, con modi-

ficazione della sinfisi pubica che si rammollisce, con modificazione della mammella che si prepara alla lattazione, con modificazione della dinamica costofrenica della respirazione in relazione all'aumentato volume dell'addome, ecc. D'altra parte il feto all'atto del parto, per adattarsi alle esigenze meccaniche di esso, si modifica nelle dimensioni della testa, che riduce i propri diametri per sovrapposizione delle ossa craniche in corrispondenza delle suture.

Alla nascita un mondo completamente nuovo quasi irreale si schiude al neonato, che passa ad un tratto da un ambiente chiuso e ristretto verso l'illimitato spazio terrestre, da un ricettacolo che si era modificato profondamente in conseguenza della sua presenza ad un ambiente che è impassibile ed irriducibile rispetto ad esso, da una vita acquatica ad una vita terrestre, da una condizione parassitaria ad una vita autonoma, attraverso modificazioni anatomiche e funzionali che ne permettono la sopravvivenza e anche in conseguenza di speciali cure che i genitori attuano per ridurre al minimo l'ostilità dell'ambiente nei primi tempi della vita.

ASPETTI ECOLOGICI DELLA VITA EXTRAUTERINA. — Osserviamo ora dal punto di vista ecologico le fasi più salienti della nascita per poi mettere in evidenza le metamorfosi di ambientazione e le cure parentali nei mammiferi e nell'uomo. Il neonato appena apparso nel nostro ambiente deve sopperire alle modificazioni urgenti e profonde di alcune funzioni vitali come abbiamo suesposto (respirazione, nutrizione, termoregolazione, contatto fisico, attività secretorie, emuntorie, sensoriali, ecc.). Dal punto di vista ambientale queste esigenze sono così urgenti che resta difficile spiegarsi la loro attuazione così facile e rapida. Potremmo paragonare la nascita, sotto questo aspetto, alla ipotetica conquista di un altro mondo siderale, dove le nostre funzioni vitali dovessero essere modificate radicalmente (per assenza di atmosfera, di gravità, di acqua, di luce, di calore); eppure, *mutatis mutandis*, un analogo adattamento si attua dal neonato quando questo viene alla luce. Il polmone atelettasico, immobile ed ischemico, sotto la spinta anossiemica da interruzione del funicolo ombelicale, si espande, richiama per la prima volta l'atmosfera entro se stesso, dispiega gli alveoli, che mentre si riempiono di aria, si irrorano nelle loro pareti di sangue avido di ossigeno; in tal modo in pochi minuti la cessata molteplice funzione placentale viene sostituita con la respirazione, che ritmicamente dura per tutta la vita.

La nutrizione che viene garantita dal circolo placentare attraverso la elaborazione del sangue materno, venuta a cessare repentinamente con la nascita, richiede con urgenza una sostituzione che si adatti al nuovo ambiente. Così si attua la suzione del latte, la deglutizione, la digestione nei vari segmenti dell'apparato gastroenterico, l'assimilazione e l'escrezione. Organi inerti o quasi entrano in attività come le ghiandole salivari, le ghiandole gastriche ed enteriche, il fegato, il pancreas, ecc. Movimenti muscolari riflessi di suzione, deglutizione, peristalsi, ecc. provvedono al transito alimentare, mentre il latte materno, direttamente succhiato e sottratto al contatto atmo-

sferico, costituisce ancora una vera comunione fra madre e figlio in quanto viene assunto non solo un alimento perfetto dal lato chimico, ma un vero tessuto liquido carico di cellule vive e di una vitalità extracellulare messa in evidenza dalle esperienze sulla variazione della tensione superficiale del latte (Messori e Piccardi). La termoregolazione, funzione del tutto latente nella vita intrauterina, perché il feto viene regolato attraverso il sangue materno che garantisce una termostabilità quasi assoluta intorno a 37° , obbliga ad un tratto il neonato ad adattarsi a temperature quasi sempre più basse, talvolta molto inferiori come succede nelle stagioni invernali e nelle regioni nordiche, e pertanto il neonato mette in azione meccanismi riflessi nervosi, ancora in parte sconosciuti, che garantiscono una temperatura del corpo il più possibilmente costante; a questo scopo suppliscono però anche le cure parentali di difesa, come l'accostamento al corpo materno, il vestiario, la copertura, il riparo in ambienti riscaldati, ecc. Il contatto fisico con l'ambiente esterno è pure esso rapido e generalizzato, ed anche in questo caso le cure parentali aiutano l'adattamento ambientale della cute. Il rene, dopo la brusca cessazione della funzione emuntoria della placenta, sollecitato dall'accumulo ematico delle scorie metaboliche, viene stimolato nella struttura dei singoli nefroni a secernere l'orina. Così gli organi di senso, inattivi sino alla nascita, iniziano gradatamente la loro funzione sollecitati dalle esigenze del nuovo ambiente. I rumori anche tenui raggiungendo gli organi cocleari ne sollecitano la funzione specifica, come i primi raggi luminosi penetrati nelle pupille, stimolano la funzione retinica. La sollecitazione funzionale dell'occhio non può attribuirsi alla sola sorgente luminosa, ma verisimilmente a molti altri elementi che determinano la reattività neurosensoriale e motrice e che a loro volta risentono dell'ambiente esterno e dei suoi stimoli. Senza la funzione oculare il neonato infatti permane in un automatismo involontario; l'assenza di questa importante funzione porta ad un ritardo nella evoluzione, soprattutto perché manca la reciproca risonanza fra gli organi sensoriali della vista, del tatto e dell'udito, come si osserva nei nati ciechi. Questa funzione appare affievolita nei vari gradi di immaturità, dove le acquisizioni visive ricevute durante i giorni anticipati di vita extrauterina sono superiori alla fisiologica evoluzione che avviene nell'utero materno nell'assenza di luce, come succede nel nato a termine (Esente). Analogamente si comporta la eccitabilità neuromuscolare nell'immaturo (Messori).

Alla necessità di isolamento dall'ambiente che, come abbiamo veduto, si realizza a tutela della morfogenesi dell'organismo in sviluppo, si contrappone la necessità altrettanto urgente che l'organismo ha di essere stimolato tempestivamente dall'ambiente stesso in quanto una serie di reazioni devono insorgere a tempo perché gli organi del nuovo individuo si completino sia morfologicamente che funzionalmente.

Molte altre funzioni secondarie seguono quelle principali del neonato e ne esaltano l'attività in armonia con le esigenze del nuovo ambiente, a ciò coadiuvano in molti casi le cure dei genitori, che costituiscono un insieme di atti di difesa in parte istintivi, in parte volontari.

Biologia. — *Induzione di arti soprannumerari in «Bufo vulgaris» mediante sostanze citolitiche (trapianti da embrioni di «Rana esculenta», impianti di frammenti di rene cotto) (*)*. Nota di TEODORO PERRI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

In precedenti pubblicazioni, dal 1946 in poi ⁽¹⁾, mi sono occupato estesamente dell'induzione di arti soprannumerari negli Anfibi, che nel maggior numero dei casi ottenni mediante trapianto sul tronco di embrioni di *Bufo vulgaris*, di abbozzi che vanno in necrosi entro pochi giorni perché röntgenirradiati con dosi nettamente letali. In seguito alla necrosi si liberano le sostanze citolitiche, le quali stimolano la somatopleura circostante onde la formazione di arti soprannumerari. Ebbi casi positivi non solo con abbozzi röntgenirradiati (la tecnica che più usai perché molto semplice), ma anche con abbozzi che andavano in necrosi perché asportati da embrioni ibridi letali (*Bufo viridis* ♀ × *Bufo vulgaris* ♂): posi così in evidenza che non aveva importanza la causa che porta a necrosi il trapiantato. Allo scopo, come si vedrà meglio tra poco, di approfondire ulteriormente la questione della natura dello stimolo, ho iniziato quest'anno ricerche con sostanze citolitiche liberantesi in condizioni sperimentali differenti. In concreto, in alcuni casi ho impiantato, sul tronco di embrioni di *Bufo vulgaris*, frammenti di rene di cavia, ed in altri casi ho trapiantato, sempre sul tronco di embrioni di *Bufo vulgaris*, abbozzi di embrioni normali di *Rana esculenta* che vanno in distruzione a causa dell'incompatibilità tra le due forme. Benché abbia finora ottenuto solamente due casi positivi, mi pare tuttavia che questi risultati meritino di essere ricordati anche perché, come vedremo nelle Considerazioni, possono condurre ad un esame più approfondito del complesso induttore–competenza nella formazione degli arti soprannumerari.

TRAPIANTI EMBRIONALI DA «RANA ESCULENTA» SU «BUFO VULGARIS». — È ben noto che l'ambiente biochimico di *Bufo* è nettamente tossico per tessuti di embrioni di differente genere, come risulta da ricerche del Giardina, del Bytinski-Salz, particolarmente del Cotronei ed allievi, del Reverberi. Questa incompatibilità, sempre notevole pur variando entro certi limiti a seconda della combinazione sperimentata, è nettissima nel trapianto embrionale di abbozzi di *Rana esculenta* su *Bufo vulgaris*. Epper ciò si ha che con la distruzione del trapiantato si liberano le sostanze citolitiche delle quali, appunto, ho inteso indagare il potere di stimolazione agli effetti della formazione di arti soprannumerari.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Perugia, con un contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) Vedi il mio lavoro riassuntivo in «Experientia», 1955.

In vari casi ho eseguito il trapianto della parte apicale della testa di embrione normale di *Rana esculenta*, sul tronco di embrione di *Bufo vulgaris*, operando allo stadio di bottone codale piccolo. Il trapiantato ben presto comincia ad essere inglobato dalla cute del portatore, e qualsiasi traccia di esso è già scomparsa vari giorni prima che inizi la vita larvale del portatore. In uno di questi casi, che poi fissai in metamorfosi, ho ottenuto la formazione di un arto soprannumerario, che emerge dal terzo posteriore del tronco. È un arto tozzo, molto più piccolo del normale; in vita fu sempre immobile ed insensibile. All'esame *in toto* sono ben distinti i suoi vari segmenti; l'autopodio è atipico e termina con quattro dita molto irregolari e non è possibile distinguere se trattasi di un arto anteriore o posteriore nè se sia di lateralità destra o sinistra. L'esame microscopico permette di aggiungere che vi è un emicinto atipico; tutto lo scheletro è irregolare, lo zeugopodio è ad un solo asse, molto atipico è l'autopodio; di muscolatura ve n'è solo ed in piccola quantità in corrispondenza dell'emicinto e dello stilopodio. Lo scheletro di questo arto è del tutto indipendente dallo scheletro del portatore.

Dell'interpretazione di questo caso me ne occuperò nel paragrafo dedicato alle Considerazioni.

IMPIANTO DI RENE DI CAVIA. - Il secondo caso di arto soprannumerario l'ho ottenuto mediante impianto su embrione di *Bufo vulgaris*, di un frammento di rene cotto di cavia.

È superfluo che qui m'indugi a rilevare la grande importanza che nello svolgimento delle nostre conoscenze sui processi induttivi ebbe la sperimentazione con tessuti morti o addirittura con sostanze inerti ⁽²⁾. Si tratta essenzialmente di ricerche eseguite allo stadio di gastrula. Per gli arti soprannumerari negli Urodeli, rammento che il Balinsky aveva sperimentato, ottenendone un caso positivo in *Triton*, con l'impianto di un frammento di celloidina (1927) ⁽³⁾; vi sono inoltre esperienze d'impianto di cartilagini nei tritoni adulti che dettero casi positivi d'induzione di arti soprannumerari (Fedotov, 1946) ⁽⁴⁾. Ch'io sappia non vi sono adeguate esperienze negli Anuri, ove si hanno condizioni per vari aspetti differenti che negli Urodeli in rapporto con il differente piano di organizzazione correlato con l'attitudine al salto che si ha negli Anuri e non si ha invece negli Urodeli. Nelle ricerche sull'induzione di arti soprannumerari negli Anuri rilevai più volte che i trapianti da me eseguiti avevano di peculiare che erano tessuti viventi ma destinati ad andare in necrosi in pochi giorni a causa della röntgen-irradiazione subita o perché appartenenti ad ibridi letali. Mi è sembrato opportuno passare ora a sperimentare con tessuti morti (come mi ero già proposto nel 1947) ⁽⁵⁾ per approfondire ulteriormente la genesi ed il mecca-

(2) Vedi T. PERRI, in « La Ricerca Scientifica », anno 21, n. 7 (1951).

(3) B. I. BALINSKI, in « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 110, 71 (1927).

(4) D. M. FEDOTOV, in « Nature », vol. 158, 18, 18 (1946).

(5) T. PERRI, in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. III, p. 613 (1947).

nismo d'azione delle sostanze citolitiche, tenendo anche presente l'aspetto quantitativo, ossia la frequenza e tipicità d'induzione. Inoltre la sperimentazione con impianti, in giovani gastrule, di tessuti adulti sia freschi che uccisi con varie modalità, ha lasciato in sospeso numerose questioni ⁽⁶⁾, ed è probabile che si possa raggiungere qualche chiarimento sperimentando in condizioni molto differenti, come nell'induzione di arti soprannumerari. Ho cominciato ad indagare con impianti di rene perché tra i tessuti adulti esso fu uno dei più sperimentati (Holtfreter, Chuang, Toivonen, Kuusi e molti altri), ma molti altri tessuti spero di cimentare in seguito sia freschi che variamente trattati nonché i loro estratti.

Nelle mie esperienze di quest'anno ho in vari casi impiantato, sul tronco di embrioni di *Bufo vulgaris* allo stadio di bottone codale piccolo o piccolissimo, frammenti di rene di cavia sia fresco che cotto per ebullizione da mezz'ora a tre ore. Sul tronco dell'embrione praticavo, al microscopio da dissezione, una piccola incisione interessante il tegumento ed il mesoderma, e per essa introducevo il frammento di rene cercando di fare in modo che rimanesse a contatto con il mesoderma. Un inconveniente da segnalare è che spesso l'impiantato viene precocemente espulso. Il caso positivo, che poi fissai in metamorfosi, l'ottenni con un frammento di rene cotto per mezz'ora. Trattasi di un arto soprannumerario che emerge dalla metà posteriore del tronco; è di discreta lunghezza ma assai esile e con l'autopodio del tutto atipico. In vita, quest'arto fu sempre rigido ed insensibile. L'esame microscopico ha mostrato che vi è un emicino del tutto atipico; anche lo scheletro dell'arto libero è irregolare, particolarmente l'autopodio ove vi sono solo pochi pezzi cartilaginei; la muscolatura è praticamente assente. Lo scheletro di quest'arto soprannumerario è ben distante dallo scheletro del portatore. Com'era da attendersi non è rimasta nessuna traccia del frammento di rene impiantato.

CONSIDERAZIONI. — Ho già detto precedentemente che queste esperienze saranno ampiamente ripetute; tuttavia anche trattandosi di due soli casi positivi, esse presentano un evidente interesse.

Anzitutto viene stabilito che anche le sostanze citolitiche provenienti da trapianti che vanno distrutti per la tossicità del portatore, o da impianto di tessuti morti, sono idonee a stimolare la somatopleura onde la formazione di arti soprannumerari.

Questi risultati sono poi interessanti per un altro aspetto: per il contributo che portano alla conoscenza del complesso induttore-competenza nella induzione di arti soprannumerari. È legge generale dell'induzione, che perché questa si verifichi è necessario che la durata del potere inducente e la durata della competenza coincidano almeno per un certo periodo di tempo ⁽⁷⁾. Ciò premesso, è da chiedersi perché nell'esperienze esposte in questo lavoro si

(6). S. TOIVONEN, in « Rev. Suisse de Zool. », vol. 57, (1950).

(7) NEEDHAM, *Biochemistry and morphogenesis*. Cambridge 1942.

siano avuti così scarsi risultati positivi. Vediamo dapprima le condizioni che si verificano nei trapianti di abbozzi di *Rana esculenta* su *Bufo vulgaris*. Si ha anzitutto la stessa facilità di attecchimento che nel trapianto di abbozzi röntgenirradiati; e si ha parimenti, come tutto lascia pensare, che il trapiantato venga a trovarsi in giusta posizione affinché le sostanze citolitiche man mano che si liberano vengano a contatto con la somatopleura. Si tenga inoltre presente che ho trapiantato la parte apicale della testa, ossia lo stesso complesso di abbozzi con il quale nei trapianti da embrione röntgenirradiato su embrione normale (*Rana esculenta* su *Hyla* ⁽⁸⁾, oppure *Rana esculenta* su *Triton* ⁽⁹⁾) si sono avuti molti casi positivi d'induzione di arti soprannumerari. Ed allora la diversa frequenza di risultati positivi deve, con ogni probabilità, ricercarsi nella diversa velocità di distruzione cui soggiace il trapiantato a seconda che vada distrutto per la röntgenirradiazione subita oppure per la tossicità del portatore; in quest'ultimo caso, la liberazione delle sostanze citolitiche potrebbe non coincidere con il periodo di maggiore reattività della somatopleura. Prossime esperienze controlleranno questa ipotesi, tenendo particolarmente di mira lo stadio nel quale si esegue il trapianto. Analoghe considerazioni valgono per l'impianto di frammenti di rene; in questi casi è però da esaminare anche la capacità totale di stimolo delle sostanze citolitiche che si liberano, la quale capacità può variare, in rapporto a molteplici condizioni, da tessuto a tessuto.

La notevolissima frequenza d'induzione di arti soprannumerari che si ottiene mediante il trapianto da embrione röntgenirradiato su normale, in confronto ai risultati scarsissimi ottenuti nelle condizioni sperimentali esaminate in questo lavoro, pone in rilievo che una notevole frequenza d'induzione dipende dal verificarsi di un insieme armonico di condizioni riferentesi simultaneamente al fattore « induttore » ed al fattore « competenza ».

CONCLUSIONI. - I risultati esposti in questa Nota hanno adunque mostrato che in *Bufo vulgaris* le sostanze citolitiche provenienti dal trapianto di abbozzi che vanno in necrosi per la tossicità del portatore, oppure quelle provenienti dall'impianto di tessuti morti, possono stimolare la somatopleura del tronco a formare arti soprannumerari. Questi risultati sono inoltre interessanti perché permettono di approfondire l'analisi del complesso induttore-competenza nell'induzione di arti soprannumerari.

(8) T. PERRI, in questi « Rendiconti », ser. 8^a, vol. XIV, p. 845 (1953).

(9) T. PERRI e L. NOTARNICOLA, in questi « Rendiconti », ser. 8^a, vol. XVII, p. 77 (1954).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica che hanno scusato l'assenza i Soci Ghigi e Meneghetti.

Il Presidente dà quindi il doloroso annuncio della scomparsa del Socio Nazionale Carlo Somigliana, avvenuta il 20 giugno, del Socio Corrispondente Vincenzo Bisceglie, deceduto il 17 ottobre e del Socio Straniero Robert Wood del quale s'ignora la data del decesso. Il prof. Giordani invia un pensiero di reverente omaggio alla memoria dei colleghi scomparsi e comunica che essi saranno commemorati nelle prossime sedute.

Il Presidente porge il suo particolare saluto ai nuovi Soci presenti alla seduta e comunica che hanno ringraziato per la nomina i Soci Nazionali Giulio Natta, Adolfo Quilico, Gian Battista Dal Piaz, Alessandro Ghigi e i Soci Corrispondenti Giuseppe Scorza Dragoni, Guglielmo Righini, Giovanni Merla, Francesco Penta ed Eleonora Corti Francini.

COMUNICAZIONI VARIE

Il prof. Giordani informa i Colleghi che sono presenti alla seduta il prof. Weinstein dell'Università di Maryland e il prof. Widder dell'Harvard University e porge ai due ospiti il cordiale saluto della Classe e suo personale.

Il prof. Giordani comunica che è pervenuta all'Accademia, tramite il Consiglio Nazionale delle Ricerche, una Memoria del sig. Louis Augustin Valette ma che non ritiene, avendola esaminata, che sia da doversi prendere in considerazione.

Il prof. Giordani informa poi la Classe che l'Accademia è stata invitata, dalla Commissione Nazionale Italiana dell'U.N.E.S.C.O. a designare un suo rappresentante in seno al Comitato Consultivo Internazionale per le Scienze del mare che il Direttore Generale dell'U.N.E.S.C.O. intende costituire e del quale dovrebbero essere chiamati a far parte dieci esperti italiani specializzati nei campi dell'oceanografia fisica e chimica, biologia marina, geologia e topografia sottomarina, meteorologia marittima e questioni connesse di limnologia.

Il Socio Cotronei propone che l'Accademia nomini il Socio Umberto D'Ancona.

La proposta è accettata.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato dell'ing. Narciso Desirello, pervenuto all'Accademia in data 12 luglio corrente anno, e un altro plico del prof. Vincenzo Caselli, giunto il 10 ottobre u. s.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che i due plichi siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Beccari offre in omaggio il 2° volume della sua opera «Anatomia comparata dei Vertebrati» che tratta dell'Apparecchio scheletrico e che fa seguito al 1° volume che riguardava l'Apparecchio tegumentario e, successivamente, il volume che raccoglie gli Atti del XVI Convegno della Società Italiana di Anatomia, tenuto a Pisa dal 27 al 30 settembre 1954, consistenti in 2 relazioni e 68 comunicazioni.

Il Socio Sansone presenta due volumi in lingua russa con la traduzione del primo e secondo volume della 2ª edizione delle sue «Equazioni differenziali ordinarie nel campo reale», edite dal C.N.R. nel 1948 e 1949.

I due volumi nella traduzione russa sono apparsi rispettivamente nel 1953 e 1954 e il Direttore delle Edizioni di Letteratura Straniera, P. Ciubikov, gli ha scritto in proposito: «con soddisfazione vi comunico che questa edizione russa gode del generale consenso dei lettori sovietici».

Il Socio Bompiani presenta due volumi. Uno, proprio, sulla «Geometria degli elementi differenziali», vol. I, che raccoglie le lezioni di Geometria Differenziale tenute nello scorso anno nell'Università di Roma: ritiene che vi siano varie novità di metodi e di risultati. L'altro, sul «Teorema di Riemann-Roch e questioni connesse», contiene i corsi svolti da G. Hirzebruch, F. Severi, B. L. Van der Waerden nel primo ciclo (29 giugno-8 luglio 1955) del Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.). Il Socio Bompiani prende occasione per ringraziare il Consiglio Nazionale delle Ricerche che ha appoggiato l'iniziativa di questi corsi.

Il Socio Polvani presenta due fascicoli del Supplemento al vol. II, serie X del «Nuovo Cimento» di cui il primo, dedicato alla memoria di Enrico Fermi, contiene i «Rendiconti» del Corso tenuto a cura della Scuola Internazionale di Fisica e della Società Italiana di Fisica nella Villa Monastero a Varenna dal 18 luglio al 7 agosto 1954 e il secondo la commemorazione di E. Fermi, tenuta a Varenna e a Como il 6 agosto 1955, nell'anniversario dell'ultima lezione svolta dall'illustre Fisico al predetto Corso estivo.

Il Socio De Blasi presenta, a nome della «Sansoni Edizioni Scientifiche», il VII volume della «Enciclopedia Medica Italiana», contenente le lettere «O - Pru» e si augura che presto possano essere pubblicati gli ultimi due volumi con i quali si completa l'importante opera.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

CONGRESSI

Il Socio G. Levi riferisce sul VI Congresso Federativo internazionale di Anatomia, al quale egli ha rappresentato l'Accademia unitamente al prof. Beccari, con le seguenti parole:

«Questo Congresso si tenne a Parigi dal 25 al 30 luglio di quest'anno, sotto la presidenza del prof. Remy Collin, già professore di Istologia nell'Università di Nancy e Segretario perpetuo della «Association des Anatomistes». Il Congresso precedente si era tenuto ad Oxford nel luglio 1950.

«Gli intervenuti furono oltre un migliaio; la rappresentanza più numerosa fu quella delle Università degli Stati Uniti, nelle quali le discipline morfologiche hanno assunto negli ultimi anni un grande sviluppo. Varie università italiane erano rappresentate da professori ed assistenti.

«Anche questa volta, come al Congresso di Oxford, fu indispensabile la suddivisione in numerose sezioni (10); e più precisamente: Anatomia macroscopica (2 sezioni), Antropologia, Biologia, Citologia ed Istologia del tessuto nervoso, Embriologia, Endocrinologia, Istologia generale, Istologia speciale, Neurologia.

«È questa la conseguenza della specializzazione che si va manifestando in tutte le discipline; lo stesso si nota nella Fisiologia; un tempo la Biochimica apparteneva alla Fisiologia, oggi è divenuta una disciplina distinta.

«Coloro che, come il sottoscritto, appartengono ad un'altra generazione, giudicano questa specializzazione eccessiva: ma probabilmente abbiamo torto. È una necessità imposta dal grande sviluppo dei tecnicismi.

«Il periodo in cui i morfologi coltivavano contemporaneamente l'Anatomia comparata, l'Organogenesi, la Citologia e l'Istologia appartiene ad un passato remoto; oggi gli studiosi di citogenetica, di microscopia elettronica, di embriologia sperimentale parlano un linguaggio diverso gli uni dagli altri e s'interessano a problemi che, almeno per il momento, hanno ben pochi punti di contatto. Non possiamo che augurarci che questi punti di contatto si facciano col tempo più numerosi. Ed a questo programma dovrebbero essere informati i congressi. Ma se si continuerà col sistema attuale di frazionare gli argomenti, facendoli svolgere in tante riunioni distinte, questo fine non sarà mai raggiunto.

«L'assemblea generale ha accettato il cortese invito del prof. G. W. Corner, direttore del Carnegie Institute of Embriology (Baltimore) di tenere il prossimo Congresso federativo a Boston nell'estate 1960».

Il Socio Beccari informa i Colleghi di aver preso parte a una seduta plenaria del «Comitato Internazionale per la revisione della nomenclatura anatomica» con le seguenti parole:

«Come ha già riferito il prof. Levi io pure partecipai al Congresso internazionale federativo di Anatomia tenutosi a Parigi nel luglio u. s., ove ebbi l'onore di rappresentare insieme a lui l'Accademia.

«Presi parte inoltre a una seduta plenaria del Comitato internazionale per la revisione della Nomenclatura anatomica che fu tenuta pure a Parigi il giorno prima del Congresso, onde terminare i propri lavori e presentare le conclusioni al Congresso stesso.

«Questo Comitato, del quale facevo parte come delegato della Società Italiana di Anatomia insieme ai delegati di quasi tutte le altre società anatomiche del mondo, costituito a richiesta del precedente Congresso interna-

zionale di Anatomia del 1950, si era già riunito due volte a Londra, nel 1952 e 1954, e aveva pubblicato sotto forma provvisoria la lista dei nomi concretati in un volumetto intitolato *Nomina Anatomica*, del quale presento una copia all'Accademia. Il volumetto fu distribuito a tutti i partecipanti al Congresso di Parigi e, in Italia, ai direttori di tutti gli istituti di Anatomia umana normale delle università.

« Nella seduta plenaria di Parigi tutti i membri del Comitato si trovarono concordi nel ritenere che non si potesse, seduta stante, rivedere ulteriormente la lista dei nomi ed eventualmente modificarla, e si deliberò di presentarla al Congresso com'era, suggerendo di considerarla definitiva. Il Congresso aderì al suggerimento del Comitato nella sua seduta di chiusura, dichiarando ufficiale la lista pubblicata in forma provvisoria e che si intitolerà: *Nomina Anatomica Parisienses (N.A.P.)* ».

Il Socio Beccari riferisce quindi sui lavori di un Convegno internazionale, riservato ai Neurologi, con le parole che seguono:

« Terminato il Congresso di Parigi, andai a Groningen in Olanda per partecipare ad altro Convegno internazionale, che aveva inizio pochi giorni dopo. Si trattava di una riunione più ristretta, di soli Neurologi, promossa da un Comitato internazionale del quale facevo parte e organizzata dal prof. J. Ariens Kappers direttore dell'Istituto di Anatomia e Embriologia della Università di Groningen. Furono invitati neuro-anatomisti, neuro-fisiologi e neuro-patologi a portare al Convegno relazioni e comunicazioni su tre temi principali, ai quali si dette il carattere di *symposia*: anatomia e fisiologia della sinapsi, liquido cerebrospinale e organi delle pareti ventricolari, anatomia e fisiologia della sostanza reticolata dell'asse cerebrale. L'affluenza fu considerevole (una sessantina di convenuti) e le relazioni e comunicazioni numerose e interessanti.

« Il Convegno era dedicato alla memoria di LUDWIG EDINGER, il rinomato neurologo di Francoforte del quale quest'anno ricorreva il centenario della nascita. Avendo io collaborato in gioventù con l'Edinger nel suo istituto, fui invitato a metterne in evidenza la personalità scientifica e il merito come fondatore dell'Anatomia comparata del sistema nervoso dei vertebrati. Ciò feci nella seduta inaugurale, dopo il discorso del Presidente onorario, prof. BOEKE ».

Il Presidente ringrazia i Soci G. Levi e Beccari.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Natta, Segre, Picone, Cassinis, Sansone, Tonzig, Abetti, Bonino, Fantappiè, Scorza Dragoni, Persico, Califano, Armellini, Rolla, Cotronei, Pupilli, Zagar e Bompiani.

Il Socio Majorana si riferisce a due Note da lui inviate all'Accademia per i Rendiconti nell'ultimo periodo delle ferie e che sono in corso di stampa.

Con la prima di tali Note, egli ha mostrato perché e come si debbano modificare le ammissioni sinora fatte sulla costituzione del pianeta Giove. Da ciò egli trae lo spunto per una conferma dell'ipotesi cosmogonica da lui formulata nella prima seduta accademica dell'anno scorso, e per l'impostazione di una nuova teoria della gravitazione come è mostrato nella seconda Nota.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria. Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BOMPIANI E. — Ancora sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo.

SEGRE B. — Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota II.

SEGRE B. — Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota III.

BOURGIN D. G. — Un indice dei punti uniti (pres. dal Socio M. PICONE).

COSSU A. — Connessioni tensoriali per tensori doppi misti (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

DENNISTON R. H. F. — Sui numeri di Betti delle varietà razionali (pres. dal Socio B. SEGRE).

MARRÈ E., LAUDI G. e ARRIGONI O. — Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. XV. Azione inibente dell'acido deidroascorbico sull'attività deidrogenasica di preparati enzimatici vegetali (pres. dal Socio S. TONZIG).

MESSERI E. — Le cure parentali in relazione all'ambiente. Nota II (pres. dal Socio C. CIACCIO).

MORUZZI G. e POMPEIANO O. — Soppressione dell'atonia fastigiale del Gatto decerebrato mediante sezione del N. VIII contralaterale (pres. dal Socio G. C. PUPILLI).

VALCOVICI V. — Sur les principes de Hamilton et de la moindre action (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 novembre 1955

- ALBERTI Giuseppe. — *Vitamine e vitaminizzazione*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1955. Pp. 125, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, 34).
- ANSPACH Pierre. — *Aperçu de la Théorie des polygones réguliers*. Bruxelles, 1955. Pp. 92, in-8°.
- Atti della Società Italiana di Anatomia. XVI Convegno Sociale in Pisa, 27-30 settembre 1954*. Firenze, Macrí, 1955. Pp. 417, in-8°, con figg. (Suppl. al vol. LXIII del «Monitore Zoologico Italiano»).
- BOMPIANI Enrico. — *Geometria degli elementi differenziali*. Vol. I: *Elementi differenziali regolari piani rispetto al gruppo proiettivo*. Roma, Istituto Matematico dell'Università, 1955. Pp. 243-IV, in 4°. (In ciclostile).
- CATALDI Enzo. — *I compiti di prevenzione e di ricupero nell'assistenza post-ospedaliera*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1955. Pp. 102, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, 35).
- CENTRO DE COOPERACIÓN CIENTÍFICA DE LA UNESCO PARA AMÉRICA LATINA. — *Segundo Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América*. Villavicencio-Mendoza 21-25 Julio 1954. Montevideo, 1954. Pp. 329, in-8°.
- CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO. — *Teorema di Riemann-Roch e questioni connesse*. Varenna, 1955. Pp. 86, in-4°. (In ciclostile).
- COLONNETTI Gustavo. — *Scienza delle costruzioni*. Vol. II: *La statica delle travi e degli archi*. Torino, Edizioni Scientifiche Einaudi, 1955. Pp. 429, in-8°, con figg.
- COMEL Alvisè. — *I terreni dell'alta pianura trevigiana compresi nel foglio «Conegliano»*. Estr. da «Annali della Stazione Chimico-Agraria Sperimentale di Udine», s. 3^a, vol. VIII.
- CONGRÈS (VI^e) INTERNATIONAL D'HISTOIRE DES SCIENCES. AMSTERDAM (14-21 AOÛT 1950). — *Actes*. Vol. II. Paris, Hermann & C^{ie}, 1953. Pp. 298, in-8° (Collection de Travaux de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences, 6).
- CORTI Alfredo. — *Battista Grassi*. Estr. da «Annuario del Collegio Ghislieri», 1952-1953-1954.
- *Nel centenario della nascita di Battista Grassi*. Estr. da «Studi Medici Biologici» in memoria di Battista Grassi, 1955.
- CORTI Alfredo, VERNONI Guido e REMOTTI ETTORRE. — *Ercole Giacomini*. Estr. da «Archivio Zoologico Italiano», vol. XL, 1955.
- DEBENEDETTI Arturo. — *Apparenti anomalie ottiche dei fenocristalli di quarzo in sezioni sottili di porfidi quarziferi*. Estr. da «Periodico di Mineralogia», a. XXIV, 1955, n. 1.
- *Osservazioni geologiche nelle zone minerarie dell'Isola d'Elba*. Estr. da «Bollettino del Servizio Geologico d'Italia», vol. LXXIV, 1952.
- *Osservazioni sui giacimenti di pirite all'Elba*. Estr. da «L'Industria Mineraria», 1951, dicembre.
- DEUTSCHE WAREN-VERTRIEBSGESELLSCHAFT M. B. H. BERLIN. — *Zwei Verbündete, Kalium und Magnesium*. Beiträge zur Frage der Kali- und Magnesiumdüngung. Berlin, s. d. Pp. 204, in-8°, con figg. e tavv.
- DIRECÇÃO-GERAL DE MINAS E SERVIÇOS GEOLÓGICOS. — *Estudios analíticos de Águas Termas*. Caldas de Rainha, Caldas de Monchique, Ilha de S. Miguel. Lisboa, 1955. Pp. 180, in-8°.
- Enciclopedia Medica Italiana*. Vol. VII: *O-Pru*. Firenze, Sansoni, Edizioni Scientifiche, 1955. Pp. XII-1192, in-4°, con figg. e tavv.
- ENTE MANIFESTAZIONI FIERISTICHE PIACENTINE. — *Terza Mostra Nazionale del Metano*. Numero Unico. Piacenza, 1954. Pp. 51, in-4°, con figg.

- FAELLI Carlo. — *L'uomo e l'ambiente*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1955. Pp. 197, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, 33).
- Festschrift der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein Westfalen zu Ehren des Herrn Ministerpräsidenten Karl Arnold anlässlich des fünfjährigen Bestehens der Arbeitsgemeinschaft für Forschung am 4 Mai 1955*. Köln und Opladen, Westdeutscher Verlag, 1955. Pp. XII-680, in-8°.
- FORESTER R. D. — *Calculated travel times of seismic core waves*. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XLV, 1955, n. 3.
- GERUNDINI Gherardo. — *Rieducazione funzionale e riabilitazione al lavoro dei minorati da infortunio nel quadro dell'organizzazione sociale*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1955. Pp. 109, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, 32).
- GUTENBERG Beno. — *Channel Waves in the Earth's Crust*. Estr. da « Geophysics », vol. XX, 1955, n. 2.
- *Wave Velocities in the Earth's Crust*. Estr. da « Special Papers of the Geological Society of America », 1955, n. 62.
- HUNSAKER J. C. — *Biographical memoir of Elmer Ambrose Sperry, 1860-1930*. Washington, National Academy of Sciences, 1955. Pp. 30, in-8°.
- KUKKAMÄKI T. J. — *Gravimetric reductions with electronic computers*. Estr. da « Annales Academiae Scientiarum Fennicae », s. A., III, Geologica-Geographica, 42.
- METALLO Antonio. — *Il sistema meteo-oceanografico del Mediterraneo nella grafia della II Edizione della « Carta di Naufragio »*. Estr. da « Rivista Marittima », 1955, maggio.
- Nomina anatomica. Revisés par le Comité International de la Nomenclature Anatomique désigné lors du cinquième Congrès International d'Anatomie réuni à Oxford en 1950*. Londres et Colchester, Spottiswoode etc., 1955. Pp. XII-84, in-8°.
- Il Nuovo Cimento*. S. 10^a, vol. II, supplemento n. 1: Dedicato alla memoria di Enrico Fermi con discorso di G. Polvani; supplemento n. 2: Commemorazione di Enrico Fermi.
- PARTEL G. A. — *Iaf: Utopia or Reality?* Estr. da « Bericht über den V Internationalen Astronautischen Kongress. Innsbruck 5 bis 7 August 1954 ».
- PETTERSSON Hans. — *The Ocean Floor*. New Haven, Yale University Press, 1954. Pp. 181, in-8°, con figg.
- POLVANI Giovanni. — Vedi: *Il Nuovo Cimento*.
- POMINI LUIGI. — *Quattro lustri di coltivazione sperimentale e pratica di piante officinali od utili in provincia di Vercelli: 1934-1953*. Vercelli, Istituto Tecnico Agrario, 1954. Pp. 96, in-8°, con figg.
- *Il riso è una pianta officinale?* Estr. da « Atti del 2° Convegno Nazionale Riscultura. Vercelli 14-15 settembre 1954 ».
- PONTE Gaetano. — *Sull'origine degli idrocarburi*. Estr. da « Tecnica e Ricostruzione », 1955, nn. 1-2.
- QUARTA Dante. — *La creazione dell'Universo e la nostra nuova teoria*. (Errori ed assurdi fisico-astronomici). Taranto, Santoro, 1954. Pp. 166, in-8°, con figg.
- RAND A. L. y TRAYLOR Melvin A. — *Manual de las Aves de El Salvador*. San Salvador, Universidad de El Salvador, 1954. Pp. IV-308, in-8°, con figg.
- REMOTTI Ettore. — Vedi: CORTI Alfredo, VERNONI Guido e REMOTTI Ettore.
- ROSSINI Angelo. — *Dialogo sulla variabilità della massa con la velocità e con la direzione*. Vetralla (Viterbo), 1955. Pp. 7, in-4° (Dattiloscritte).
- SANSONE Giovanni. — *Equazioni differenziali nel campo reale*. 2^a Ed. Traduzione in russo di N. Ja. Vilenkin. Moskva, Izd. Inostr. Liter., 1953. Voll. 2, in-8°.
- SOCIÉTÉ GÉOLOGIQUE DE BELGIQUE. — *Manifestation Paul Fourmarier, Ancien Président et Secrétaire Général Honoraire de la Société Géologique de Belgique, organisée à l'occasion de son LXXV^e anniversaire*. Liège, 1954. Pp. 39, in-8°.
- STRADONE Giuseppe. — *Il ricupero dei coronaropatici nella possibilità di un trattamento chirurgico*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1955 (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, 31).
- TERLINCK Paul. — *Étude sur le statut de l'Ingénieur-géomètre allemand*. Frankfurt A. M., 1954. Pp. 54, in-8° (Sonderveröffentlichung des Instituts für Angewandte Gedäsie).
- TIRELLI Mario. — *Indici delle rassegne dei casi fitopatologici compilate da L. Petri*

- dal 1926 al 1942*. Estr. da « Annali della Sperimentazione Agraria », n. s., vol. IX, 1955, supplemento.
- TRAYLOR Melvin A. — Vedi: RAND A. L. y TRAYLOR Melvin A:
- VALLAURI Giancarlo. — *Effetti d'induzione elettromagnetica. Induzione unipolare*. Estr. da « Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino », s. 3^a, vol. I, 1955, 1.
- VERNIĆ Radovan. — *Diskussion der Sudmanschen Lösung der Dreikörperproblems*. Zagreb, Südslavische Akademie der Wissenschaften und Künste, 1954. Pp. 144, in-8°.
- VERNONI Guido. — Vedi: CORTI Alfredo, VERNONI Guido e REMOTTI Ettore.
- VILLAR E. G. — *Método para el estudio comparativo de las sustancias espumantes en medio acuoso*. Estr. da « Boletín de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura », vol. VI, 1955, n. 8.
- VILLAR E. G. — *La propiedades del americio y del erupio y su homología de posición en el Cuadro Periódico*. Estr. da « Boletín de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura », vol. VI, 1955, n. 8.
- *Teoría sobre la acción inhibidora de la formación de espumas por partículas sólidas dispersas en medio acuoso*. Estr. da « Boletín de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura », vol. VI, 1955, n. 8.
- *Teoría sobre la acción de los inhibidores de la formación de espumas en soluciones acuosas*. Estr. da « Boletín de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura », vol. VI, 1955, n. 8.

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 dicembre 1955

Presiede il Socio anziano GIUSEPPE LEVI

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche* (*).
Nota II (**) del Socio BENIAMINO SEGRE.

§ III. — CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'EQUIVALENZA SOSTANZIALE.

Completeremo il primo teorema del § II, dimostrando che:

Due trasformazioni analitiche dotate ciascuna di un punto fisso in cui abbiano gli stessi coefficienti di dilatazione risultano fra loro equivalenti dal punto di vista sostanziale, ove si supponga ch'esse siano aritmeticamente generali e che i loro coefficienti di dilatazione siano in valore assoluto tutti maggiori o tutti minori dell'unità.

A questo scopo basterà manifestamente stabilire la *linearizzabilità sostanziale* di ogni trasformazione analitica T dotata di un punto fisso O , ove essa sia aritmeticamente generale ed abbia coefficienti di dilatazione a, b, \dots, c in valore assoluto tutti minori dell'unità. Invero, da questo risultato segue subito l'analoga proprietà relativa al caso in cui a, b, \dots, c fossero in valore assoluto tutti maggiori dell'unità, tenuto conto di ciò che T^{-1} ha in O un punto fisso con coefficienti di dilatazione $a^{-1}, b^{-1}, \dots, c^{-1}$ e che la linearizzabilità sostanziale di T^{-1} implica senz'altro quella di T .

Conservando le notazioni del § II, e posto per abbreviare

$$(9) \quad \rho = \max (|a|, |b|, \dots, |c|),$$

supponiamo dunque

$$(10) \quad 0 < \rho < 1;$$

(*) Continuatione della Nota I, apparsa a p. 201 di questo volume dei « Rendiconti ».

(**) Presentata nella seduta del 12 novembre 1955.

[analoghe alle (1)], dove i coefficienti $a'_{ij\dots l}, b'_{ij\dots l}, \dots, c'_{ij\dots l}$ sono costanti reali positive, relativamente alle quali ci basterà osservare che è

$$(17) \quad a'_{ij\dots l} = b'_{ij\dots l} = \dots = c'_{ij\dots l} \geq \rho \theta^{k-1}/n.$$

Ciò premesso, notiamo che i secondi membri delle (1) convergono in un intorno n -dimensionale di O , dovendo ivi rappresentare la T . Ne consegue che esistono due costanti reali positive φ, κ per le quali — comunque si scelgano gli indici i, j, \dots, l soddisfacenti alle (2), (3) — risulta

$$(18) \quad |a_{ij\dots l}| \leq \kappa \varphi^{-k}, \quad |b_{ij\dots l}| \leq \kappa \varphi^{-k}, \quad \dots, \quad |c_{ij\dots l}| \leq \kappa \varphi^{-k}.$$

Se dunque definiamo il numero reale positivo λ assumendo

$$\lambda = \min\left(1, \frac{\rho\varphi}{n\kappa}\right),$$

talché per ogni intero $k \geq 2$ si ha

$$\lambda^{k-1} \leq \frac{\rho\varphi}{n\kappa},$$

dalle (17), (18) si trae che è

$$|a_{ij\dots l}(\lambda\theta\varphi)^{k-1}| \leq \kappa\varphi^{-k}(\lambda\theta\varphi)^{k-1} = \kappa\lambda^{k-1}\theta^{k-1}\varphi^{-1} \leq \rho\theta^{k-1}/n \leq a'_{ij\dots l}$$

e, del pari,

$$|b_{ij\dots l}(\lambda\theta\varphi)^{k-1}| \leq b'_{ij\dots l}, \quad \dots, \quad |c_{ij\dots l}(\lambda\theta\varphi)^{k-1}| \leq c'_{ij\dots l}.$$

Queste relazioni si mutano nelle

$$(19) \quad |a_{ij\dots l}| \leq a'_{ij\dots l}, \quad |b_{ij\dots l}| \leq b'_{ij\dots l}, \quad \dots, \quad |c_{ij\dots l}| \leq c'_{ij\dots l}$$

se, com'è lecito, operiamo preventivamente sulle (1) la trasformazione moltiplicativa che consiste nell'alterare le coordinate per il fattore (costante non nullo) $(\lambda\theta\varphi)^{-1}$. Poiché inoltre, in virtù della (9), valgono le

$$(20) \quad |a| \leq \rho, \quad |b| \leq \rho, \quad \dots, \quad |c| \leq \rho,$$

così vediamo che — come risultato della suddetta trasformazione preventiva — le serie di potenze (1) diventano ordinatamente minoranti rispetto alle (1').

Osserviamo ora che le (1') — e cioè le (15) — possono venir ridotte alla forma lineare

$$(21) \quad U = \rho X, \quad V = \rho Y, \quad \dots, \quad W = \rho Z,$$

mediante il cambiamento lecito di coordinate espresso dalle:

$$(22) \quad X = x + \frac{\rho^2}{n(1-\rho)}, \quad Y = y + \frac{\rho^2}{n(1-\rho)}, \quad \dots, \quad Z = z + \frac{\rho^2}{n(1-\rho)},$$

il quale naturalmente implica che in pari tempo si debba assumere:

$$(23) \quad U = u + \frac{q^2}{n(1-q)}, \quad V = v + \frac{q^2}{n(1-q)}, \quad \dots, \quad W = w + \frac{q^2}{n(1-q)}.$$

laonde

$$|\alpha_{ij\dots l}| < \frac{\rho}{\sigma} \alpha'_{ij\dots l} = \tau \alpha'_{ij\dots l};$$

e parimenti si stabiliscono le rimanenti disuguaglianze (24) nell'ipotesi attuale.

Supponiamo in secondo luogo $k > 2$, ed ammettiamo la validità delle relazioni analoghe alle (24) per ciascuno dei coefficienti di peso $2, 3, \dots, k-1$. Avuto riguardo a ciò che si è detto alla fine del § II, e tenuto pure conto delle (19), (20) e della seconda equazione (14), ne conseguono le

$$|P_{ij\dots l}| \leq \tau^{k-2} P'_{ij\dots l}, |Q_{ij\dots l}| \leq \tau^{k-2} Q'_{ij\dots l}, \dots, |R_{ij\dots l}| \leq \tau^{k-2} R'_{ij\dots l}.$$

Dalle prime equazioni (4), (4'), in base anche alla definizione di σ , si trae quindi:

$$\begin{aligned} \sigma |\alpha_{ij\dots l}| &\leq |(a - a^i b^j \dots c^l) \alpha_{ij\dots l}| = |P_{ij\dots l}| \leq \\ &\leq \tau^{k-2} P'_{ij\dots l} = \tau^{k-2} (\rho - \rho^k) \alpha'_{ij\dots l} < \tau^{k-2} \rho \alpha'_{ij\dots l}, \end{aligned}$$

sicché si ha

$$|\alpha_{ij\dots l}| < \tau^{k-2} \frac{\rho}{\sigma} \alpha'_{ij\dots l} = \tau^{k-1} \alpha'_{ij\dots l},$$

ossia la prima delle (24). In simil guisa si stabiliscono le rimanenti disuguaglianze (24), dopo di che la dimostrazione risulta completa.

Geometria. — *Ancora sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo.* Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

I. OGGETTO DELLA RICERCA. — Proseguo in questa Nota lo studio della varietà indicata nel titolo aggiungendo nuove proprietà a quelle date nella Nota precedente (*). L'applicazione alla rappresentazione degli elementi differenziali verrà fatta in un'altra Nota.

2. RAPPRESENTAZIONE SU V_3^6 DI UN FASCIO DI CONICHE BITANGENTI. —

Siano dati due E_x , uno di centro y e retta v (di coordinate y^i, v_i) l'altro di centro z e retta w (di coordinate z^i, w_i) in posizione relativa generica (cioè senza incidenze non necessarie); quindi $y^i v_i = 0, z^i w_i = 0, y^i w_i = (yw) \neq 0, z^i v_i = (zv) \neq 0$.

Poniamo inoltre

$$(2.1) \quad \xi^i = (vw)^i = v_{i+1} w_{i+2} - v_{i+2} w_{i+1}, \quad p_i = (yz)_i = y^{i+1} z^{i+2} - y^{i+2} z^{i+1}$$

ove gli indici variabili da 1 a 3 vanno calcolati rispetto al modulo 3. Non è difficile vedere che per una conica del fascio

$$(2.2) \quad x^i v_i x^j w_j = \lambda (x^i p_i)^2$$

(*) Presentata nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) Indico così la mia Nota: *Sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo*, comparsa a pp. 207-212 di questo stesso volume dei « Rendiconti ».

(individuata da λ) l'elemento E_i avente centro sulla retta $x^i v_i = t x^i p_i$ (individuata da t) si ha

$$(2.3) \quad \begin{cases} x^i = -\lambda (zv) y^i + t \xi^i - t^2 (yw) z^i \\ u_i = -\lambda v_i + 2 t \lambda p_i - t^2 w_i \end{cases}$$

che si potrebbero scrivere in forma omogenea ponendo $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ e $t = t_1/t_2$.

Se si passa da questi parametri di E_i alle coordinate ξ_j^i del punto rappresentativo su V_3^6 si vede che *una conica del piano* (come luogo dei suoi E_i) è *rappresentata da una C^4 razionale normale, che queste C^4 sono ∞^5 e che per due punti di V_3^6 non appartenenti ad un piano congiunto passano ∞^1 di queste C^4 .*

Segue anche dalle (4.4) della Nota precedente che la rappresentazione di queste C^4 sullo S_3 tangente in un punto a V_3^6 è ancora costituita da C^4 (razionali, ma necessariamente non normali).

Se, come si può, si sceglie il riferimento in modo che (indicando prima le coordinate del centro poi quelle della retta) si abbia

$$\overset{\circ}{E}_i(0, 0, 1; 0, 1, 0), \overset{i}{E}_i(0, 1, 0; 0, 0, 1)$$

si vede che le C^4 rappresentative degli E_i delle coniche del fascio sono date (per ogni λ al variare di t)

$$(2.4) \quad \begin{cases} v_0 = \lambda^2, v_1 = t\lambda, v_2 = -2\lambda^2 t, v_3 = \lambda t^2, v_4 = \lambda t^2, v_5 = t^3 \\ v_6 = -2\lambda t^3, v_7 = t^4 \end{cases}$$

da cui risulta che la C^4 relativa al parametro λ sta nello S_4

$$2\lambda v_1 + v_2 = 0, \quad v_3 = v_4, \quad 2\lambda v_5 + v_6 = 0$$

e tutti questi S_4 (quindi le $\infty^1 C^4$) stanno nello S_6 $v_3 = v_4$ e vi descrivono un cono quadrico $v_1 v_6 = v_2 v_5$ avente per vertice il piano dei punti $\overset{\circ}{\Omega}, \overset{i}{\Omega}$ rappresentanti $\overset{\circ}{E}_1, \overset{i}{E}_1$ e del punto $v_3 = v_4 (=0$ e le altre v_i nulle).

È facile caratterizzare quello S_6 . Esso contiene (per essere $v_3 = v_4$) lo S_3^* congiunto ad $\overset{\circ}{\Omega}$ (Nota precedente, n. 3) e per la stessa ragione deve contenere lo S_3^* congiunto ad $\overset{i}{\Omega}$; ne segue che: *gli S_3 congiunti a due punti generici di V_3^6 s'incontrano in un punto e stanno in uno S_6 che contiene le $\infty^1 C^4$ passanti per i due punti.*

Invece la conica che congiunge $\overset{\circ}{\Omega}, \overset{i}{\Omega}$ appartiene allo S_6 (tangente lungo essa a V_3^6) che contiene gli S_3 tangenti in $\overset{\circ}{\Omega}, \overset{i}{\Omega}$ a V_3^6 ; e i due S_6 nominati hanno in comune lo S_5 congiungente i due piani congiunti a $\overset{\circ}{\Omega}, \overset{i}{\Omega}$: a questi piani sono tangenti le $\infty^1 C^4$ (e queste determinano una proiettività fra i fasci contenuti in quei piani di centri $\overset{\circ}{\Omega}, \overset{i}{\Omega}$).

La V_2^6 delle $\infty^1 C^4$ contiene due sistemi ∞^1 di coniche (una essendo determinata da una retta per il centro di $\overset{\circ}{E}_1$ o di $\overset{i}{E}_1$) e le coniche di ciascun sistema punteggiano proiettivamente le C^4 .

3. COMPORTAMENTO DEGLI SPAZI CONGIUNTI AI PUNTI DI V_3^6 . — Risulta immediatamente dalle (2.4) (e dalla caratterizzazione intrinseca del piano e dello spazio congiunti ad $\overset{\circ}{\Omega}$) che: *le tangenti in $\overset{\circ}{\Omega}$ alle $\infty^3 C^4$ che vi passano appartengono tutte al piano congiunto ad $\overset{\circ}{\Omega}$, e i piani osculatori alle stesse stanno tutti nello S_3^* congiunto ad $\overset{\circ}{\Omega}$.*

Risulta ancora dalle stesse che: i piani osculatori in $\overset{\circ}{\Omega}$ alle $\infty^1 C^4$ per $\overset{\circ}{\Omega}$, $\overset{\circ}{\Omega}$ formano fascio (intorno alla retta di S_3^* $v_1 = v_2 = 0$); e i piani osculatori in $\overset{\circ}{\Omega}$ e in $\overset{\circ}{\Omega}$ s'incontrano nel punto $v_3 = v_4 = 0$ (le altre $v_i = 0$), che è il punto d'incidenza degli S_3^* congiunti ad $\overset{\circ}{\Omega}$ e $\overset{\circ}{\Omega}$.

Gli assi dei fasci dei piani osculatori alle $\infty^1 C^4$ in $\overset{\circ}{\Omega}$ e $\overset{\circ}{\Omega}$ s'incontrano in un punto (intersezione degli spazi congiunti ad $\overset{\circ}{\Omega}$, $\overset{\circ}{\Omega}$).

Con un cambiamento del riferimento è facile trovare lo S_3 congiunto al punto rappresentativo dell' E_r di centro (x, y) e di retta $Y + uX = y + ux$; e si trova

$$(3.1) \quad \begin{cases} -(2y + ux)v_0 + uv_1 - xv_2 + v_3 - v_4 = 0 \\ -xyv_0 + yv_1 - x^2v_2 - x(v_3 + 2v_4) + v_5 = 0 \\ y(y + ux)uv_0 - u^2v_1 - (y + ux)v_2 - u(2v_3 + v_4) + v_6 = 0 \\ -y(y + ux)v_0 + uyv_1 - (y - ux)xv_2 + (y - ux)v_3 \\ \quad - (y + 2ux)v_4 + uv_5 + xv_6 + v_7 = 0. \end{cases}$$

Il punto d'intersezione di questo S_3 con lo S_3^* congiunto ad $\overset{\circ}{\Omega}$ risulta essere

$$(3.2) \quad v_0 = ux, \quad v_1 = x(y + ux), \quad v_2 = -uy, \quad 3v_3 = y(y + ux)$$

e quindi *non* descrive tutto lo S_3^* ma soltanto la quadrica

$$(3.3) \quad 3v_0v_3 + v_1v_2 = 0.$$

Ne segue che vi sono $\infty^1 E_r$ tali che gli S_3 congiunti ai loro punti rappresentativi incontrano lo S_3^* congiunto ad $\overset{\circ}{\Omega}$ nello stesso punto. E dalle (3.2) risulta che gli E_r che danno luogo allo stesso punto sono quelli aventi i centri sopra una retta per il centro di $\overset{\circ}{E}_r$ e le cui rette passano per un punto della retta di $\overset{\circ}{E}_r$: questi E_r si rappresentano, come sappiamo, in una conica per $\overset{\circ}{\Omega}$ e viceversa ad ogni siffatta conica corrisponde un tale insieme di E_r . Quindi:

Gli S_3 congiunti ai punti di una conica per $\overset{\circ}{\Omega}$ tagliano lo S_3^ congiunto ad $\overset{\circ}{\Omega}$ in uno stesso punto; e variando la conica nel sistema ∞^2 (per $\overset{\circ}{\Omega}$) si ottengono tutti i punti della quadrica d'incidenza (3.3).*

Le ∞^1 coniche corrispondenti ad una retta per il centro di $\overset{\circ}{E}_r$ (e ad un punto variabile sulla sua tangente) si rappresentano nei punti di una genera-

trice della quadrica dello stesso sistema cui appartiene $\overset{\circ}{g}_1$ (cioè incidente $\overset{\circ}{g}_2$); e le ∞^1 coniche corrispondenti ad un punto fissato sulla tangente ad $\overset{\circ}{E}_1$ si rappresentano nei punti di una generatrice dello stesso sistema di $\overset{\circ}{g}_2$.

Gli S_3 congiunti ai punti di $\overset{\circ}{g}_1$ stanno nello $S_5^{(1)} \nu_5 = \nu_7 = 0$ e vi descrivono un cono quadrico di vertice $\overset{\circ}{g}_1$

$$(\nu_3 - \nu_4)(\nu_3 + 2\nu_4) + \nu_1\nu_6 = 0.$$

Nello stesso $S_5^{(1)}$ sta il cono degli S_3 tangenti a V_3^6 lungo $\overset{\circ}{g}_1$ (eq. (3.4)) della Nota precedente e i due coni si toccano lungo il cono di $S_4^{(1)}$ già trovato nella Nota precedente (eq. (3.5)).

Similmente scambiando $\overset{\circ}{g}_1$ con $\overset{\circ}{g}_2$.

4. PIANI INVARIANTI PER UN PUNTO DI V_3^6 . - Il fatto che due elementi lineari $\overset{\circ}{E}_1, \overset{\circ}{E}_1$ determinano una conica per i due punti rappresentativi $\overset{\circ}{\Omega}, \overset{\circ}{\Omega}$ e $\infty^1 C^4$ i cui piani osculatori formano fascio sia in $\overset{\circ}{\Omega}$ che in $\overset{\circ}{\Omega}$ porta ad ulteriori conseguenze. La conica è determinata dalla tangente in $\overset{\circ}{\Omega}$; e l'asse di quel fascio di piani in $\overset{\circ}{\Omega}$ rimane lo stesso comunque si vari $\overset{\circ}{\Omega}$ sulla conica. Si ha dunque una corrispondenza proiettiva fra le stelle di rette di centro $\overset{\circ}{\Omega}$ situate nello $\overset{\circ}{S}_3$ ivi tangente e nello S_3^* ad esso congiunto.

Se la retta per O, centro di $\overset{\circ}{E}_1$, è $y = lx$ e il punto sulla sua tangente è $(x_0, 0, 1)$ la tangente alla conica in $\overset{\circ}{\Omega}$ ha le equazioni

$$lv_1 = \nu_2 x_0, \quad x_0 \nu_2 = \nu_3$$

$$(\nu_3 + \nu_4 = 0, \quad \nu_5 = \nu_6 = \nu_7 = 0)$$

e l'asse del fascio di piani osculatori alle C^4 è

$$lv_1 = 3\nu_3, \quad x_0 \nu_2 = -3\nu_3, \quad \nu_3 = \nu_6.$$

Si considerino i piani congiungenti rette omologhe nelle due stelle: essi appartengono allo $\overset{\circ}{S}_4 \nu_5 = \nu_6 = \nu_7 = 0$ (già caratterizzato nella Nota precedente, n. 3) e proiettano da $\overset{\circ}{\Omega}$ una congruenza lineare di rette (in coordinate radiali nello spazio di $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$)

$$2p^{13} + p^{14} = 0, \quad 2p^{24} + p^{23} = 0;$$

si hanno quindi due *spazi direttori* geometricamente caratterizzati e rappresentati da

$$\nu_1 = 0, \quad 2\nu_3 + \nu_4 = 0; \quad \nu_2 = 0, \quad \nu_3 + 2\nu_4 = 0.$$

In ogni punto di V_3^6 si hanno due tali piani.

5. SISTEMI DI CUBICHE SULLA V_3^6 . — Si consideri una conica (non degenera) del piano ed un punto. Rimane definito da essi un sistema ∞^1 di E_1 , aventi i centri sulla conica e le rette passanti per il punto, che vogliamo esaminare.

Se il punto appartiene alla conica assunto quello come $O(0, 0, 1)$ e questa come $x^2 x^3 = (x^1)^2$ gli E_1 in esame si rappresentano sulla cubica sgheмба C^3

$$v_0 = 1, \quad v_1 = t, \quad v_3 = t^2, \quad v_6 = -t^3, \quad v_1 + v_2 = 0, \quad v_4 = v_5 = v_7 = 0.$$

Esistono ∞^6 di queste C^3 ; e un altro sistema ∞^6 si ottiene con la costruzione duale (E_1 aventi per rette le tangenti alla conica e i centri sopra una tangente fissata)⁽²⁾. Fissiamo una C^3 del primo sistema, per esempio quella considerata. Per essa passano ∞^1 rette del secondo sistema di V_3^6 che formano una rigata $R_{(1)}^3$ (immagine degli E_1 aventi le rette passanti per O). Per avere le rette del primo sistema per C^3 consideriamo la C^4 rappresentante gli E_1 della conica:

$$v_0 = 1, \quad v_1 = t, \quad v_2 = -2t, \quad v_3 = t^2, \quad v_4 = t^2, \quad v_5 = t^3, \quad v_6 = -2t^3, \quad v_7 = t^4;$$

ogni punto di questa dà luogo ad un punto di C^3 e ad un punto di C^4 , che così risultano riferite proiettivamente, e le congiungenti punti omologhi sono le rette cercate. Poiché C^3 e C^4 hanno in comune un punto $\overset{\circ}{\Omega}$ la superficie luogo di queste rette è una R^6 .

Si può notare in più che in $\overset{\circ}{\Omega}$, la generatrice $\overset{\circ}{g}_1$ e la tangente a C^3 dividono armonicamente la generatrice $\overset{\circ}{g}_2$ e la tangente a C^4 . Risultati analoghi (duali) scambiando i due sistemi di C^3 e quelli delle rette di V_3^6 .

Fissato un $\overset{\circ}{E}_1(0, 0, 1; 0, 1, 0)$, le $\infty^3 C^3$ relative alle ∞^3 coniche per esso $x^2 x^3 = a(x^1)^2 + 2bx^1 x^2 + c(x^2)^2$ e al suo centro sono quelle segate sulla $R_{(1)}^3$ relativa al punto $\overset{\circ}{\Omega}$ dagli $S_3 av_1 + v_2 + 2bv_3 - cv_6 = 0$ per $\overset{\circ}{\Omega}$ (appartenenti allo $S_4^{(1)}$ per $\overset{\circ}{\Omega}$).

6. NUOVI SISTEMI DI QUARTICHE SULLA V_3^6 . — Consideriamo ora gli E_1 aventi i centri sopra una conica e le rette passanti per un punto *non* appartenente alla conica: possiamo servirci della stessa conica di prima e del punto $O_1(1, 0, 0)$. Essi si rappresentano nella quartica Γ^4 :

$$v_0 = 1, \quad v_1 = t, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = t^2, \quad v_4 = -t^2, \quad v_5 = -t^3, \quad v_6 = 0, \quad v_7 = -t^4$$

la quale sega la C^4 prima considerata in due punti.

Poiché valgono considerazioni duali (per il luogo degli E_1 che hanno i centri sopra una retta non tangente ad una conica e per rette le tangenti alla conica) si ha che: *esistono su V_3^6 due distinti sistemi ∞^7 di Γ^4 razionali normali di cui nessuna coincide con una delle $\infty^5 C^4$ già trovate.*

(2) Questi due sistemi di C^3 , e loro proprietà si trovano già in G. SCORZA, loc. cit. nella Nota precedente con S., pp. 22-23.

Le rette del secondo sistema passanti per i punti di una Γ^4 (quale quella sopra determinata) ricoprono una R^3_1 e sono corde di Γ^4 (di cui due sono tangenti); questa Γ^4 e la C^4 detta sopra sono punteggiate proiettivamente e le congiungenti punti corrispondenti (rette del primo sistema) stanno sopra una R^6 .

Combinando in altro modo i risultati trovati si ha che:

Le rette dei due sistemi di V^6_3 passanti per i punti di una C^4 ricoprono due rigate R^6 ; sopra una di esse esistono $\infty^1 C^3$ di un sistema (unisecanti C^4) e $\infty^2 \Gamma^4$ di un sistema (bisecanti C^4).

E ancora:

La rigata R^6 delle generatrici di un sistema determinata da una C^4 e la rigata R^3 delle generatrici dell'altro sistema determinata da una retta del primo sistema (come direttrice) si tagliano in una Γ^4 , o in una C^3 e in una retta se questa è direttrice di R^3 e generatrice di R^6 .

Si consideri ora un $\overset{\circ}{E}_x$, rappresentato in $\overset{\circ}{\Omega}$, le ∞^3 coniche per esso e le $\infty^3 \Gamma^4$ che risultano dal fissare un punto (p, o, r) sulla tangente ad $\overset{\circ}{E}_x$; queste $\infty^3 \Gamma^4$ passano per $\overset{\circ}{\Omega}$, hanno ivi la stessa tangente $\overset{\circ}{g}_2$, lo stesso piano osculatore $(p v_2 - r v_3 = 0$ nello $\overset{\circ}{S}_3$ tangente), lo stesso S_3 osculatore $(p v_2 + r v_4 = 0, p(v_3 + v_4) - r v_5 = 0, v_6 = v_7 = 0)$ e stanno tutte in un medesimo S_4 $(p v_2 + r v_4 = 0, p(v_3 + v_4) - r v_5 = 0, p v_6 + r v_7 = 0)$.

Al variare del punto sulla tangente ad $\overset{\circ}{E}_x$ la tangente alle $\infty^4 \Gamma^4$ è sempre la $\overset{\circ}{g}_2$, il piano osculatore varia nel fascio per $\overset{\circ}{g}_2$ nello $\overset{\circ}{S}_3$ tangente, lo S_3 osculatore descrive il cono quadrico $v_2 v_5 + v_4(v_3 + v_4) = 0, v_6 = v_7 = 0$ e infine lo S_4 descrive un cono che proietta da $\overset{\circ}{g}_2$ i piani di una V^3_3 di un S_5 .

La superficie di S_4 ricoperta dalle $\infty^3 \Gamma^4$ corrispondenti ad un punto assegnato sulla tangente si rappresenta sullo $\overset{\circ}{S}_3$ tangente in $\overset{\circ}{\Omega}$ in un piano per $\overset{\circ}{g}_2$ $(p \mu_2 = r \mu_3)$ e le $\infty^3 \Gamma^4$ nel sistema lineare ∞^3 di coniche tangenti in $\overset{\circ}{\Omega}$ a $\overset{\circ}{g}_2$.

Esaminiamo infine brevemente le $\infty^3 \Gamma^4$ determinate da un $\overset{\circ}{E}_x$ e da un punto (p, q, r) non appartenente alla sua tangente. Queste Γ^4 passano tutte per il punto $v_o = p, v_2 = -q$ di $\overset{\circ}{g}_x$ (dipendente soltanto dalla congiungente il centro di $\overset{\circ}{E}_x$ col punto fissato) ed hanno in esso tutte la stessa tangente $(q v_1 = p v_4, q v_o + p v_2 + r v_4 = 0, v_3 = v_5 = v_6 = v_7 = 0$ cioè nello $\overset{\circ}{S}_3^{(2)}$, già caratterizzato nella Nota precedente, relativo ad $\overset{\circ}{\Omega}$). Differiscono invece già i piani osculatori situati tutti nello S_3 : $q v_1 - p(v_3 + v_4) + r v_5 = 0, q v_3 + p v_6 = 0, q v_o + p v_2 + r v_4 = 0, v_7 = 0$; uno di essi, individuato da $a v_5 + v_6 = 0$ dipende soltanto dallo $E_2 \supset \overset{\circ}{E}_x$ e quindi è osculatore ad $\infty^2 \Gamma^4$.

E si potrebbe proseguire con l'esame degli S_3 osculatori e degli spazi delle Γ^4 .

7. ALTRI SISTEMI DI CURVE SULLA V_3^6 . — Ogni curva piana, considerata come luogo dei suoi E_r , si rappresenta in una curva di V_3^6 . Se la curva è algebrica d'ordine n e classe m la sua immagine è tale che incontra in n punti la $R_{(2)}^3$ e in m punti $R_{(1)}^3$. Ma poiché queste superficie (si tagliano in una C^2) stanno in S_6 l'ordine della curva rappresentativa è $n + m$.

Le curve algebriche piane d'ordine n e di classe m si rappresentano su V_3^6 in curve d'ordine $n + m$.

Meccanica quantica. — *Deduzione autonoma dell'equazione generalizzata di Schrödinger, nella teoria di relatività finale.* Nota (*) del Corrisp. LUIGI FANTAPPIÈ.

1. In una Nota precedente (1) abbiamo visto che, in ogni gruppo *semisemplice* G^r , si possono scegliere parametri canonici *ortogonali*, in modo che le sostituzioni lineari del gruppo aggiunto risultino ortogonali, e quindi identiche alle loro sostituzioni duali; con ciò il gruppo aggiunto di G^r viene a coincidere col gruppo duale, e gl'invarianti di questo risultano gli stessi invarianti del gruppo aggiunto.

Nel caso di un gruppo G^r addirittura *semplice*, come è appunto il gruppo *finale* Fn_{3+1}^{10} , abbiamo anzi visto che gli invarianti indipendenti del gruppo aggiunto (e del duale) sono in numero *uguale al rango l del gruppo*, e sono dati, senza calcoli, da l polinomi, coefficienti dell'equazione caratteristica del gruppo. Fra questi *polinomi invarianti*, quello di *grado minimo*, e quindi *il più semplice* (invariante non solo dei gruppi semplici, ma anche dei gruppi semisemplici) è la *somma dei quadrati*:

$$(1) \quad \psi_2(\bar{t}) = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_r^2$$

al quale corrisponderà dunque *un operatore fisico* particolarmente importante, che sarà *un operatore differenziale del 2° ordine* (il più semplice di quelli ottenuti alla fine della Nota citata)

$$(2) \quad [\underline{x}]_2 \varphi = \psi_2(\bar{t}) \nabla \varphi(\bar{t}; \mathbf{x})$$

che rappresenterà una *grandezza quantica* dell'universo $\mathcal{M}G^r$, i cui valori, in uno stato puro φ , saranno dati dagli autovalori λ di (2), e cioè dall'equazione omogenea

$$(3) \quad [\underline{x}]_2 \varphi = \lambda \varphi.$$

(*) Presentata nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) Cfr. L. FANTAPPIÈ, *Costruzione di un sistema fondamentale di operatori fisici differenziali, per ogni universo a gruppo base semplice*, questi « Rendiconti », fasc. prec., 1955.

In questo lavoro vogliamo calcolare effettivamente questo operatore fondamentale $\overline{[\mathbf{x}]}_2$, nel caso del gruppo *finale* Fn_{3+1}^{10} , e quindi determinare la grandezza quantica da esso rappresentata nell'universo corrispondente, e cioè nel *nostro* universo sensibile, come risulta descritto nella teoria di relatività finale.

Vedremo così, che l'equazione (3), a cui si perviene, si può considerare giustamente come *la più naturale generalizzazione dell'equazione di Schrödinger relativistica* (3) della Nota citata (o equazione di Klein-Gordon), inquantoché, da essa, per $R \rightarrow \infty$ (R = raggio dell'universo) si ricade proprio, al limite, nella detta equazione di Schrödinger relativistica, invariante per il gruppo di Lorentz Lz_{3+1}^{10} , gruppo limite (pure per $R \rightarrow \infty$) del gruppo finale Fn_{3+1}^{10} . Ma per questa via risulterà di più che, per stabilire detta equazione di Schrödinger, *non è affatto necessario prendere a prestito dalla fisica classica* (non quantistica, ma relativistica) *l'equazione (1) della Nota citata*, ma che tale *equazione (3) di Schrödinger generalizzata si presenta spontaneamente, nella meccanica quantica dell'universo della relatività finale, e, al limite, anche nella meccanica quantica della relatività ristretta*, semplicemente come equazione degli autovalori e delle autofunzioni del primo *operatore fisico* $\overline{[\mathbf{x}]}_2$, corrispondente al polinomio invariante $\psi_2(t)$, di grado più basso, del gruppo aggiunto (e del duale).

Questa equazione generalizzata di Schrödinger viene così *dedotta in modo autonomo*, coi soli principi *della meccanica quantica*, come l'equazione degli autovalori e delle autofunzioni del *più semplice operatore fisico*, esistente nell'universo della relatività finale.

Tale operatore differenziale, che ha senso fisico in un qualunque universo a gruppo base *semplice* o *semisemplice*, si ottiene dunque, per $k = 2$, dalle espressioni generali (33) e (10) della Nota precedente, ponendovi per $\psi_k(\bar{t})$ o $p_s(\bar{t})$, la forma $\psi_2(\bar{t})$, data dalla (1), e cioè con la formula

$$(4) \quad \overline{[\mathbf{x}]}_2 \varphi = \psi_2(\bar{t}) \nabla \varphi(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_j^r \frac{\partial^2}{\partial t_j^2} \varphi(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) \right\}_{t=0} = \frac{1}{2} \sum_j^r D_j^2 \varphi(\mathbf{x})$$

ove abbiamo indicato con D_j le trasformazioni infinitesime del gruppo parametrico sinistro $\mathbf{x}' = \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}$, e cioè

$$(5) \quad D_j \varphi(\mathbf{x}) = \{t_j \nabla \varphi(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x})\}_{t=0} = \left\{ \frac{\partial \varphi(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x})}{\partial t_j} \right\}_{t=0}$$

che, nel caso delle traslazioni nello spazio ordinario, rappresentano proprio, a meno del fattore costante $\hbar/2\pi i$, i momenti p_j (cfr. (2) della Nota prec.).

2. Passiamo ora a calcolare questo operatore (4) per l'universo $\mathfrak{M} \text{Fn}_{3+1}^{10}$ della relatività finale, il cui gruppo base Fn_{3+1}^{10} è *semplice* (mentre invece quello di Lorentz e quello di Galilei *non sono semplici*), e per cui sono quindi *validi tutti i risultati precedenti*.

Questo gruppo $\text{Fn}_{3+1}^{\text{io}}$ ha infatti ⁽²⁾ la stessa *struttura complessa* del gruppo Os_5^{io} delle *rotazioni* dello spazio S_5 a 5 dimensioni, e la stessa *struttura reale* del gruppo $\text{Os}_{4+1}^{\text{io}}$ delle rotazioni e pseudorotazioni, che portano in sé la forma indefinita di S_5

$$(6) \quad f(y) = -y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$$

e quindi anche *ogni varietà quadrimensionale* \mathfrak{N}_4 , di equazione

$$(7) \quad f(y) = -y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = R^2$$

con R arbitrario (iperboloide iperbolico di S_5), che potremo anche pensare come *immagine del nostro cronotopo* (curvo), facendo corrispondere all'origine di questo il punto $P_0 \equiv (y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0, y_4 = R)$ di \mathfrak{N}_4 , e a ogni altro punto α del cronotopo, raggiunto dall'origine con una trasformazione T_α del gruppo finale, il punto P di \mathfrak{N}_4 , in cui è portato P_0 dalla trasformazione \bar{T}_α di $\text{Os}_{4+1}^{\text{io}}$, corrispondente alla T_α nell'isomorfismo dato dalla (18) della Nota citata in ⁽²⁾ (le trasformazioni di $\text{Fn}_{3+1}^{\text{io}}$, che lasciano fissa l'origine, e quelle di $\text{Os}_{4+1}^{\text{io}}$, che lasciano fisso P_0 , si corrispondono nell'isomorfismo, e quindi non può accadere che allo stesso punto α , raggiunto con due T_α, T'_α , a partire dall'origine, corrispondano due punti distinti P e P' in \mathfrak{N}_4 , o viceversa).

Ora, per i gruppi ortogonali o pseudoortogonali, un sistema di parametri canonici *ortogonali* è dato proprio (a meno di uno stesso fattore costante, che altera l'operatore (4) soltanto per una costante moltiplicativa) dall'*ampiezza* delle rotazioni e pseudorotazioni, misurata in radianti (immaginaria per le pseudorotazioni) che trasformano in sé l'immagine (7) del cronotopo. Se indichiamo allora con ξ_1, ξ_2, ξ_3 le *lunghezze* degli archi di meridiano di \mathfrak{N}_4 (« traslazioni », a cui sottoponiamo P_0) passanti per P_0 e ivi tangenti alle direzioni degli assi y_1, y_2, y_3 , i corrispondenti parametri canonici (ampiezze) saranno

$$(8) \quad \alpha_1 = \frac{\xi_1}{R}, \quad \alpha_2 = \frac{\xi_2}{R}, \quad \alpha_3 = \frac{\xi_3}{R}$$

poiché R si può interpretare proprio, per $y_0 = 0$, come « raggio » dell'universo o cronotopo, di equazione (7), mentre i parametri canonici delle rotazioni entro lo S_3 degli assi y_1, y_2, y_3 (che lasciano fissi gli altri due assi y_0 e y_4 , e quindi P_0) potranno esser dati dalle componenti $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ (ampiezze) di queste rotazioni, e infine, se τ è il tempo e v_1, v_2, v_3 sono le misure (legate alle velocità) delle pseudorotazioni di S_5 (che involgono l'asse y_0), potranno prendersi, come corrispondenti parametri canonici ortogonali, le espressioni

$$(9) \quad \alpha_7 = iv_1, \quad \alpha_8 = iv_2, \quad \alpha_9 = iv_3, \quad \alpha_{10} = \frac{ic\tau}{R}.$$

(2) Cfr. L. FANTAPPIÈ, *Su una nuova teoria di relatività finale*, « Rend. Lincei », ser. 8^a, vol. 17 (1954).

Con ciò le espressioni (5) delle trasformazioni infinitesime risultano date da

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} D_j \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{j0}} \varphi(\alpha \cdot \mathbf{x}) = R \frac{\partial}{\partial \xi_{j0}} \varphi\left(\frac{\xi_j}{R} \cdot \mathbf{x}\right) = R X_j \varphi(\mathbf{x}) \quad (j = 1, 2, 3) \\ D_j \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{j0}} \varphi(\alpha \cdot \mathbf{x}) \quad (j = 4, 5, 6) \\ D_{j+6} \varphi(\mathbf{x}) &= -i \frac{\partial}{\partial v_{j0}} \varphi(iv_j \cdot \mathbf{x}) = -i V_j \varphi(\mathbf{x}) \quad (j = 1, 2, 3) \\ D_{10} \varphi(\mathbf{x}) &= -\frac{iR}{c} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \varphi\left(\frac{ic\tau}{R} \cdot \mathbf{x}\right) = -\frac{iR}{c} T \varphi(\mathbf{x}). \end{aligned} \right.$$

Posto

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \varphi(\mathbf{x}) &= \Delta'_x \varphi(\mathbf{x}) \\ (D_4^2 + D_5^2 + D_6^2) \varphi(\mathbf{x}) &= \Delta'_a \varphi(\mathbf{x}) \\ (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2) \varphi(\mathbf{x}) &= \Delta'_v \varphi(\mathbf{x}) \end{aligned} \right.$$

l'operatore (4) risulta allora espresso, a meno di un fattore costante k , da

$$(12) \quad k \overline{|\mathbf{x}|}_2 \varphi(\mathbf{x}) = R^2 \left(\Delta'_x \varphi - \frac{1}{c^2} T^2 \varphi \right) + \Delta'_a \varphi - \Delta'_v \varphi$$

o anche, dividendo per R^2 , dall'espressione

$$(13) \quad \frac{k}{R^2} \overline{|\mathbf{x}|}_2 \varphi = k' \overline{|\mathbf{x}|}_2 \varphi = \Delta'_x \varphi - \frac{1}{c^2} T^2 \varphi + \frac{1}{R^2} \{ \Delta'_a \varphi - \Delta'_v \varphi \}.$$

Ora, al limite, per $R \rightarrow \infty$, gli operatori X_j e T si riducono proprio alle trasformazioni infinitesime delle ordinarie *traslazioni* rettilinee, lungo gli assi x_j ($j = 1, 2, 3$) e t del cronotopo, divenuto piano, si ha cioè, per $R \rightarrow \infty$,

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} X_j \varphi &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \xi_{j0}} \varphi\left(\frac{\xi_j}{R} \cdot \mathbf{x}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_{j0}} \varphi(\mathbf{x} + \xi_j) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, 3) \\ \lim_{R \rightarrow \infty} T \varphi &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \varphi\left(\frac{ic\tau}{R} \cdot \mathbf{x}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau_0} \varphi(t + \tau, \mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned} \right.$$

Quindi l'equazione omogenea della relatività finale

$$(15) \quad k' \overline{|\mathbf{x}|}_2 \varphi = \Delta'_x \varphi - \frac{1}{c^2} T^2 \varphi + \frac{1}{R^2} \{ \Delta'_a \varphi - \Delta'_v \varphi \} = \lambda \varphi$$

si riduce proprio, per $R \rightarrow \infty$ all'equazione di Schrödinger relativistica (3) della Nota ⁽¹⁾ e cioè alla

$$(16) \quad \Delta_2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \lambda \varphi$$

e può quindi considerarsi come la naturale generalizzazione di questa, nella teoria di relatività finale, come, con l'espressione generale (4) ne costituirebbe la generalizzazione in un qualunque universo, a gruppo base semisemplice. L'operatore (4) si può dunque considerare, in ogni tale universo, l'operatore fisico che, a meno di un fattore costante, rappresenta la *grandezza* μ^2 , quadrato della *massa di quiete* dei corpuscoli considerati.

Di conseguenza, l'equazione $\boxed{\times}_2 \varphi = 0$, che si ottiene per $\lambda = \mu = 0$, si può pensare che rappresenti, in ogni tale universo, la distribuzione delle particelle di massa *nulla*, che potremo ancora chiamare *fotoni*, e quindi tale equazione potrà ancora essere indicata come *equazione della luce generalizzata, negli stessi universi*.

È da osservare, però, che, negli universi a gruppo base *compatto*, tutti i parametri canonici ortogonali risultano *reali*, e quindi l'equazione stessa risulta di *tipo ellittico*, e non ha altre soluzioni che le costanti; possiamo quindi dire che in tali universi a gruppo base compatto, o puramente *spaziali* (o statici) *non può esistere luce* (generalizzata), che può esistere invece negli universi a gruppo base *non compatto* (come è quello finale) o universi *cronotopici* (spazio-temporali, o dinamici, con alcuni parametri canonici ortogonali puramente immaginari, come quelli corrispondenti al tempo e alle velocità, nella relatività finale).

3. Giunti a questo punto, è ora interessante rilevare che *il più semplice operatore* (15), avente senso fisico nella teoria di relatività finale, e cioè l'operatore differenziale di 2° ordine, corrispondente *al più semplice invariante* (1) $\psi_2(t)$ del gruppo aggiunto (polinomio di 2° ordine, dato dalla somma dei quadrati), è tale che, al limite, per $R \rightarrow \infty$, ci dà proprio *l'operatore* (16) *di D'Alembert*, e che da questo, con un secondo passaggio al limite, per $c \rightarrow \infty$, si ottiene anche *l'operatore Δ di Laplace*.

In altri termini, questi due operatori classici della fisica matematica, il *Laplaciano* Δ , fondamentale per la fisica non relativistica, e il *D'Alembertiano* \square , fondamentale per la fisica relativistica, che sono i primi operatori, presentatisi spontaneamente ai fisici nelle loro ricerche, di carattere *induttivo* (dalle osservazioni alle leggi), non sono altro che *i casi limiti* (o casi di degenerazione) del più semplice operatore fisico (15) della relatività finale (che abbiamo trovato invece con procedimento *deduttivo*), quando il gruppo base dell'universo degenera, al limite, dal gruppo finale Fn_{3+1}^{10} , a quello di Lorentz Lz_{3+1}^{10} , della teoria di relatività ristretta, e poi a quello di Galilei Gl_{3+1}^{10} , della fisica classica (non relativistica).

È pure interessante osservare che, per questa ricerca dei più semplici operatori fisici, il più adatto è proprio il *gruppo finale*, da cui siamo partiti, che è *semplice* (e per cui valgono quindi tutte le considerazioni svolte nella Nota precedente) e *non i suoi gruppi limiti*, di Lorentz e di Galilei, che non sono affatto semplici, ammettendo il sottogruppo delle traslazioni come sottogruppo invariante.

4. Ma l'esame dell'equazione generalizzata di Schrödinger, nella teoria di relatività finale, e cioè, dell'equazione differenziale (15) di 2° ordine, ci porta pure ad altre conclusioni degne di nota, qualora la si confronti con la sua equazione limite (16) (per $R \rightarrow \infty$) della teoria di relatività ristretta. Mentre infatti i primi termini della (15), contenenti gli operatori $\Delta'_x = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ e T^2 , sono perfettamente analoghi ai corrispondenti termini (loro limiti)

del primo membro della (16), e si può quindi pensare che gli operatori X_j e T rappresentino ancora (a meno di fattori costanti) i *momenti* p_j e l'*energia* (relativamente al gruppo finale), il gruppo dei rimanenti termini del 1° membro della (15), che va a 0 quando $R \rightarrow \infty$, rappresenta un elemento fisico di carattere del tutto nuovo. Il complesso di questi termini contiene infatti la differenza, applicata a φ , dei due operatori $\Delta'_a = \sum_j^6 D_j^2$ e $\Delta'_v = \sum_j^3 V_j^2$, formati pure coi quadrati delle trasformazioni infinitesime D_j e V_j , come Δ'_x con le X_j , e quindi tali operatori possono pure pensarsi come rappresentanti delle somme dei quadrati di certe *grandezze*, che si possono considerare come *generalizzazioni dei momenti* p_j , nel senso che tanto tali grandezze, come i momenti, sono tutti rappresentati dalle trasformazioni infinitesime del gruppo parametrico sinistro del gruppo finale (a meno di un fattore costante), relativamente ai diversi parametri del gruppo.

Ma i parametri canonici ortogonali del gruppo finale (reali e immaginari) possono pensarsi anche come i parametri canonici ortogonali del gruppo Os_5^{10} , che gli è isomorfo, e quindi proprio come *gli elementi delle matrici infinitesime* di questo gruppo, che sono tutte e sole *le matrici emisimmetriche di 5° ordine*, in cui però bisognerà supporre, per l'isomorfismo dal punto di vista reale, che la riga e la colonna di posto 0 siano puramente immaginarie (uguali ai parametri (9) e loro opposti). Ma allora il complesso di tutti questi 10 parametri ortogonali di Fn_{3+1}^{10} o di Os_5^{10} si trasforma come un tensore emisimmetrico, e cioè come un *bivettore* dell' S_5 , per queste stesse trasformazioni ortogonali di Os_5^{10} , e quindi si trasforma pure come un *bivettore* di S_5 il complesso degli operatori di derivazione, rispetto ai vari parametri, e cioè il complesso dei *momenti generalizzati*.

Passando al limite, per $R \rightarrow \infty$, con che il gruppo Fn_{3+1}^{10} si riduce al gruppo di Lorentz, si vede allora che questo bivettore dei momenti generalizzati si spezza in un *quadrivettore*, relativo ai parametri dell'ultima riga e colonna, e in un *sestivettore*, relativo ai parametri delle prime quattro righe e colonne, che si trasformano secondo il gruppo di Lorentz ristretto Lz_{3+1}^6 . Ora non è difficile riconoscere nel primo proprio il quadrivettore *momento-energia* del cronotopo relativistico S_{3+1} , mentre il sestivettore dovrà rappresentare una grandezza (a 6 componenti) che si trasforma come un *bivettore* dello stesso cronotopo, e cioè proprio *come il campo elettromagnetico*.

Se facciamo allora l'ipotesi più semplice possibile, e cioè che questo bivettore non rappresenti una nuova grandezza fisica, finora del tutto sconosciuta, ma coincida con una di quelle già note, non resta altro che identificarlo (a meno di una costante moltiplicativa) proprio *col campo elettromagnetico stesso*, di cui la differenza dei quadrati $\Delta'_x - \Delta'_v$ rappresenta allora uno dei due *invarianti* (« azione » invariante del campo elettromagnetico).

Ora, l'equazione (16), limite della (15), per $R \rightarrow \infty$, ci mostra che, nella teoria di relatività ristretta, il quadrato (λ) della « massa di quiete » è dato dalla differenza del quadrato del momento e del quadrato dell'energia (a meno di fattori costanti), e quindi ci porta a concludere per l'*equivalenza tra massa ed*

energia, che è uno dei risultati fondamentali della teoria di relatività, fonte dei più grandi successi della fisica moderna (scoperta dell'energia atomica, con la trasformazione di massa in energia).

Confrontando allora l'equazione (15) di Schrödinger, generalizzata nella teoria di relatività finale, con la (16) della teoria di relatività ristretta, si ricava, analogamente, che, fuori del limite ($R \neq \infty$), il quadrato (λ) della « massa di quiete » è dato invece da una differenza analoga a quella di prima (fra il quadrato del momento e quello dell'energia), più *un nuovo termine* (quello fra graffe, diviso per R^2), che è proporzionale all'azione invariante del campo elettromagnetico, che dunque *va conteggiata* insieme all'aumento di massa, dovuto ai momenti, e all'energia, nel calcolo della massa di quiete.

Ciò porta quindi a concludere che, nella teoria di relatività finale, dovrebbe valere un *principio di equivalenza* ancora più generale di quello fra massa ed energia, valido nella teoria di relatività ristretta, e cioè un principio di *equivalenza fra massa, energia e campo* (elettromagnetico), o meglio fra massa, energia e « azione invariante » di un campo a 6 componenti, che sembra naturale di identificare col campo elettromagnetico.

Meccanica. — *Sul problema centrale della dinamica sui ponti.*

Nota I (*) del Socio GIULIO KRALL.

Il problema meccanicamente elementare e pur centrale della dinamica dei ponti riguarda il moto di un'asta elastica vincolata agli estremi percorsa con velocità uniforme v da un carico puntuale pesante ed inerte.

Questo problema risale all'altro secolo, si inoltrò nel nostro ed ancor oggi non è che in parte risolto.

Inaugurato da Stokes (*) con una ricerca notissima in meccanica tecnica delle vibrazioni fu sistematicamente proseguito e, in un aspetto particolare, esaurito da Zimmermann in una ponderosa Memoria (2).

Ripreso da Timoshenko (3) con i metodi del Rayleigh, venne proseguito da Bleich (4) nel suo magistrale trattato sui ponti in ferro. Chi scrive considerò successivamente (5) il problema sotto l'aspetto più generale come si dirà in appresso e, dalle deduzioni teoriche raggiunte, con l'aiuto deter-

(*) Presentata nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) G. G. STOKES, « Mat. Phys. Pap. », vol. II, 178 (1883).

(2) H. ZIMMERMANN, *Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last*. Berlin 1896.

(3) S. TIMOSHENKO, *Schwingungsprobleme der Technik*, pp. 267, 277, Springer, Berlin 1932.

(4) F. BLEICH, *Theorie u. Berechnung der Eisernen Brücken*, 5, n. 16, Springer, Berlin 1924.

(5) G. KRALL, *Sulle equazioni del moto vibratorio di un ponte percorso da carichi inerti e molleggiati*, questi « Rendiconti », fasc. 2 e 10, 1936 e *Problemi della Dinamica dei Ponti* in « Acta Pont. Ac. Sc. », vol. III, n. 3 (1939).

minante dell'Istituto Nazionale del Calcolo furono tratti, attraverso i metodi di integrazione numerica, non pochi risultati per i variati casi che intervengono nelle pratiche applicazioni. Trovansi questi in una serie di ricerche apparse su questi « Rendiconti »⁽⁵⁾, in una memoria Pontificia e sistematicamente raccolti in un capitolo di un libro su la Meccanica tecnica delle vibrazioni⁽⁶⁾.

La Memoria di Stokes⁽¹⁾ e quella successiva di Zimmermann⁽²⁾ riduce il problema considerando la sola massa del carico mobile solitario e non quella del ponte; quella del Timoshenko⁽³⁾ trascura la massa del carico e considera quella diffusa del ponte. Nel trattato del Bleich⁽⁴⁾ si considera in 2^a approssimazione la massa del carico ed anche il suo molleggio partendo dalla soluzione del Timoshenko. Infine in⁽⁵⁾ e⁽⁶⁾ si affronta il problema per quel che è, considerando in pari tempo la massa del carico, sempre solitario, distinta in direttamente applicata e molleggiata, e quella diffusa del ponte. Grazie ai mezzi avuti a disposizione i sistemi di equazioni differenziali, od integrodifferenziali nel caso del molleggio, allora istituiti non rappresentarono una vana esercitazione di meccanica, e ciò sia detto almeno con riguardo al calcolo numerico del contributo della vibrazione fondamentale che, per le velocità ordinarie et ultra appare importante.

Al problema dell'asta appoggiata agli estremi seguì quello dell'asta indefinita solidale con un suolo elastico (schematizzazione della rotaia ferroviaria corrente sul Ballast), percorsa con velocità uniforme v da un carico P .

Trascurando la massa del carico, S. Timoshenko trovò⁽⁷⁾ con intuizione acutissima la nozione di quella velocità v_{cr} , cosiddetta critica, per cui in condizioni *stazionarie* il binario risulta instabile. Chi scrive trovò⁽⁸⁾ le soluzioni generali per un treno qualunque di carichi in moto non uniforme. Cercando tra le soluzioni generali quelle stazionarie del tipo

$$w(x, t) = w(x - vt)$$

rappresentanti una perturbazione dell'asse del binario ($w = 0$) che si propaga con la velocità uniforme v di una distribuzione rigida di carichi $p(x, t) = p(x - vt)$ ritrovò naturalmente la v_{cr} di Timoshenko. Successivamente⁽⁹⁾ provò a considerare un effetto della massa dei carichi su la velocità critica v_{cr} del binario. Altri seguirono indipendentemente lo stesso intento in varie ricerche.

(6) G. KRALL, *Mecc. Tecn. delle vibrazioni*, vol. II, cap. XIV, §§. 3, 4, Zanichelli, Bologna, 1939.

(7) S. TIMOSHENKO, *Method of Analysis of Statical and Dynamical Stresses in Rail*, « Proc. of the 2nd int. Congress for appl. Mechanics », Zürich, 1926 (Orell Füssli, Zürich 1927).

(8) G. KRALL, *Problemi della dinamica del binario*, questi « Rendiconti », fasc. 5-6, 1930.

(9) G. KRALL, *Velocità critiche di masse pesanti su un binario*, Questi « Rendiconti », fasc. 10, 1930.

Riprendendo questi antichi studi non più con riguardo ad un carico mobile puntuale inerte ma ad una distribuzione di carichi diffusi su un intervallo, mi è avvenuto di dover dare la loro reazione d'inerzia in forma più esplicita che non occorresse per il carico solitario, tenendo ben in rilievo il teorema di Coriolis. Così sono pervenuto ad equazioni generali, al limite in pieno accordo con quelle di Stokes e Zimmermann e con quelle studiate in ⁽⁵⁾ e ⁽⁶⁾ che comprendono, come vedremo, la soluzione di Zimmermann quando la massa del ponte svanisce.

Ma queste nuove deduzioni pienamente conformi con ^{(1),(2),(3)} e ^{(5),(6),(7),(8)} contraddicono, come vedremo sino a negarne l'esistenza, le deduzioni fatte per l'effetto della inerzia del carico su la velocità critica in un caso stazionario considerato in ⁽⁹⁾.

Non si arriva tuttavia a negare in ogni caso stazionario l'effetto dell'inerzia del carico sulla velocità critica, ma occorre, perché questo si manifesti, contemplare treni mobili diffusi indefiniti come potrebbero ad esempio essere realizzati da un treno lunghissimo in raffronto alla luce del ponte o dall'acqua corrente in un tubo indefinito poggiato su un suolo elastico, corrente si intende con velocità ben superiori a quelle considerate nelle costruzioni idrauliche, almeno per i tipi di tubi che in esse intervengono.

Tutto ciò premesso, con l'intento di dare una impostazione generale del problema dinamico di cui si tratta, anche con riguardo a strutture più complesse della travata semplicemente appoggiata quali sono le travate sostenute da una catena, cioè i sempre attuali, anche dal punto di vista aerodinamico, ponti sospesi con travata irrigidente, passo senz'altro in questa e due Note successive, a scrivere le equazioni generali del moto e a trattarne l'integrazione sia cercando soluzioni particolari sia continuando — in mancanza di meglio — con i metodi ampiamente riferiti in ⁽⁵⁾ e ⁽⁶⁾.

Si consideri un'asta elastica appoggiata agli estremi. Sia l la lunghezza, x una coordinata contata lungo l'asse a partire dall'estremo di sinistra, $B = EJ$ la flessorigidezza costante, μ la massa per unità di lunghezza, t il tempo.

Per le oscillazioni trasversali se $w = w(x, t)$ è l'elongazione in x al tempo t , se $p = p(x, t)$ è il carico dinamico, vale l'equazione notissima,

$$(1) \quad Bw'''' + \mu \ddot{w} = p(x, t)$$

essendo

$$(2) \quad ()' = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad (\bullet) = \frac{\partial}{\partial t} \quad .$$

Ove si tratti di una distribuzione rigida di carichi che si muove dall'estremo A verso l'estremo B con velocità uniforme v , è

$$p(x, t) = p(x - vt) \quad .$$

Se p è localizzata nell'intorno Δ di $x = x' = vt$ ed assume valori tali che per $\Delta \rightarrow 0$

$$(3) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{vt - \Delta/2}^{vt + \Delta/2} p(x - vt) dx = P$$

si ha un carico puntuale (concentrato) mobile con velocità v e $w(x, t)$ è soluzione dell'equazione omogenea,

$$(1a) \quad Bw'''' + \mu \ddot{w} = 0,$$

soddisfa alle condizioni agli estremi ed ha una discontinuità nella derivata 3ª (anzi nel taglio) che risulta subito con una quadratura sulla (1) tenendo presente la (3); precisamente

$$(4) \quad Bw'''' \Big|_{vt-}^{vt+} = P.$$

Se $\mu = 0$, cioè se è trascurabile la massa del ponte, la (1a) si riduce a (1b)

$$Bw'''' = 0.$$

In tal caso, per quali si vogliono condizioni agli estremi e con la condizione (4) la (1b) si integra per via elementare. Basta considerare le due soluzioni di (1b)

$$(5) \quad w = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad w = a_1(l-x)^3 + b_1(l-x)^2 + c_1(l-x) + d_1$$

$a, b, c, d; a_1, b_1, c_1, d_1$ essendo costanti arbitrarie; imporre alla 1ª soluzione le condizioni in $x = 0$, alla 2ª in $x = l$ e raccordarle in $x = x'$, dove è applicato il carico P , con continuità sino alla derivata 2ª con riguardo alla (4). Se gli estremi sono appoggi semplici deve essere in $x = 0, l; w = 0$ e $w'' = 0$ e le (5) si riducono a

$$(5a) \quad w = ax^3 + cx, \quad w = a_1(l-x)^3 + c_1(l-x).$$

La condizione (4) ed il raccordo sino alla derivata 2ª porge 4 equazioni nelle restanti 4 incognite $a, c; a_1, c_1$. Per il caso di cui si tratta, posto $P = 1$, $x' = vt$, si ha per $x \leq x'$

$$(6) \quad w(x, x') = \frac{1}{6lB} (l-x') [xx' (2l-x') - x^3],$$

per $x \geq x'$ basta scambiare x' con x .

La funzione $w(x, x')$ così definita si indica con $c(x, x')$ e dicesi *funzione di influenza* o di Green e si ha, nell'ambito lineare, per un carico P in $x = x'$,

$$(7) \quad w(x, x') = w(x, t) = Pc(x, x') = Pc(x, vt).$$

È questa la soluzione offerta dalla Statica quando si trascura la massa del carico e quella del ponte. Per varie condizioni di vincolo tale funzione trovasi esplicitata e tabellata in ⁽⁶⁾ Cap. VI.

Ciò posto, si consideri la massa $M = P : g$ di P e si trascuri però la massa del ponte. Al posto di P si sostituisce allora nella (4) la *forza perduta* e si ha in luogo della (4),

$$(4a) \quad Bw'''' \Big|_{vt-}^{vt+} = P - M \frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2}.$$

In conformità con la (7) risulta

$$(7a) \quad w(x, t) = c(x, vt) P \left(1 - \frac{1}{g} \frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2} \right).$$

Considerando anche μ , quindi le reazioni di inerzia diffuse $-\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\mu \ddot{w}$, vale la (1a) in luogo della (1b) e in conformità con la (7a) si ha, designando quì x' la variabile d'integrazione,

$$(7b) \quad w(x, t) = - \int_0^t c(x, x') \mu \ddot{w}(x', t) dx' + c(x, vt) P \left(1 - \frac{1}{g} \frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2} \right).$$

Ma riprendiamo la (7a). La linea elastica $w(x, t)$ è, istante per istante, la linea elastica dell'asta sotto ad un carico X in $x' = vt$, desumibile con la *spontanea* proporzione,

$$X : w(x', t) = 1 : c(x', x').$$

Essa è data quindi dall'espressione

$$(7c) \quad w(x, t) = \frac{w(x', t)}{c(x', x')} \cdot c(x, x'), \quad (x' = vt).$$

Pertanto, posto compendiosamente

$$w(x', t) = w(vt, t) = W(x')$$

la (7a) si riduce all'equazione differenziale, *scrivendo per brevità* x per x' ,

$$(7d) \quad W(x) = c(x, x) \cdot P \left(1 - \frac{v^2}{g} W''(x) \right).$$

È questa la celebre equazione di Stokes (per la traiettoria del carico) integrata in termini finiti da Zimmermann per la $c(x, x')$ dell'asta semplicemente appoggiata agli estremi dianzi definita. È ancora probabilmente aperta la trattazione per le $c(x, x')$ corrispondenti alle varie condizioni di vincolo agli estremi che si considerano in pratica, ad esempio quelle accennate in (6).

Sotto questo aspetto, questa equazione pienamente corretta, come anche meglio si vedrà in appresso, è stata anche in qualche noto trattato non giustamente interpretata nel senso che, scritto il termine della reazione d'inerzia nella forma

$$\frac{Pv^2}{g} W'' \cong \frac{Mv^2}{\rho},$$

il raggio di curvatura ρ anziché alla *traiettoria del carico* si attribuì alla linea elastica $w(x, t)$. Se si vuol esprimere la reazione di inerzia in termini di $w(x, t)$ occorre far ricorso al teorema di Coriolis. A questo si perviene subito esplicitando $\ddot{W} = d^2 W / dt^2$. Si ha

$$\frac{d^2 W}{dt^2} = \frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2} = [v^2 w'' + 2v \dot{w}' + \ddot{w}]_{x=vt}.$$

Il significato di questa relazione è evidente: *nell'ambito lineare*; $w'' = 1/\rho$ è la curvatura della linea elastica $w(x, t)$ all'istante t ; v^2/ρ è l'*accelerazione centrifuga*; \dot{w}' è la velocità angolare ω della tangente in $x = vt$ alla linea elastica $w(x, t)$ e quindi $2v\omega$ è l'*accelerazione complementare*; infine \ddot{w} è l'*accelerazione relativa*. Si ha dunque, a meno di termini d'ordine superiore in w , l'espressione del teorema di Coriolis quando si esplicita $d^2w(vt, t)/dt^2 = d^2W/dt^2$.

Partendo *a priori* da questo teorema si può impostare il problema di Stokes-Zimmermann del moto di P e calcolare le linee elastiche cercando indipendentemente dalla ipotesi, sia pure ovvia, espressa da (7c), le soluzioni della (1b) che soddisfacendo alle condizioni agli estremi hanno la discontinuità (4a) in $x' = vt$, che scriviamo nella forma

$$(4b) \quad Bw''' \Big|_{vt-}^{vt+} = P \left[1 - \frac{1}{g} (v^2 w'' + 2v\dot{w}' + \ddot{w}) \right]_{x=x'=vt}.$$

Occorre riconsiderare le posizioni (5a), con le costanti a, c ; a_1, c_1 funzioni di x' e quindi di t e scrivere le tre condizioni di raccordo già enunciate e quella della discontinuità in $x' = vt$, precisamente, secondo la (4b),

$$-B.6a = B.6a_1 + P \left[1 - \frac{1}{g} (v^2 w'' + 2v\dot{w}' + \ddot{w}) \right]_{x=x'=vt}.$$

Si deve ritrovare così l'equazione (7d) di Stokes e quindi la conferma della (7c).

Per quanto concerne l'integrazione della equazione completa (1a) nell'intervallo $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq l/v$; con le condizioni dell'appoggio libero $w(0, t) = w(l, t) = 0$ e $w'' = 0$ per $x = 0, l$ e quelle iniziali $w(x, 0) = 0$, $\dot{w}(x, 0) = 0$, è essa considerata in ⁽⁵⁾ per la (4a) sino a risultati numerici concreti. Il metodo allora seguito, che riprenderemo, è quello dello sviluppo di w in serie di *autofunzioni* con i coefficienti considerati come parametri lagrangiani. Ma la soluzione dovrebbe arridire per via diretta sostituendo, equivalenti alle (5a), le soluzioni della (1a).

Si consideri ora in luogo del carico inerte puntuale una distribuzione $p = p(x - vt)$ di massa non trascurabile in raffronto a quella del ponte.

Per virtù della forma esplicita data secondo il teorema di Coriolis alla reazione di inerzia, si ha in luogo della (1), l'equazione

$$(1c) \quad Bw'''' + \mu\ddot{w} = p(x - vt) \left[1 - \frac{1}{g} (v^2 w'' + 2v\dot{w}' + \ddot{w}) \right].$$

A questa equazione si può dare un aspetto integrodifferenziale analogo alla (7b), utile per l'integrazione. Si ha precisamente, indicando x' la variabile di integrazione, equivalente alla (1c), l'equazione integrodifferenziale

$$(7e) \quad w(x, t) = - \int_0^l \mu c(x, x') \ddot{w}(x', t) dx' + \\ + \int_0^l c(x, x') p(x' - vt) \left[1 - \frac{1}{g} (v^2 w'' + 2v\dot{w}' + \ddot{w}) \right]_{x=x'} dx'.$$

Prima di affrontare l'equazione (1 c) a cui siamo pervenuti ripetendo dapprima la via già fatta in ⁽⁵⁾ per il carico puntuale, merita soffermarsi su alcune sue soluzioni particolari molto espressive.

I. — Sia $p(x - vt) = p_0 = \text{cost.}$ Dunque, il treno è illimitato e costituisce un flusso uniforme di masse di portata $p_0 v : g$. Cercando soluzioni della (1 c) indipendenti da t questa si riduce alla forma

$$(1d) \quad Bw'''' + \frac{p_0 v^2}{g} w'' = p_0.$$

Cercando soluzioni soddisfacenti alle condizioni agli estremi del semplice appoggio, del tipo

$$w = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

si ha

$$A_n = p_0 \frac{\frac{4}{n\pi}}{B \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - \frac{p_0 v^2}{g} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2}, \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

Da qui si riconosce che le velocità che annullano il denominatore di uno degli A_n sono critiche per l'equilibrio. Naturalmente la più piccola v_1 da sola è determinante per l'instabilità, essa è data da

$$(8) \quad v_1^2 = v_{cr}^2 = \frac{Bg}{p_0} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2.$$

II. — Si consideri un carico P di massa trascurabile, mobile con velocità v su un binario di lunghezza infinita corrente su un suolo (Ballast) elastico. L'elasticità sia definita così che allo spostamento $w(x)$ dell'area d'appoggio corrispondente a $\Delta x = 1$ si oppone una reazione elastica $-\beta w$, *indipendentemente da ogni spostamento nell'intorno di x* (ipotesi di Zimmermann che presiede tutta la statica del binario e delle fondazioni in generale). Allora, a sinistra delle (1, a, b, c, d) considerate, va aggiunto il termine $+\beta w$. In particolare la (1 a) diviene

$$(1e) \quad Bw'''' + \mu \ddot{w} + \beta w = 0$$

e si devono raccordare due soluzioni, nulle all'infinito, nel punto $x' = vt$, con riguardo alla continuità sino alla derivata 2^a ed alla discontinuità (4).

Ponendo $z = (x - vt)$ si ha da (1 e),

$$(1f) \quad B \frac{d^4 w}{dz^4} + \mu v^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \beta w = 0.$$

Posto

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4B}} \quad k = \frac{v^2}{c^2} \quad c = \sqrt[4]{\frac{4B\beta}{\mu^2}} \quad \alpha = \sqrt{1 - k} \lambda \quad , \quad \gamma = \sqrt{1 + k} \lambda$$

si trova (cfr. ⁽⁹⁾)

$$w(x - vt) = \frac{P}{4B(\alpha^2 + \gamma^2)} \cdot \Phi(x - vt)$$

con

$$\Phi(x-vt) = e^{-\alpha(x-vt)} \left\{ \frac{1}{\alpha} \cos \gamma (x-vt) + \frac{1}{\gamma} \sin \gamma (x-vt) \right\}.$$

Da qui si vede che per

$$v^2 = v_{cr}^2 = c^2 = \frac{2}{\mu} \sqrt{B\beta}$$

si ha instabilità. È questa la formula per la velocità critica trovata da Timoshenko.

Per un treno rigido di carichi mobili con velocità v se P_0 è il carico in testa, Δ_i la distanza, invariabile, del carico generico P_i da P_0 sarà

$$w(x-vt) = \frac{1}{4B(\alpha^2 + \gamma^2)} \sum_{i=0}^N P_i \cdot \Phi[x - (vt - \Delta_i)]$$

e la velocità critica è sempre v_{cr} .

III. - Come in II, ma si consideri anche la massa di P . Vale ancora la (1 e) con la discontinuità in $x' = vt$ data dalla (4 a).

Per una soluzione stazionaria del tipo $w = w(x - vt)$ è però, posto $z = x - vt$,

$$v^2 w'' + 2v \dot{w}' + \ddot{w} = \frac{d^2 w}{dz^2} (v^2 - 2v^2 + v^2) = 0$$

e quindi l'effetto della massa del carico solitario su la velocità critica risulta nullo.

Ora, in ⁽⁹⁾ si considerò il solo termine $M v^2 \frac{d^2 w}{dz^2} = M \ddot{w}$, che dà la forza centrifuga calcolata su la linea elastica anziché, siccome occorre, quella calcolata su la traiettoria.

Se in altri casi, considerati ad esempio in ⁽⁴⁾, uno scambio siffatto non infirma molto i risultati, là ne porta ad uno che sembra notevolissimo ed è invece inesistente.

A conferma di questa deduzione, contraria a risultati analoghi anche di altri, si considera, per il caso in parola, anziché l'equazione differenziale (1 c) un'equazione analoga a quella di Zimmermann.

Poiché, attesa l'uniformità del binario indefinito è $c(x, x) = \text{cost.} = c_0$ si ha, per lo spostamento W sotto al carico in conformità con la (7 d),

$$W(t) = c_0 P \left(1 - \frac{1}{g} W(t) \right) \quad \text{oppure} \quad W(x) = c_0 P \left(1 - \frac{v^2}{g} W''(x) \right)$$

e da qui la soluzione statica $W_0 = c_0 P$. La traiettoria è una retta, parallela all'asse del binario e non si producono quindi reazioni di inerzia.

Attorno a questa soluzione si hanno, al più, oscillazioni armoniche indipendenti però dalla velocità del carico. In questo caso III non appare neanche la velocità critica di Timoshenko giacché si è supposto $\mu = 0$.

Non è detto però che la massa dei carichi mobili non abbia mai influenza su la velocità critica. Passiamo infatti ad un esempio espressivo proprio nell'ambito stazionario.

IV. — Un treno continuo indefinito $p_0 = \text{cost.}$ corre con velocità v su un binario indefinito. Tentando una soluzione indipendente da t si ha, analoga alla (1f), *ma con riferimento ad x anziché a z* , l'equazione

$$(1g) \quad Bw'''' + \frac{p_0 v^2}{g} w'' + \beta w = p_0.$$

Da qui si ha la soluzione statica $w_0 = p_0 : \beta$ e si riconosce che, solo per $v < v_{cr}$, con

$$(10) \quad v_{cr} = \frac{2g}{p_0} \sqrt{B\beta}$$

si ha stabilità, sicché v_{cr} è la velocità critica del treno indefinito.

La (10) è formalmente simile alla (9) di Timoshenko, ma è essenzialmente diversa, com'è naturale del resto. Nella (9) interviene la massa per unità di lunghezza del binario, nella (10) quella del carico corrente sul binario. Per treni di carichi inerti finiti, fuori dall'ambito delle soluzioni stazionarie, il problema della integrazione della (1c) eventualmente completata con il termine βw a sinistra, è aperto. La (10) segnala che l'inerzia del carico mobile può aver effetti sensibili giacché, per esser $p_0 \gg \mu g$, essa dà valori assai inferiori di v_{cr} da quelli calcolati secondo la (9).

Fisica. — *Su di una stella provocata da un antiprotone osservata in emulsioni nucleari.* Nota di O. CHAMBERLAIN, W. W. CHUPP, G. GOLDBABER, E. SEGRÈ, C. WIEGAND (*) e di E. AMALDI, G. BARONI, C. CASTAGNOLI, C. FRANZINETTI, A. MANFREDINI (**), presentata (***) dal Socio E. AMALDI.

Nel quadro del programma di ricerche per stabilire l'esistenza e le proprietà dell'antiprotone a mezzo del Bevatrone del Radiation Laboratory della Università di California, abbiamo progettato ed eseguito una esposizione di emulsioni nucleari alle particelle negative emesse da una targhetta di rame bombardata con protoni di 6,3 Gev. Le particelle negative emesse in avanti venivano estratte dalla ciambella dell'acceleratore e focalizzate a mezzo di un sistema magnetico identico alla prima parte di quello usato da Chamberlain, Segrè, Wiegand ed Ypsilantis ⁽¹⁾, consistente di un magnete deflettore e di una lente magnetica quadrupolare disposta in maniera da selezionare corpuscoli negativi di momento $p = 1,09$ Gev/c.

(*) Radiation Laboratory, Department of Physics, University California, Berkeley, California.

(**) Istituto di Fisica dell'Università di Roma, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma.

(***) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) O. CHAMBERLAIN, E. SEGRÈ, C. WIEGAND e T. YPSILANTIS, « Phys. Rev. » 100, 947 (1955).

Già nel passato sono stati osservati nella radiazione cosmica alcuni eventi che possono essere interpretati come dovuti ad antiprotoni; alcuni di questi sono stati osservati in camere di Wilson da Hayward⁽²⁾ Cowan⁽³⁾ e



Fig. 1. - Riproduzione della stella. L è la traccia primaria. Per l'interpretazione delle altre tracce si veda la tabella I.

(2) EVANS HAYWARD, « Phys. Rev. », 72, 937 (1947).

(3) E. W. COWAN, « Phys. Rev. », 94, 161 (1954).

Bridge, Courant, De Staebler e Rossi ⁽⁴⁾, mentre un altro è stato osservato in emulsioni nucleari esposte in alta quota da Amaldi, Castagnoli, Cortini, Franzinetti e Manfredini ⁽⁵⁾. L'esperienza su cui riferiamo fu progettata nella speranza di osservare eventi simili a quest'ultimo nelle condizioni sperimentali sopra indicate.

In base a risultati ottenuti sulla percentuale di antiprotoni presenti nel fascio di particelle così selezionate ⁽¹⁾ (circa uno su ogni 50000) si può cercare di valutare, sia pure grossolanamente, il numero di antiprotoni che dovrebbero ridursi in quiete entro il pacco di emulsione. Siccome il percorso degli antiprotoni del momento p prescelto era considerevolmente maggiore della lunghezza delle emulsioni impiegate (~ 18 cm) è stato necessario rallentare gli antiprotoni a mezzo di un assorbitore (di rame dello spessore di 132 g/cm²).

La valutazione del numero di antiprotoni che si vengono ad arrestare nella emulsione viene così a dipendere fortemente dal valore che si adotta per la sezione d'urto di assorbimento nucleare degli antiprotoni nel rame. Se si fa l'ipotesi che essa sia eguale a quella dei protoni, si trova che nel volume fino ad ora esplorato ci dovrebbero essere circa 7 antiprotoni. Tale numero si riduce a circa 2,5 se si adotta un valore della sezione d'urto doppia di quella dei protoni. Noi riteniamo tuttavia che non si possa trarre alcuna conclusione, sul valore della sezione d'urto, dal confronto di questi numeri con quello degli eventi effettivamente osservati, poiché, a parte le fluttuazioni statistiche, la efficienza di osservazione è difficile da valutare e certamente risulta diversa per i diversi metodi di esplorazione che sono stati impiegati.

Il lavoro di esplorazione, condotto energicamente sia a Berkeley che a Roma, ha fruttato fino ad ora un solo evento (fig. 1), consistente in una stella prodotta da un primario di massa protonica e carica negativa, il quale è stato trovato nel laboratorio di Roma.

Nella tabella I sono indicate le caratteristiche delle particelle emesse nella stella. Solo alcune di esse (b e c) sono identificate con assoluta sicurezza. Per quanto riguarda la traccia a l'ipotesi più ragionevole è che essa sia dovuta ad un pione. Se si ammette che tutte le altre tracce nere siano dovute a protoni (alcune di esse sono probabilmente dovute a deutoni o a particelle alfa) il bilancio della energia visibile risulta il seguente:

energia cinetica dei due pioni	389 Mev
energia di quiete dei due pioni	280 Mev
energia cinetica delle tracce nere	101 Mev
energia di legame delle tracce nere	56 Mev
<hr/>	
energia visibile totale	826 Mev

(4) H. S. BRIDGE, H. COURANT, H. DE STAEBLER e B. ROSSI, « Phys. Rev. », 95, 1101 (1954).

(5) E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, G. CORTINI, C. FRANZINETTI and A. MANFREDINI, « Nuovo Cimento », 1, 492 (1955).

TABELLA I.

Traccia	Percorso (μ)		Numero di emulsioni attraversate	I/I_0	$p\beta$ Mev/c	Identità	T (MeV)	cos φ	θ
<i>a</i>	23,960	osservato in em.	8	$0,90 \pm 0,06$	430 ± 70	$\pi (?)$	332	0,985	$238^\circ 26'$
<i>b</i>	19,500	osservato in em.	8	$1,29 \pm 0,09$	98 ± 9	π	57,5	0,972	$99^\circ 35'$
<i>c</i>	4250	totale	3			p	32,3	0,961	$294^\circ 40'$
<i>d</i>	1100	totale	2			$p (?)$	15,0	0,860	$350^\circ 5'$
<i>e</i>	340	totale	1			$p (?)$	7,6	0,927	$59^\circ 45'$
<i>f</i>	202	totale	1			$p (?)$	5,5	0,800	$124^\circ 3'$
<i>g</i>	4050	totale	6			$p (?)$	31,4	0,466	$153^\circ 22'$
<i>h</i>	206	totale	1			$p (?)$	5,5	0,208	$129^\circ 5'$
<i>i</i>	100	totale	1			$p (?)$	3,6	0,141	$212^\circ 44'$

 φ = angolo di profondità. θ = angolo nel piano della emulsione.

L'identità delle tracce *b* e *c* è certa. Quella della traccia *a* è quasi certa: infatti la sola alternativa, molto improbabile, è che possa essere un elettrone. Le altre possono essere protoni o particelle alfa.

Il momento sbilanciato risulta sotto questa ipotesi 520 Mev/c, e nella ipotesi più sfavorevole (e molto improbabile) che quattro neutroni vengano emessi tutti con la stessa energia e nella stessa direzione, la minima energia invisibile ammonterebbe a 65 Mev. Una valutazione più realistica dell'energia portata via dai neutroni di evaporazione sarebbe di 160 Mev. È anche possibile che una considerevole quantità di energia sia stata portata via da pioni neutri.

Possiamo quindi concludere che l'energia visibile è in accordo con quanto ci si dovrebbe attendere nel caso di un processo di annichilamento di un anti-protone con un nucleone e che sarebbe assai più difficile interpretarla come dovuta ad una reazione in cui tutta l'energia fosse fornita dall'assorbimento di una sola particella di massa protonica.

La massa del primario è infatti stata misurata con 5 metodi indipendenti, i cui risultati sono riportati nella tabella II. Quattro di questi sono basati su misure eseguite sulla traccia della particella entro l'emulsione, mentre il quinto, più preciso degli altri, è basato sulla analisi magnetica della particella prima che entri nella emulsione ($p = 1090 \pm 20$ Mev/c) e sul suo percorso totale pari a 132 g/cm² di rame più 9,31 cm di emulsione.

TABELLA II.

Misure di massa sulla traccia primaria.

M e t o d o	Intervallo di percorso (dalla fine)	Risultato
	(mm)	(M/m _e)
Ionizzazione-scattering	82,0 — 66,0	1840 ± 250
Ionizzazione-percorso: lunghezza media delle lacune	79,4 — 19,0	1810 ± 100
Lunghezza delle lacune	5 — 0	1740 ± 130
Scattering-percorso	10 — 0	1635 ± 280
Percorso residuo-momento (dalla deflessione magnetica)	93,14 ± 132 g/cm ⁻² Cu	1865 ± 70
Media pesata		1824 ± 51

Da questi dati si può calcolare il rapporto M/M_p della massa di questa particella a quella del protone e si ottiene $1,02 \pm 0,04$, dove l'errore è dovuto principalmente all'incertezza sul valore del momento. In tale calcolo non viene presa in considerazione la possibilità (assai remota) che la particella in questione abbia subito un urto inelastico entro l'assorbitore di rame; il verificarsi di una simile circostanza farebbe abbassare il valore della massa.

Questo evento conferma, anche se non in maniera definitiva, l'interpretazione data in ⁽¹⁾, che le nuove particelle osservate al Bevatrone siano antiprotoni. Esso conferma anche l'ipotesi che la stella descritta in ⁽⁵⁾ fosse effettivamente dovuta ad un antiprotone.

Una analoga nota preliminare viene inviata in questi giorni alla Physical Review mentre un lavoro più esteso verrà inviato al Nuovo Cimento.

Questo lavoro è stato eseguito sotto gli auspici della Atomic Energy Commission degli Stati Uniti.

Chimica. — *Sullo spettro di assorbimento nell'ultrarosso del ferrocianuro di potassio* ^(*). Nota di G. B. BONINO e GIANFRANCO FABBRI, presentata ^(**) dal Socio G. B. BONINO.

I metodi di spettroscopia molecolare Raman ed ultrarossi sono stati impiegati con maggior frequenza nello studio della struttura molecolare di composti organici. Non mancano però numerosi esempi di ricerche in campo chimico inorganico. In questa parte delle ricerche chimiche però l'applicazione degli spettri molecolari presenta spesso caratteri di delicatezza e di difficoltà del tutto caratteristici e distinti da quelli che si presentano in campo chimico organico.

Però il perfezionamento che hanno avuto in questi ultimi anni le tecniche di spettrometria ultrarossa applicate alla ricerca chimica permettono di riprendere in modo assai più soddisfacente le ricerche di spettroscopia molecolare in campo inorganico e specialmente nel grande mondo dei complessi di tipo Werneriano.

Il ferrocianuro di potassio, ed in genere i ferrocianuri, hanno già attirato l'attenzione degli spettroscopisti molecolari. Soluzioni acquose di ferrocianuri sono state studiate con l'aiuto dello spettro Raman da Mathieu e Cornevin ⁽¹⁾, da Samuel e Kahn ⁽²⁾ e da Damaschun ⁽³⁾. Queste ricerche hanno fissato la loro attenzione, più che su una indagine generale delle oscillazioni proprie del complesso ferrocianidrico, sulle manifestazioni a cui danno luogo alcune di queste oscillazioni che possono considerarsi, nella loro ampiezza, come particolarmente localizzate al legame $C \equiv N$ dei gruppi coordinati.

Ma è chiaro che, se noi vogliamo Wernerianamente attribuire al complesso ferrocianidrico una configurazione di tipo ottaedrico, (gruppo di simmetria O_h), dobbiamo concludere che soltanto una piccola parte delle oscillazioni

(*) Lavoro eseguito al Centro Studi di Chimica Fisica ed Idrologica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico «Giacomo Ciamician» della Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) « Journ. de Chimie Physique » (Guye) 36, 261 (1939).

(2) « Zeits. für Phys. », 84, 87 (1933).

(3) « Zeits. f. Phys. Chem. », B. 16, 81 (1932).

molecolari del gruppo sono attive in effetto Raman; e cioè sono Raman-attive due oscillazioni di tipo A_{1g} , due oscillazioni doppiamente degeneri di tipo E_g e due oscillazioni triplamente degeneri di tipo T_{2g} .

Va anche osservato che il ferrocianuro in soluzione acquosa, sotto l'azione eccitatrice delle radiazioni dell'arco a mercurio necessario per ottenere lo spettro Raman, può dar luogo a complicazioni di carattere chimico che possono portare a qualche perplessità.

Lo spettro ultrarosso dei ferrocianuri è stato tentato in soluzione acquosa da Gordy e Williams ⁽⁴⁾ con preoccupazioni analoghe a quelle che hanno ispirato i lavori dei Ramanisti su questo argomento.

Allo stato cristallino hanno studiato più recentemente lo spettro ultrarosso del ferrocianuro, insieme con quelli di una numerosa serie di composti inorganici, Miller e Wilkins ⁽⁵⁾. Il carattere di questa ricerca è però più spiccatamente analitico che strutturistico. Si possono ricavare cionondimeno da questo lavoro alcuni dati interessanti. Altro lavoro sullo spettro ultrarosso allo stato cristallino dei ferrocianuri è stato pubblicato da Guy Emschwiller ⁽⁶⁾. Questo lavoro però si preoccupa soltanto della banda caratteristica del gruppo $C \equiv N$ in analogia con quanto già avevano fatto i Raman-spettroscopisti.

Il lavoro più completo che noi possediamo sullo spettro del ferrocianuro di potassio è quello citato di Miller e Wilkins. Però gli Autori americani hanno studiato questo spettro soltanto con l'ottica in salgemma e perciò i loro spettri non si spingono oltre i 15μ , e dello spettro tra $2000-3500 \text{ cm}^{-1}$ la carente dispersione del prisma di Salgemma non permette una diligente analisi delle bande. Tutte le manifestazioni spettrali ultrasosse del ferrocianuro al di sotto dei $625-650 \text{ cm}^{-1}$ risultavano ancora ignote ed era supponibile che in questa zona potessero cadere frequenze di oscillazione interessanti per l'interpretazione della struttura del complesso ferrocianidrico. Sia Miller e Wilkins che Guy Emschwiller hanno utilizzato nelle loro ricerche il ferrocianuro di potassio idrato con tre molecole di acqua di cristallizzazione e pertanto nei loro spettri alla serie, pure incompleta, di bande del complesso ferrocianidrico si sovrappongono le bande caratteristiche alle oscillazioni delle molecole d'acqua.

Il paragone fra gli spettri ultrarossi e gli spettri Raman del ferrocianuro non può essere fruttuoso in quanto, ammessa sempre la struttura ottaedrica per lo ione ferrocianidrico, risulta che le frequenze attive in Raman sono inattive in ultrarosso. Le uniche frequenze per le quali si prevede l'attività in ultrarosso per un complesso ferrocianidrico ottaedrico sono solo 4 oscillazioni triplamente degeneri di tipo T_{1u} (gruppo di simmetria O_h).

Abbiamo voluto perciò riprendere lo studio dello spettro ultrarosso del ferrocianuro di potassio allo stato cristallino con mezzi spettroscopici più

(4) « Journ. of Chem. Phys. », 3, 664 (1935).

(5) « Analytical Chem. », 24, 1253 (1952).

(6) « Comptes Rendues de l'Ac. de Fr. », 238, 1414 (1954).

adeguati e selettivi di quello che non avessero fatto gli Autori precedenti onde poter anche allargare il campo delle lunghezze d'onda dove l'indagine veniva eseguita.

Abbiamo anche voluto esaminare, sempre allo stato solido, sia lo spettro di assorbimento ultrarosso del ferrocianuro di potassio ordinario con tre molecole d'acqua di cristallizzazione, sia lo spettro del ferrocianuro di potassio anidro opportunamente preparato con tutte le cautele. Sui metodi di preparazione del ferrocianuro di potassio allo stato anidro verrà riferito e discusso in una prossima Nota dove sarà presa in considerazione una larga serie di ferrocianuri alcalini e alcalino-terrosi anidri e variamente idratati.

Gli spettri qui esaminati sono stati ottenuti mediante lo spettrometro ultrarosso Beckman I R 2 già descritto in precedenti lavori di questo Centro. Si sono impiegate sia l'ottica di salgemma, sia l'ottica in fluoruro di litio (che, come si sa, ha una dispersione circa quadrupla del salgemma nella zona attorno a 3000 cm^{-1}), sia l'ottica in bromuro di potassio che ci ha permesso di rilevare per la prima volta lo spettro del ferrocianuro di potassio tra 400 e 700 cm^{-1} .

La larghezza della fenditura spettrometrica corrispondeva con le varie ottiche alle seguenti «larghezze» spettrali corrispondenti all'apertura della fessura nello spettro ultrarosso nelle varie zone:

Zona spettrale	Larghezza spettrale corrispondente all'apertura della fessura
1° Ottica in fluoruro di litio:	
3 μ	8 cm^{-1}
5 μ	4 cm^{-1}
2° Ottica in salgemma:	
6 μ	4 cm^{-1}
15 μ	2 cm^{-1}
3° Ottica in bromuro di potassio:	
15 μ	2 cm^{-1}
25 μ	4 cm^{-1}

È da rilevare che dai dati di errore medio di misura riferiti da Miller e Wilkins si può indurre che per le loro misure eseguite con ottica in salgemma la fessura spettrometrica attorno a 3 μ può presumibilmente corrispon-

dere ad una larghezza spettrale di ben 33 cm^{-1} . Il che appunto corrisponde ad una dispersione quattro volte più piccola della nostra.

Per rilevare le bande di minima intensità registrate nella Tabella abbiamo dovuto però utilizzare maggiori aperture di fessura spettrometrica e pertanto l'esattezza nella localizzazione di queste debolissime bande, nettamente rilevate, risulta inferiore della precisione di localizzazione delle bande intense e più significative.

Il ferrocianuro era esaminato sotto forma di pasta in olio di vaselina ottenuta macinando finissimamente in mortaio di agata un campione di ferrocianuro con olio di vaselina speciale per queste ricerche. Abbiamo tentato anche di sostituire l'olio di vaselina con Tripen (perclorobutadiene preparato dalla Wacker Chemie di Monaco di Baviera) ma per questa speciale ricerca l'olio di vaselina si è mostrato più adatto per giungere a paste che si potessero esaminare con facilità e senza inconvenienti.

I risultati della ricerca sono condensati nella Tabella I e nella fig. 1.

In un prossimo lavoro verranno discussi questi risultati da un punto di vista del numero e del tipo delle varie oscillazioni in relazione anche a considerazioni simmetriche inerenti al complesso ferrocianidrico.

Per ora ci limitiamo ad osservare che lo spettro ultrarosso del ferrocianuro cristallino idrato da noi ottenuto concorda non in tutte le sue parti con lo spettro pubblicato da Miller e Wilkins.

Nella zona tra $3300\text{--}3500\text{ cm}^{-1}$ otteniamo anche noi due bande ben nette delle quali una a 3515 cm^{-1} coincide con quella degli Autori americani e l'altra da noi trovata a 3440 cm^{-1} risulta leggermente spostata verso le maggiori frequenze rispetto allo spettro degli Autori americani. Queste due bande sono senz'altro da attribuirsi alle oscillazioni di valenza delle molecole d'acqua del ferrocianuro cristallino e scompaiono del tutto nello spettro del ferrocianuro anidro. Le molecole d'acqua di cristallizzazione sono anche responsabili delle due bande a $1600\text{--}1650\text{ cm}^{-1}$ che corrispondono alle frequenze di deformazione delle molecole d'acqua e che, analogamente alle precedenti, scompaiono nello spettro del ferrocianuro anidro. Per queste due bande le nostre misure sono sensibilmente coincidenti con quelle degli Autori americani.

Di particolare interesse sono le manifestazioni del ferrocianuro nello spettro ultrarosso fra $2000\text{ e }2100\text{ cm}^{-1}$ circa. Qui gli autori americani trovavano solo una banda a 2015 cm^{-1} mentre noi troviamo due bande intense a cavallo dei 2050 numeri d'onda. È da rilevare però che noi abbiamo lavorato in questo campo con prisma di fluoruro di litio che ha una dispersione molto maggiore e permette una migliore localizzazione della banda mentre gli Autori americani lavoravano con prisma di salgemma.

In questa zona fra $2000\text{--}2200\text{ cm}^{-1}$ circa lo spettro del ferrocianuro di potassio anidro presenta invece una molteplicità di bande e cioè presenta 9 bande, alcune di intensità maggiore, altre di intensità minore, anziché le due bande trovate da noi e dagli Autori americani nel ferrocianuro idrato.

TABELLA I.

K ₄ [Fe(CN) ₆] (Bonino-Fabbri)			K ₄ [Fe(CN ₆)] · 3 H ₂ O (Bonino-Fabbri)			K ₄ [Fe(CN ₆)] · 3 H ₂ O (Miller e Wilkins)		
ν (cm ⁻¹)	λ (μ)	intensità	ν (cm ⁻¹)	λ (μ)	intensità	ν (cm ⁻¹)	λ (μ)	intensità
			3515	2,847	<i>f</i>	3510	2,85	<i>f</i>
			3440	2,907	<i>f</i>	3410	2,93	<i>f</i>
			(3384)	(2,953)				
			2682	3,729	<i>dd</i>			
2679	3,733	<i>dd</i>	2655	3,767	<i>dd</i>			
2655	3,766	<i>dd</i>						
2608	3,834	<i>dd</i>						
			2549	3,923	<i>dd</i>			
2503	3,995	<i>dd</i>	2509	3,986	<i>dd</i>			
2490	4,016	<i>dd</i>	2479	4,034	<i>dd</i>			
2458	4,068	<i>dd</i>	2445	4,089	<i>dd</i>			
2435	4,106	<i>dd</i>						
2403	4,162	<i>dd</i>						
2180	4,587	<i>dd</i>						
2093	4,777	<i>f</i>						
2073	4,823	<i>f</i>						
2062	4,850	<i>f</i>						
2049	4,881	<i>ff</i>	2052	4,872	<i>ff</i>	2015	4,96	<i>ff</i>
2044	4,892	<i>ff</i>	2044	4,891	<i>ff</i>			
2028	4,932	<i>ff</i>						
2006	4,985	<i>f</i>						
1984	5,040	<i>d</i>						
			1649	6,063	<i>m</i>	1650	6,07	<i>m</i>
			1625	6,157	<i>m</i>	1630	6,13	<i>f</i>
1155	8,655	<i>dd</i>	1156	8,655	<i>dd</i>			
1096	9,122	<i>dd</i>	1098	9,110	<i>dd</i>			
994	10,060	<i>dd</i>	995	10,055	<i>dd</i>	995	10,05	<i>dd</i>
937	10,673	<i>dd</i>	934	10,705	<i>dd</i>	930	10,75	<i>dd</i>
894	11,185	<i>dd</i>	894	11,185	<i>dd</i>			
848	11,793	<i>dd</i>	846	11,823	<i>dd</i>			
838	11,926	<i>dd</i>	835	11,970	<i>dd</i>			
587	17,02	<i>m</i>	588	17,00	<i>m</i>			
512	19,52	<i>d</i>						
484	20,66	<i>d</i>						
416	24,01	<i>m</i>						

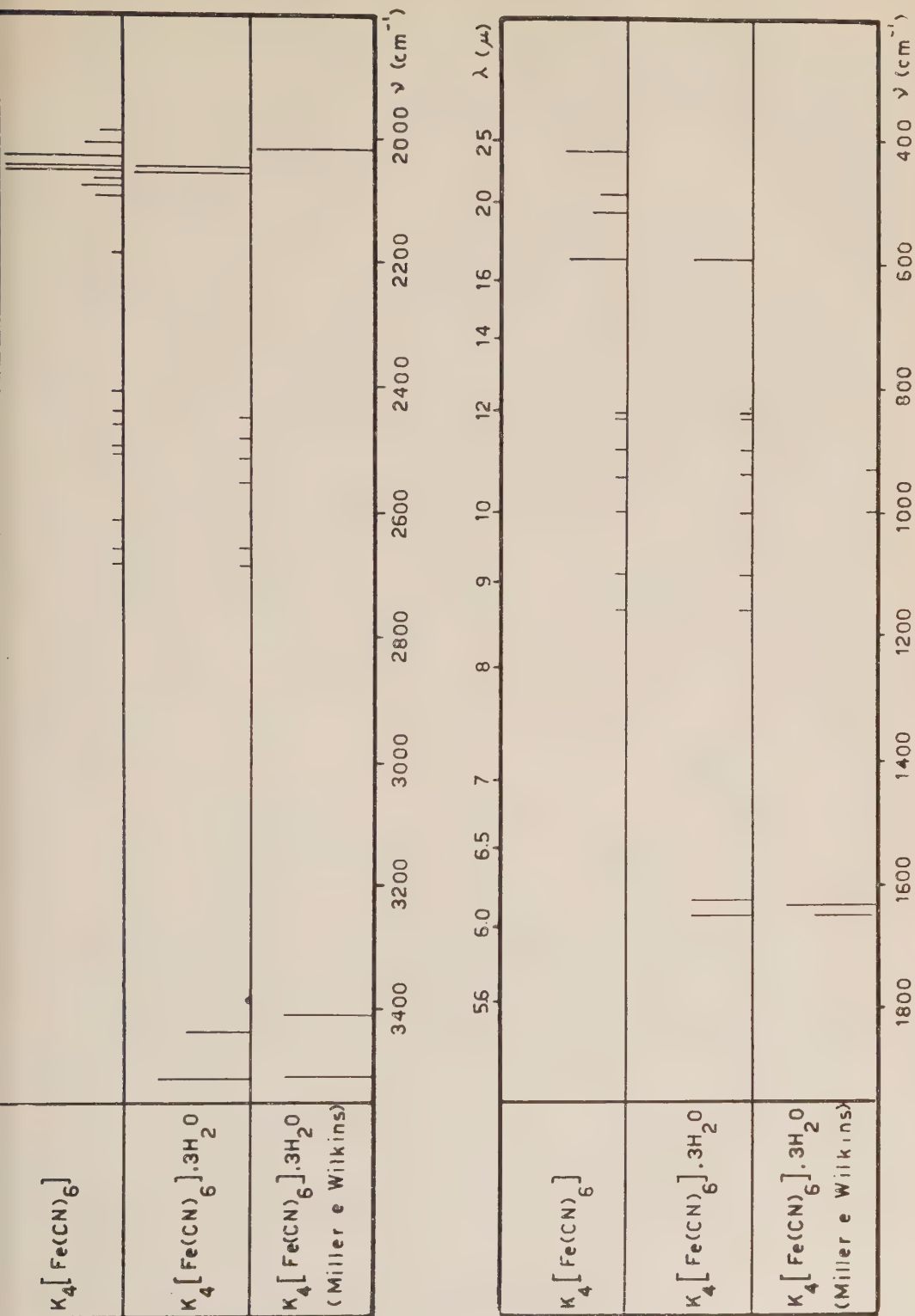


Fig. I.

Dobbiamo rilevare che lo stesso campione di ferrocianuro anidro, già steso sulle lastrine di salgemma e che aveva mostrato in questa ultima zona le nove bande di assorbimento, lasciato idratare in loco con opportuni accorgimenti e riesaminato mostrava soltanto di nuovo le due sole bande del ferrocianuro idrato.

Pertanto non ci sembra dover attribuire questa molteplicità a eventuali fenomeni di decomposizione del ferrocianuro, sia per il metodo di desidratazione usato, sia per la perfetta reversibilità del fenomeno con l'idratazione, sia anche a seguito di controlli chimici e polarografici sui campioni di ferrocianuri anidri che permettevano di confermarne la perfetta identità chimica.

Nella zona tra 2400 e 2800 cm^{-1} dello spettro ultrarosso il ferrocianuro sia idrato che anidro mostra una serie di piccole bande assai poco intense. (Di queste piccole bande non si trova traccia nello spettro degli Autori americani). Anche qui il numero di queste piccole bande è maggiore nello spettro del ferrocianuro anidro (8 piccole bande) che in quello del ferrocianuro idrato (6 piccole bande).

In un prossimo lavoro indagheremo sulle ragioni che possono fare attribuire queste piccole bande secondarie a toni di combinazione.

Nella parte dello spettro ultrarosso, al di sotto di 625 numeri d'onda (e che per la prima volta qui è stata indagata) il ferrocianuro di potassio idrato mostra una intensa banda a 588 cm^{-1} , banda che permane nel ferrocianuro anidro. Ma lo spettro di quest'ultimo mostra altre tre bande pure abbastanza intense rispettivamente a 416 cm^{-1} , 484 cm^{-1} , 512 cm^{-1} .

Queste bande non sembrano apparire nello spettro del ferrocianuro idrato. Però da alcuni elementi di fatto noi siamo indotti a pensare che esse possono apparirvi con una intensità molto bassa e tale da lasciare il dubbio sulla loro presenza.

Resta però assodato che queste tre bande, di notevole intensità appaiono sicuramente nello spettro del ferrocianuro anidro.

Stiamo facendo altre indagini impiegando speciali tecniche per poter risolvere questo punto e cioè poter stabilire in modo nettissimo se le tre bande citate siano proprio del tutto assenti nello spettro del ferrocianuro idrato.

Dobbiamo ancora registrare tra 800 e 1200 cm^{-1} nello spettro ultrarosso, sia del ferrocianuro idrato che in quello del ferrocianuro anidro, una serie di 7 piccole bande di minima intensità che pur si presentano perfettamente riconoscibili negli spettri dei due campioni di ferrocianuro.

Tali bande, di minima intensità, non sono tutte registrate dagli Autori americani i quali trovano in questa zona solo due piccole bande (tra 900 e 1000 cm^{-1}) mentre noi troviamo sette bande (tra 800 e 1200 cm^{-1}).

I nuovi dati di fatto che emergono dai nostri spettri rendono opportuna una discussione sul numero, i tipi, le simmetrie delle oscillazioni del complesso ferrocianidrico onde poter chiarire il significato stesso di questi spettri in relazione con le caratteristiche di simmetria del complesso ferrocianidrico sia anidro che idrato. Ma di questo come pure sulla possibile perturbazione provocata dalla simmetria cristallina sulle oscillazioni del complesso, verrà trattato in un prossimo lavoro.

Chimica. — *Sullo spettro ultravioletto di assorbimento della 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide e della 2·4·dimetil·3·etil·5·pirrolaldeide* (*). Nota di G. B. BONINO e ANNA MARIA MARINANGELI, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

L'apparente insensibilità dello spettro di assorbimento ultravioletto della 2·pirrolaldeide nei riguardi della metilazione all'azoto, fatto rilevato in una precedente nostra Nota apparsa su questi « Rendiconti » ⁽¹⁾ studiando soluzioni in solventi non ossidrilati e riscontrato anche da altri Autori ⁽²⁾ per soluzioni alcoliche, avrebbe potuto indurre alla conclusione che il metile sostituito all'idrogeno non determini praticamente alcun effetto sulla posizione delle bande di assorbimento ultravioletto dei derivati pirrolici.

Si sa che invece negli idrocarburi aromatici (e polibenzenici) la sostituzione del metile (o in genere di un alchile) provoca uno spostamento delle bande di assorbimento ultraviolette verso più basse frequenze senza modificare in modo sensibile l'andamento generale dello spettro ⁽³⁾. Del resto anche nel campo delle aldeidi aromatiche, e per esempio delle benzaldeidi alchilsostituite al nucleo, si verifica uno spostamento per esempio della banda a 2420 Å verso le maggiori lunghezze d'onda come hanno anche rilevato Braude, Sondhetmer e Forbes ⁽⁴⁾.

I predetti Autori riportano i seguenti dati per i rispettivi massimi di assorbimento:

Benzaldeide	2420 Å
4·metilbenzaldehyde	2510 Å
2·6·dimetilbenzaldehyde	2510 Å
2·4·6·trimetilbenzaldehyde	2640 Å

Dunque nelle aldeidi benzoiche metilate si ha con la metilazione un netto spostamento della banda a 2420 Å verso le maggiori lunghezze d'onda.

Era pertanto interessante studiare se per le aldeidi pirroliche alchilate al carbonio, anziché all'azoto, si può osservare un analogo spostamento delle bande di assorbimento ultraviolette verso le maggiori lunghezze d'onda.

(*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica Fisica ed Idrologia del C.N.R. nell'Istituto Chimico Giacomo Ciamician dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) BONINO e MARINANGELI, questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XIX, p. 222 (1955).

(2) ANDRISANO e PAPPALARDO, « Gazz. Chim. Ital. », 85, 1430 (fascicolo di novembre 1955).

(3) Ved. per esempio B. PULLMAN e BERTHIER, « Journ. de Chimie Physique », 52, 114 (1955).

(4) « Nature », 172, 117 (1954).

Riferiamo perciò in questa Nota le ricerche da noi eseguite sullo spettro ultravioletto di due aldeidi pirroliche variamente alchilate al carbonio e cioè la 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide e la 2·4·dimetil·3·etil·5·pirrolaldeide (cripto-pirrolaldeide) i cui spettri ultravioletti di assorbimento ci risultavano non ancora noti.

Le due aldeidi studiate vennero preparate in questo Istituto in collaborazione con la prof.ssa Elisa Ghigi e con la dott.ssa A. M. Drusiani per ricerche nello spettro ultrarosso sulle quali sarà riferito in altro lavoro.

La 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide è stata ottenuta partendo dal 2·4·dimetil·pirrolo preparato con il metodo di H. Fischer ⁽⁵⁾. Sul 2·4·dimetilpirrolo si è fatta agire alla temperatura di 60°C. la dimetilformamide e ossicloruro di fosforo secondo il metodo usato da Ryskiewicz e Silverstein ⁽⁶⁾ per la preparazione di aldeidi pirroliche. Un altro campione della stessa aldeide è stato preparato anche con il metodo di Alessandri e Passerini ⁽⁷⁾.

La criptopirrolaldeide si è ottenuta da criptopirrolo (preparato secondo il metodo descritto da H. Fischer e collaboratori ⁽⁸⁾ per azione della dimetilformamide secondo lo schema di sintesi delle aldeidi pirroliche già sopra citato.

Le due aldeidi erano state purificate a regola d'arte per successive cristallizzazioni e presentavano tutte le caratteristiche di identità e di purezza rilevabili dalla letteratura di questi due composti.

Lo spettro ultravioletto delle aldeidi di cui sopra è stato studiato in diversi solventi, ma riferiamo qui soltanto sugli spettri ottenuti in soluzioni in esano normale per spettroscopia ultravioletta.

Infatti come già abbiamo osservato in un precedente lavoro ⁽¹⁾, data la delicata situazione della funzione carbonilica in questi composti (situazione al cui chiarimento convergono appunto anche le ricerche ricordate e descritte) era del tutto opportuno evitare solventi ossidrilati o comunque solventi la cui molecola contenesse gruppi funzionali capaci di complicare ancor più le cose provocando ulteriori perturbazioni, ovvero anche di lasciare dubbi ed incertezze sulla interpretazione dei risultati agli effetti delle finalità della ricerca.

Precedenti lavori eseguiti in questo Istituto sullo spettro Raman dell'aldeide pirrolica in soluzione metilalcolica ed in soluzione benzenica, come pure ricerche non ancora pubblicate (e che presto vedranno la luce) sullo spettro Raman dell'aldeide pirrolica disciolta in vari solventi ci consigliavano, per una maggiore chiarezza delle conclusioni, a scartare per queste ricerche nell'ultravioletto tutti gli altri solventi e limitare lo studio a soluzione in normale esano purissimo speciale per spettroscopia nell'ultravioletto.

Lo spettrometro utilizzato è il solito spettrometro di Beckman DU per ultravioletto con celle in quarzo a spessori liquidi da mm. 1 a mm. 10.

(5) «Org. Synth. Coll.», vol. 2^o, pp. 202 e 217.

(6) «Journ. Am. Chem. Soc.», 76, 5802 (1954).

(7) «Gazz. Chim. Ital.», 51, I, 227 (1921).

(8) Ved. H. FISCHER u. ORTH, *Die Chemie des Pyrrols*, I, p. 54 (1934).

Qualche misura è stata anche ricontrollata con uno spettrometro ultravioletto Unicam presso il laboratorio di chimica della Facoltà di Agraria della Università Cattolica di Piacenza che vivamente ringraziamo per l'ospitalità concessaci.

La 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide è stata studiata in concentrazioni 0,0001 mol., 0,0005 mol. e 0,001 mol. La criptopirrolaldeide è stata studiata in soluzione pressoché satura in normale esano e concentrazione 0,00013 mol.

I risultati che diamo nella Tabella corrispondono per ambo le aldeidi alla massima concentrazione permessaci dalla solubilità della criptopirrolaldeide.

TABELLA I.

COMPOSTO	Concentrazione in esano normale in Mol/litro	I Banda		II Banda		NOTE
		Massimo di assorbimento in Å	Intensità log ϵ	Massimo di assorbimento in Å	Intensità log ϵ	
Pirrolaldeide . .	0,0001	2460	3,93	2790	4,46	Bonino e Marinangeli ⁽¹⁾
2·4·dimetil·5·pirrolaldeide . . .	0,0001	2640	3,71	2970	4,36	Leggera sgobbatura a 3150 Å circa
2·4·dimetil·3·etil·5·pirrolaldeide .	0,00013	2680	3,91	3050	4,40	Più marcata sgobbatura a circa 3250-3300 Å

Le due curve di assorbimento ottenute a temperatura ordinaria presentano un massimo ben distinto che, per la 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide cade a 2970 Å (con intensità log $\epsilon = 4,36$) mentre la criptopirrolaldeide presenta questo massimo a circa 3050 Å pure con alta intensità (log $\epsilon = 4,40$). A più breve lunghezza d'onda si osserva tra 2400 e 2800 Å ancora un massimo in ambo le aldeidi ma meno nettamente rilevabile per la parziale interferenza delle due bande che sono abbastanza allargate. Questo secondo massimo di assorbimento ha l'aspetto di una grossa «sgobbatura» nettamente però rilevabile. I due massimi dovrebbero coincidere rispettivamente a 2640 Å per la 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide e a 2680 Å per la criptopirrolaldeide. L'intensità di questo massimo per la criptopirrolaldeide corrisponde a log $\epsilon = 3,91$ mentre è inferiore per la 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide (log $\epsilon = 3,71$).

Queste bande data anche la loro forte intensità e l'analogia con quelle della pirrolaldeide ordinaria dovrebbero classificarsi come corrispondenti ⁽¹⁾ a transizioni $N \rightarrow V$.

Si vede però che ambedue i massimi ultravioletti delle due aldeidi alchilate sono sempre molto intensi, ma, rispetto a quelle della 2-pirrolaldeide ordinaria, spostati nettamente verso le maggiori lunghezze d'onda di circa 200 Å.

Quindi quella influenza del metile (e cioè lo spostamento verso le maggiori lunghezze d'onda delle bande ultraviolette di questa zona dello spettro) che si dimostrava nell'aldeide pirrolica ordinaria pressoché trascurabile o nulla quando la metilazione avveniva all'azoto, assume un valore nettissimo nel caso della alchilazione al carbonio. In questo secondo caso l'effetto di « coniugazione » del metile è perciò tipicamente rilevabile. Nel caso delle benzaldeidi metilate abbiamo visto che l'analogo spostamento corrispondeva a circa 100 Å verso le maggiori lunghezze d'onda per le aldeidi mono e dimetilate, mentre arrivava a circa 200 Å per la trimetilbenzaldeide. Dunque la trisostituzione con metili all'anello aromatico della benzaldeide porta uno spostamento della banda a 2420 Å della benzaldeide dello stesso ordine di grandezza degli spostamenti da noi osservati nelle aldeidi pirrolliche di- e trisostituite con alchili al carbonio.

Ritorniamo a discutere questo spostamento da un punto di vista della configurazione elettronica delle molecole non appena potremo avere a disposizione altri dati sperimentali (che si stanno rilevando su campioni di altre aldeidi pirrolliche alchilate di cui è già stata fatta o di cui è ancora in corso la sintesi in questo Istituto).

Prima di chiudere vogliamo però osservare che dopo il massimo di assorbimento ultravioletto a maggiore lunghezza d'onda delle due aldeidi alchilate prese qui in considerazione la curva non scende rapidamente, o per meglio dire con la stessa pendenza con la quale scendeva nel caso della 2-pirrolaldeide non sostituita. Specialmente la curva di assorbimento della criptopirrolaldeide presenta una sensibile sgobbatura che potrebbe mascherare un massimo di assorbimento verso i 3300 Å. Anche la 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide presenta una analoga « sgobbatura » verso il 3150 Å. Si potrebbe pensare in questo caso (data anche la più bassa intensità che appare per queste minori bande) che si tratti di bande corrispondenti a transizioni ⁽¹⁾ di tipo $N \rightarrow A$.

Se ciò fosse, si dovrebbe indurre che l'orbitale $[y]^2$ dell'ossigeno carbonilico che non si manifestava nell'assorbimento ultravioletto dell'aldeide pirrolica ordinaria possa qui diventar manifesto e operante nello spettro delle aldeidi pirrolliche alchilate al carbonio. Questo fatto potrebbe far anche pensare ad un progressivo ritorno del gruppo carbonile verso quelle condizioni di normalità che non sussistono nella aldeide pirrolica non sostituita e la cui carenza è causa delle anomalie chimiche della detta aldeide.

Da saggi che abbiamo eseguiti a questo proposito risulta che mentre con il reattivo di Piloty l'aldeide pirrolica ordinaria non dà alcuna colorazione caratteristica, con la 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide si ottiene una colorazione già nettamente tendente al rosso; la criptopirrolaldeide poi, la cui curva di

assorbimento nell'ultravioletto presenta assai più pronunciata la « sgobbatura » verso i 3220–3300 Å che potrebbe attribuirsi ad una transizione $N \rightarrow A$ mostra con il reattivo di Piloty una tipica colorazione nettamente rosso chiaro. Non si tratta ancora della decisa risposta delle ordinarie aldeidi al reattivo di Piloty, però si nota una già tipica e netta differenza nella reazione cromatica tra criptopirrolaldeide e aldeide pirrolica non sostituita.

Anche sotto questo punto di vista le nostre ricerche si stanno estendendo su altre aldeidi pirroliche alchilate come pure stiamo mettendo a punto un metodo di osservazione spettrofotometrico nell'ultravioletto (e anche nel visibile per quanto riguarda l'aspetto cromatico visibile della reazione) per poter valutare meglio la risposta del reattivo di Piloty a queste aldeidi.

Si potrà così indagare fino a che punto sia plausibile l'ipotesi che abbiamo fatto di considerare la perturbazione tra imino pirrolico e gruppo carbonilico nell'aldeide pirrolica ordinaria come una perturbazione tra il protone dell'idrogeno iminico e l'orbitale $[y]^2$ dell'ossigeno carbonilico (ved. citazione ⁽¹⁾).

Ma su questo dovremo ritornare con opportune discussioni ed anche con opportuni calcoli di carattere quanto meccanico.

Chimica. — *Sintesi e proprietà di alti polimeri cristallini di alcune α -olefine a catena ramificata* ^(*). Nota di GIULIO NATTA, PIERO PINO, GIORGIO MAZZANTI, PAOLO CORRADINI, UMBERTO GIANNINI, presentata ^(**) dal Socio G. NATTA.

In precedenti lavori ⁽¹⁾ erano stati per la prima volta descritti polimeri cristallini del propilene e di α -olefine superiori a catena lineare. Lo studio delle loro proprietà fisiche aveva permesso di stabilire la eccezionalmente elevata regolarità di struttura delle loro catene principali e la configurazione delle macromolecole allo stato cristallino.

Le ricerche sono state ora estese ad alcune α -olefine ramificate a 5–7 atomi di carbonio, dalle quali sono stati ottenuti polimeri altamente cristallini aventi un punto di transizione di primo ordine sorprendentemente elevato e, in alcuni casi, strutture allo stato solido che differiscono da quelle precedentemente trovate per i polimeri isotattici delle α -olefine lineari.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Società Montecatini.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) G. NATTA, « Atti Acc. Naz. Lincei », Memorie, serie VIII, 4, Sez. II, fasc. 4, p. 61 (1955); « J. Polymer Science », 16, 143 (1955); G. NATTA, P. CORRADINI, « Atti Acc. Naz. Lincei », Memorie, ser. VIII, 4, Sez. II, fasc. 5, p. 73 (1955); G. NATTA, P. CORRADINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XVIII, fasc. 1, p. 19 (1955); G. NATTA, P. PINO, P. CORRADINI, F. DANUSSO, E. MANTICA, G. MAZZANTI, G. MORAGLIO, « J. Am. Chem. Soc. », 77, 1708 (1955).

I. - PARTE SPERIMENTALE.

Le α -olefine ramificate impiegate come monomero sono state da noi preparate, ad eccezione del 3-metilbutene-1 ⁽²⁾. Dopo accurata rettifica presentavano le seguenti caratteristiche:

4-metilpentene-1 ⁽³⁾: p. eb. 55°, n_D^{20} 1,3830;

4-metilesene-1 otticamente inattivo ⁽³⁾: p. eb. 87°, n_D^{20} 1,3995;

5-metilesene-1 ⁽³⁾: p. eb. 84°, n_D^{20} 1,3962.

La polimerizzazione venne eseguita a temperature comprese tra 50° e 100° in presenza di catalizzatori ottenuti per reazione di alogenuri di titanio con alluminio trietile. I prodotti ottenuti vennero purificati per trattamenti successivi con soluzioni eteree di acido cloridrico e con metanolo. I polimeri così ottenuti sono costituiti da una parte cristallina accompagnata da quantità variabili, a seconda delle condizioni di polimerizzazione, di parte amorfa. La parte cristallina venne isolata per estrazione con solventi dalla parte amorfa secondo quanto descritto in precedenti lavori ⁽¹⁾.

Le misure di densità vennero eseguite su lastrine stampate di polimero cristallino secondo quanto descritto da Hunter e Oakes ⁽⁴⁾.

Le determinazioni della viscosità intrinseca, espressa in 100 cm³/g, vennero effettuate con viscosimetri a diluizione di Desreux-Bischoff su soluzioni del polimero cristallino in tetralina, esente da perossidi, aventi concentrazioni fra 0,1 e 0,3 g/100 cm³ ⁽⁵⁾.

In base all'esame röntgenografico di fotogrammi di fibre forniti da campioni estrusi a caldo e successivamente orientati per stiro, sul quale verrà riferito dettagliatamente in un lavoro successivo ⁽⁶⁾, sono stati determinati i periodi di identità per le diverse poli- α -olefine cristalline.

Come temperatura di fusione vennero indicate le temperature a cui scompaiono completamente le linee di diffrazione röntgenografica caratteristiche della struttura cristallina delle sostanze esaminate. Tali temperature risultano alquanto inferiori a quelle che si osservano con i metodi dilatometrici.

2. - DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Nella tabella I sono riportati per i polimeri cristallini delle α -olefine ramificate esaminati, i periodi d'identità lungo l'asse della catena principale le densità e il comportamento rispetto ad una serie di solventi alla loro temperatura di ebollizione. Le viscosità intrinseche dei polimeri cristallini ottenuti variano a seconda delle condizioni di preparazione e sono risultate in genere superiori ad 1 per polimerizzazioni effettuate ad 80° C.

(2) Prodotto Phillips « pure grade ».

(3) P. MULLIKEN, R. L. WAKEMAN, H. T. GERRY, « J. Am. Chem. Soc. », 57, 1605 (1935).

(4) E. HUNTER, W. G. OAKES, « Trans. Faraday Soc. », 41, 49 (1945).

(5) Ringraziamo il dott. G. Moraglio che ha curato l'esecuzione delle misure di viscosità intrinseca.

(6) G. NATTA, P. CORRADINI, I. W. BASSI, « Atti Acc. Naz. Lincei », in corso di pubblicazione.

TABELLA I.

Proprietà fisiche dei polimeri cristallini di alcune α -olefine ramificate.

POLIMERO	Periodo d'identità Å	Densità (1) sperimentale	Solubilità in solventi (2)		
			etere	n. eptano	benzolo
poli-3-metilbutene-1 .	6,8	0,90	i.	i.	p. s.
poli-4-metilpentene-1 .	13,8	0,83	p. s.	s.	m. s.
poli-4-metilesene-1 .	14,0	0,86	p. s.	s.	m. s.
poli-5-metilesene-1 .	6,5	0,85	p. s.	s.	m. s.

(1) alla temperatura ambiente;

(2) alla temperatura di ebollizione dei solventi: *i*=insolubile; *s*=solubile; *p. s.*=poco solubile; *m. s.*=molto solubile.A) *Temperatura di fusione.*

La caratteristica più sorprendente di questi nuovi polimeri è indubbiamente rappresentata dalla loro elevata temperatura di fusione, come risulta dalla tabella II.

TABELLA II.

Confronto fra le temperature di fusione dei polimeri cristallini di alcune α -olefine lineari e ramificate.

Monomero lineare	Temp. fusione del polimero (a)	Monomero ramificato	Temp. fusione del polimero
$\text{CH}_3\text{—CH=CH}_2$	160°		
$\text{CH}_3\text{—CH}_2\text{—CH=CH}_2$	128°	$\begin{array}{c} \text{CH}_3\text{—CH—CH=CH}_2 \\ \\ \text{CH}_3 \end{array}$	> 240° (a)
$\text{CH}_3\text{—(CH}_2)_2\text{—CH=CH}_2$	80°	$\begin{array}{c} \text{CH}_3\text{—CH—CH}_2\text{—CH=CH}_2 \\ \\ \text{CH}_3 \end{array}$	205° (a)
$\text{CH}_3\text{—(CH}_2)_3\text{—CH=CH}_2$	n. d. (*)	$\begin{array}{c} \text{CH}_3\text{—CH}_2\text{—CH—CH}_2\text{—CH=CH}_2 \\ \\ \text{CH}_3 \end{array}$	188° (a)
		$\begin{array}{c} \text{CH}_3\text{—CH—CH}_2\text{—CH}_2\text{—CH=CH}_2 \\ \\ \text{CH}_3 \end{array}$	130° (a)

(*) I campioni di poli n-esene-1 preparati e purificati con lo stesso procedimento usato per le altre poli- α -olefine isotattiche risultano amorfi a temperatura ambiente.

a) determinata con i raggi X.

I polimeri delle α -olefine ramificate presentano infatti temperature di fusione, che sono di oltre 100° superiori a quelle dei polimeri delle α -olefine lineari aventi egual peso molecolare oppure eguale lunghezza delle catene principali. Nel caso dei polimeri delle α -olefine aventi una catena principale di 6 atomi di carbonio (eseni) manca un dato numerico per il confronto: il poli-n-esene-I non è stato infatti finora da noi ottenuto allo stato cristallino, mentre sia il poli-4-metilesene-I che il poli-5-metilesene-I forniscono polimeri cristallini che presentano temperature di fusione superiori a 120° .

Dai dati ottenuti risulta evidente la dipendenza della temperatura di fusione del polimero cristallino dalla struttura del monomero; infatti tale temperatura risulta tanto più elevata quanto più la ramificazione è vicina al doppio legame ⁽⁷⁾. Inoltre, come nel caso dei polimeri delle α -olefine lineari la temperatura di fusione decresce con l'aumentare del numero di atomi di carbonio del monomero, così nel caso dei polimeri delle α -olefine ramificate essa decresce, a parità di distanza della ramificazione dal doppio legame, col crescere del numero di atomi di carbonio della catena principale del monomero. Rimarchevole appare l'elevata temperatura di fusione del poli-3-metilbutene-I che è la più alta finora osservata per i polimeri delle α -olefine alifatiche ed è anche superiore a quella del polistirolo cristallino.

B) Solubilità.

All'elevata temperatura di fusione delle poli- α -olefine ramificate nei confronti delle poli- α -olefine lineari, aventi uguale lunghezza della catena principale, corrisponde una minore solubilità nei solventi, come risulta dalla tabella III.

TABELLA III.

Solubilità di alcuni polimeri di α -olefine lineari e ramificate in alcuni solventi alla temperatura di ebollizione.

R =	Polimeri di α -olefine $\text{CH}_2=\text{CHR}$			
	$-\text{CH}_2-\text{CH}_3$	$-\text{CH} \begin{array}{l} \text{CH}_3 \\ \text{CH}_3 \end{array}$	$-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$	$\text{CH}_2-\text{CH} \begin{array}{l} \text{CH}_3 \\ \text{CH}_3 \end{array}$
solubilità in etere . .	i.	i.	p. s.	p. s.
solubilità in n-pentano .	s.	i.	m. s.	s.
solubilità in benzolo .	m. s.	p. s.	m. s.	m. s.

(7) Il caso del poliisobutilene che non ha atomi di carbonio asimmetrici nella catena principale non rientra evidentemente nella serie di poliolefine considerate.

I dati di solubilità sono riportati solo in modo qualitativo, poiché trattandosi di polimeri non frazionati i valori delle solubilità sono una complessa funzione della distribuzione dei pesi molecolari.

C) Densità.

La densità delle poli α -olefine cristalline dipende in grado notevole dalla struttura delle catene laterali. A partire dal polietilene lineare, che presenta una densità röntgenografica di 1 (sperimentale di 0,97), la densità delle poli-olefine cristalline, derivanti dalla polimerizzazione di α -olefine lineari, si abbassa progressivamente con l'aumentare della lunghezza delle catene laterali. Inoltre se tali catene laterali presentano a loro volta ramificazioni, si osserva, rispetto ai polimeri delle α -olefine lineari, una diminuzione di densità del polimero a parità di lunghezza della catena laterale, ed invece un aumento di densità a parità del numero complessivo di atomi di carbonio della catena laterale.

TABELLA IV.

Densità, a temperatura ambiente, di alcuni polimeri cristallini di α -olefine lineari e ramificate.

Monomero	Densità del polimero	Monomero	Densità del polimero
$\text{CH}_3\text{—CH=CH}_2$	0,92		
$\text{CH}_3\text{—CH}_2\text{—CH=CH}_2$	0,91	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \\ \text{CH}_3\text{—CH—CH=CH}_2 \end{array}$	0,900
$\text{CH}_3\text{—(CH}_2)_2\text{—CH=CH}_2$	0,87	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \\ \text{CH}_3\text{—CH—CH}_2\text{—CH=CH}_2 \end{array}$	0,831

D) Cristallinità e struttura molecolare.

Come è già stato ampiamente discusso in precedenti lavori ⁽⁸⁾, la cristallinità dei polimeri contenenti nella catena principale atomi di carbonio asimmetrici è dovuta alla loro eccezionale regolarità di struttura. Essa richiede non solo che le catene principali dei polimeri siano lineari con concatenamento regolare delle unità monomeriche, ma anche che esista una regolarità nella distribuzione, lungo le catene, delle due configurazioni steriche possibili degli atomi di carbonio asimmetrici che fanno parte delle catene principali.

Tale regolarità di struttura deve essere evidentemente condizione necessaria anche per la cristallinità dei polimeri delle α -olefine a catena

(8) G. NATTA, «Chimica e Industria», 37, 888 (1955); G. NATTA, P. PINO, G. MAZZANTI, «Chimica e Industria», 37, 927 (1955).

ramificata, ma potrebbe in alcuni casi non essere condizione sufficiente. Infatti nel caso delle poli α -olefine ramificate possono essere presenti atomi di carbonio asimmetrici, oltre che nella catena principale, anche nelle catene laterali; la presenza di una distribuzione statistica delle configurazioni *d* e *l* degli atomi di carbonio asimmetrici delle catene laterali rappresenta una nuova causa di irregolarità di struttura che potrebbe impedire la cristallizzazione del polimero.

Nell'unico caso di questo genere finora da noi esaminato, il polimero del 4-metil-esene-1 (I), contenente un atomo di



carbonio asimmetrico nella catena laterale di ciascuna unità monomerica, è stato isolato, partendo dal monomero inattivo, un polimero cristallino.

La possibilità di esistenza di tale polimero cristallino può essere interpretata in due modi:

1° Le irregolarità di carattere sterico che vengono a crearsi per la presenza di una probabile distribuzione statistica delle configurazioni *d* e *l* degli atomi di carbonio asimmetrici delle catene laterali non sono sufficienti ad alterare sostanzialmente lo scheletro fondamentale del reticolo cristallino determinato dalla configurazione delle catene principali.

2° Il processo di polimerizzazione è tanto selettivo che per la formazione di ogni singola catena vengono utilizzate soltanto molecole di monomero aventi una certa configurazione sterica, e perciò il prodotto di polimerizzazione risulta costituito da una miscela di macromolecole derivate ciascuna da monomeri tutti *d* o tutti *l*.

Delle due interpretazioni la prima appare, allo stato attuale delle ricerche, la più verosimile, sebbene, la eccezionale selettività del processo di polimerizzazione impiegato possa far apparire ammissibile anche la seconda.

E) *Struttura delle catene principali.*

Il valore del periodo d'identità del poli-5-metilesene-1 corrisponde a quello del polipropilene, del polibutene-1 (forma cristallina I) e del polistirolo per i quali è stata dimostrata una struttura isotattica ⁽⁹⁾.

Pertanto, tenuto conto delle strette analogie nel processo di polimerizzazione, e di altre evidenze risultanti dallo studio più dettagliato della struttura cristallina, appare giustificato attribuire anche al polimero di tale α -olefina ramificata una struttura isotattica.

Il poli 3-metilbutene-1 ha invece un periodo d'identità superiore a quello del poli 5-metilpentene-1 ed è praticamente identico a quello della forma cristallina II instabile del poli n-butene-1 isotattico che si trasforma

(9) G. NATTA, «Makrom. Chemie», 16, 213 (1955).

facilmente in modo irreversibile nella modificazione cristallina I, che possiede lo stesso periodo di identità del poli-propilene isotattico.

TABELLA V.

Periodi di identità di alcuni polimeri di α -olefine lineari e ramificate.

Polimeri di α -olefine lineari	Periodi di identità Å	Polimeri di α -olefine ramificate	Periodo di identità Å
Polipropilene	6,5		
Polibutene-I (I)	6,45		
Polipentene-I	6,60	Poli 5-metilpentene-I . .	6,5
Polistirolo	6,65		
Polibutene-I (II)	6,85	Poli 3-metilbutene-I . . .	6,84

La stretta analogia fra i periodi d'identità e la forma cristallina della forma II del poli-*n*-butene-1, con il poli-3-metilbutene-1 ci induce a ritenere che anche quest'ultimo possieda una struttura isotattica delle catene principali.

Il fatto, constatato per il poli-*n*-butene, che una stessa catena isotattica può presentarsi allo stato cristallino con due diversi periodi di identità ai quali corrispondono due diverse configurazioni geometriche delle catene principali, e il fatto che le proprietà fisiche dei polimeri cristallini esaminati variano gradualmente al variare della forma e delle dimensioni delle ramificazioni, ci induce a ritenere che anche i polimeri del 4-metilpentene-1 e del 4-metilesene-1, preparati con lo stesso procedimento di polimerizzazione dei precedenti, siano anch'essi isotattici, pur avendo un periodo di identità assai diverso.

Come verrà più diffusamente descritto in una Nota successiva ⁽⁶⁾, le differenze fra i periodi di identità dei polimeri cristallini a catena principale spiraliforme possono essere interpretate ammettendo una distorsione delle catene principali per opera dei gruppi laterali, con variazioni del passo e del diametro delle spirali.

Risulterebbe perciò che la sostituzione di atomi di idrogeno nella catena zig-zag planare di un polietilene lineare con gruppi laterali, in modo da ottenere poli α -olefine cristalline isotattiche, provoca un riassetamento delle catene in spirali, con passo e diametro dipendenti dalle dimensioni e dalla forma dei gruppi laterali.

Un fenomeno analogo, sebbene assai più complesso, a causa della presenza di legami idrogeno, si osserva nelle catene polipeptidiche che allo stato cristallino, in assenza di gruppi laterali ingombranti, possono assumere una forma planare, mentre, in presenza di gruppi laterali di dimensioni sensibili, tendono a contrarsi assumendo in alcuni casi strutture spiraliformi.

Chimica. — *Struttura cristallina di alcune poli-alfa-olefine isotattiche*^(*). Nota di GIULIO NATTA, PAOLO CORRADINI e IVANO WALTER BASSI, presentata^(**) dal Socio G. NATTA.

Come era stato precedentemente comunicato a questa Accademia⁽¹⁾, sono stati sintetizzati nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano polimeri di monomeri del tipo $\text{CH}_2=\text{CH}-\text{R}$, i quali devono la loro cristallinità alla loro eccezionale regolarità di struttura. Sono stati chiamati *isotattici* quei polimeri vinilici lineari a concatenamento testa-coda in cui gli atomi di carbonio asimmetrico, che si susseguono nella catena, posseggono la medesima configurazione sterica e *sindiotattici* quei polimeri vinilici lineari a concatenamento testa-coda in cui successivi atomi di carbonio asimmetrico hanno alternativamente configurazione destra e sinistra⁽²⁾.

Per i polimeri isotattici del propilene, dello stirolo, dell'alfabutilene (Modificazione 1) e del vinilisobutiletere è stato possibile infatti dimostrare che gli atomi di carbonio asimmetrici si dispongono lungo un'elica di 3 monomeri per passo in posizioni geometricamente equivalenti. D'altronde, perché gruppi asimmetrici ripetentisi lungo una catena non planare risultino tra loro strutturalmente, anche se non cristallograficamente, equivalenti, essi debbono disporsi lungo una spirale. Questo è il caso, oltre che dei polimeri isotattici, anche di altri polimeri cristallini come certe proteine⁽³⁾.

Ci è sembrato pertanto interessante studiare la struttura cristallina di poli-alfa-olefine ramificate, per esaminare l'influenza di gruppi laterali ingombranti, sulla forma della catena dei suddetti polimeri, e precisamente se la catena corrisponde sempre, nei cristalli dei polimeri vinilici isotattici, al tipo $(\text{AB})_3$ di Bunn⁽⁴⁾ o se può assumere anche altre configurazioni spiralizzate. Sulla preparazione e su alcune proprietà fisiche dei polimeri in esame (del 3-metilbutene, del 4-metilpentene, del 4-metilesene, del 5-metilesene) viene riferito in altra Nota presentata contemporaneamente a questa Accademia.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Società Montecatini.

(**) Presentata nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) G. NATTA, «Atti Acc. Naz. Lincei», Memorie, ser. VIII, 4, Sez. II, fasc. 4, p. 61 (1955); G. NATTA, «J. Polymer Science», 16, 143 (1955); G. NATTA, P. PINO, P. CORRADINI, F. DANUSO, E. MANTICA, G. MAZZANTI e G. MORAGLIO, «J.A.C.S.», 77, 1708 (1955); G. NATTA e P. CORRADINI, «Atti Acc. Naz. Lincei», Memorie, ser. VIII, 4, sez. II, fasc. 5, p. 73 (1955); G. NATTA e P. CORRADINI, «Rendiconti Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 18, fasc. 1, p. 19 (1955); G. NATTA e P. CORRADINI, «Die Makrom. Chemie», 16, 77 (1955).

(2) G. NATTA, «Die Makrom. Chemie», 16, 213 (1955); G. NATTA, «La Chim. e l'Ind.», 37, 888 (1955); G. NATTA e P. CORRADINI, Nota presentata all'Acc. Naz. Lincei il 12 novembre 1955; G. NATTA e P. CORRADINI, lavoro in corso di stampa sul «J. Pol. Sci.».

(3) «Scientific American», 191, 1, p. 51 (luglio 1954).

(4) C. W. BUNN, «Proc. Roy. Soc.» (London), 180, 67 (1942).

Poli-3-metilbutene. — Nella fig. 1 è riportato uno spettro eseguito con contatore Geiger di un campione di residuo all'estrazione eptanica del polimero del 3-metilbutene. Esso appare notevolmente cristallino. Una fibra stirata del prodotto è stata esaminata in una camera per cristallo rotante. Il periodo di identità lungo l'asse della fibra è uguale a $6,84 \pm 0,07 \text{ \AA}$. I riflessi equatoriali sono interpretabili sulla base di un reticolo piano di assi $a = 9,55$ e $b = 8,54$, $\gamma = 116^\circ 30'$, come risulta dalla Tabella I. La densità röntgenografica di 0,93, che si ricava ammettendo che lungo c si ripetano 4 unità monometriche, è confrontabile con il valore sperimentale di 0,90. Tale numero di unità monometriche è compatibile solo con una configurazione spiralizzata della catena, in cui gli atomi non siano più in posizione relativa corrispondente alla massima distanza tra i legami (posizione « staggered ») come nell'elica proposta per interpretare lo spettro del poli-propilene ⁽¹⁾. Ci riserviamo in una Nota successiva di precisare la natura delle distorsioni che conducono all'esistenza di una tale catena. Tali distorsioni, tuttavia, non sono sempre legate in modo diretto alla presenza di un ingombrante gruppo laterale (isopropilico). In effetti anche la modificazione II del poli-alfa-butene ⁽²⁾, la cui formazione si osserva nella evaporazione di soluzioni

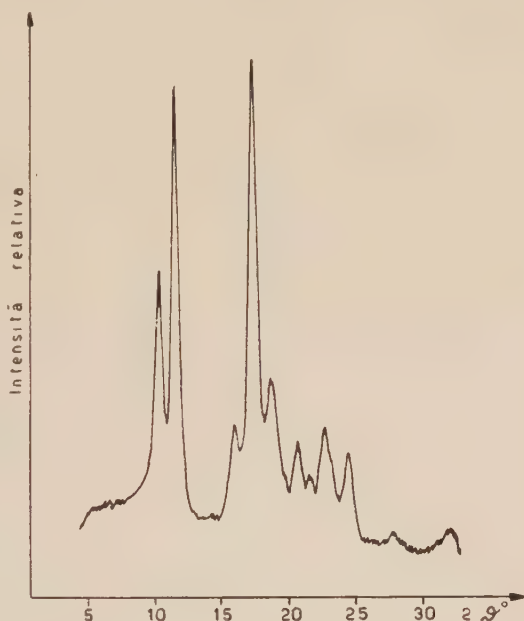


Fig. 1. — Registrazione con contatore di Geiger dello spettro ai raggi X (Cu $K\alpha$) di poli-3-metilbutene residuo all'estrazione eptanica.

di polibutylene isotattico, presenta una simile configurazione della catena, e benché si disponga di uno spettro di fibra con poche riflessioni, abbiamo potuto misurare per tale polimero una periodicità lungo l'asse della catena di $6,85 \text{ \AA}$, identica a quella del poli-3-metilbutene, mentre i riflessi equatoriali sembrano interpretabili sulla base di un reticolo quadrato con $a = 7,49 \text{ \AA}$. La densità röntgenografica per il poli- α -butene forma II, qualora si ammetta che lungo c si ripetono quattro monomeri, risulta pari a 0,96, ed in accordo quindi con la densità sperimentale. Stirando anche lentamente ed a bassa temperatura (a 0°C) un filo di poli- α -butene forma II si constata una trasformazione della forma II nella forma I, e si nota che i cristalli presenti, orientati secondo la direzione di stiro, appartengono tutti alla forma I. Questo si può interpretare ammettendo appunto che nella

forma I la catena del poli- α -butene sia in una forma più allungata che nella forma II. Un fenomeno analogo si presenta pure per le proteine del muscolo (3) (α -cheratina \rightarrow β -cheratina). Ma mentre al variare della temperatura il poli-3-metilbutene mantiene la sua struttura cristallina per fondere sopra i 250 °C, non è possibile osservare il punto di fusione del poli- α -butene, forma II, in quanto tale forma appare, a temperature superiori a quella ambiente, sempre metastabile e prima di fondere si trasforma nella forma I.

TABELLA I.

Distanze reticolari sperimentali e calcolate per il poli-3-metilbutene-I.

$h\ k\ o$	$d_{\text{sper.}} \text{ \AA}$	$d_{\text{calc.}} \text{ \AA}$
100	8,59	8,54
010- $\bar{1}$ 10	7,63	7,64
110- $\bar{2}$ 10	4,75	4,74
200- $\bar{1}$ 20	4,29	4,27
020- $\bar{2}$ 20	3,80	3,82
210- $\bar{3}$ 10	3,18	3,17
300	2,86	2,85
$\bar{1}$ 30- $\bar{2}$ 30	2,80	2,81
220- $\bar{4}$ 20	2,37	2,37
130- $\bar{4}$ 30	2,20	2,19
400- $\bar{2}$ 40	2,14	2,14
$\bar{1}$ 40- $\bar{3}$ 40	2,06	2,07
410-230- $\bar{5}$ 30- $\bar{5}$ 10	1,86	1,85

Evidentemente la forma della catena del poli-3-metilbutene risulta stabilizzata dalla presenza della ramificazione nel gruppo laterale. Un'altra prova del fatto che il periodo di identità lungo l'asse c del poli-3-metilbutene corrisponde a 4 unità monomeriche è fornita dalla geometria della proiezione della cella elementare su di un piano normale all'asse della fibra che deriva, come risulta dalla fig. 2, da un impacchettamento di quadrati di lato b ; infatti i lati a e b della cella sono legati dalla relazione $a^2 = b^2 + (b/2)^2$. Ciò conferma l'ipotesi che la proiezione della catena su di un piano normale al suo asse abbia simmetria quaternaria.

In modo analogo la proiezione della cella del polipropilene su di un piano normale all'asse della catena può essere derivata da un certo tipo di

impacchettamento di triangoli equilateri (fig. 2) di lato l : infatti $b' = 3/2 l$, $(a')^2 a = (4 \sin^2 60^\circ + 1/4) l^2$ da cui deriva un angolo tra a' e b' di $73^\circ 55'$. Esso corrisponde a un close-packing di metili a 4.2 \AA tra loro.

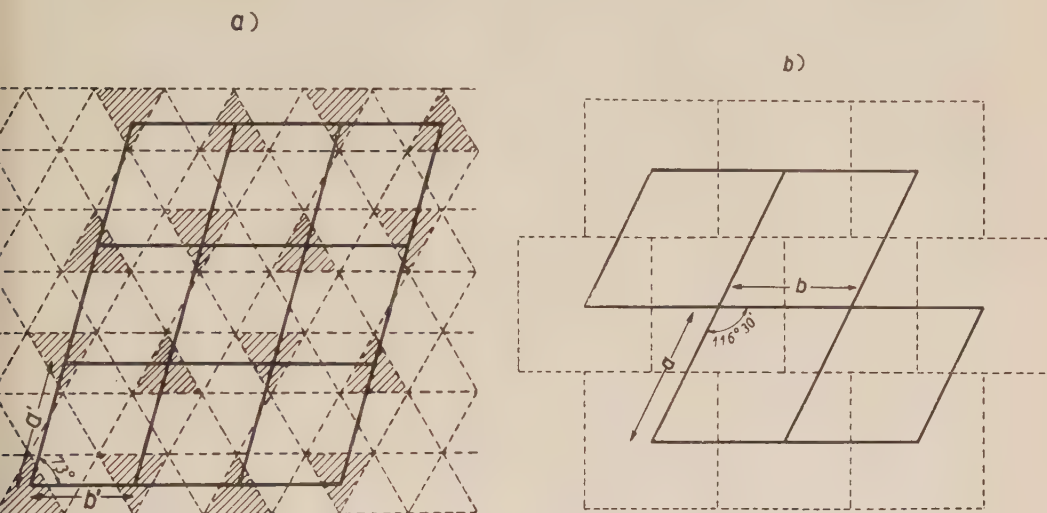


Fig. 2. - Derivazione della proiezione sul piano 001 della cella elementare di: a) polipropilene e b) poli-3-metilbutene-1.

Poli-4-metilelene e Poli-4-metilpentene. - Uno spettro con contatore di Geiger del poli-4-metilpentene cristallino è mostrato nella fig. 3. Il fotogramma di fibra fornisce una periodicità di $13,85 \pm 0,15 \text{ \AA}$. Oscillando la fibra normalmente all'asse di stiro si ottiene un fotogramma in cui si osserva equatorialmente un forte riflesso con l'indice $l = 7$ e periodicità pari a $1,945 \text{ \AA}$, che ci induce a ritenere che lungo c si ripetono per l'identità 7 unità

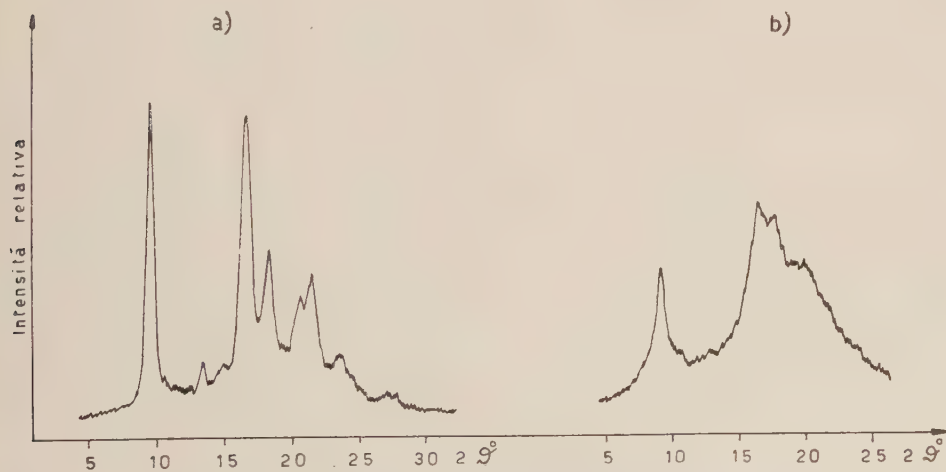


Fig. 3. - Registrazione con contatore di Geiger dello spettro ai raggi X (Cu $K\alpha$) di a) poli-4-metilpentene e b) poli-4-metilelene.

monomeriche a distanza eguale. Si può ammettere che come nel poli-propilene si ripetono 3 unità monomeriche strutturalmente eguali per passo dell'elica, e nel poli-3-metilbutene 4 unità, nel caso del poli-4-metilpentene si dispongono 3,5 unità monomeriche per passo, cosicché l'identità cristallografica viene ad aversi solamente dopo un periodo corrispondente a 7 unità monomeriche. Questo argomento verrà approfondito in un prossimo lavoro. Comunque il fatto che lungo c si ripetono per l'identità 7 unità monomeriche eguali è già di per sé probativo, analogamente a quanto era stato dedotto per il polipropilene, della isotassia del polimero.

TABELLA II.

Confronto fra le distanze reticolari dei piani $h k 0$ del poli-4-metilpentene e del poli-4-metilesene.

Int.	$d_1 \text{ \AA}$	$d_2 \text{ \AA}$	d_1/d_2
$f \dots \dots$	9,31	9,82	0,948
$m \dots \dots$	6,61	7,00	0,944
$mf \dots \dots$	4,15	4,37	0,949

d_1 = distanze reticolari dei piani equatoriali del poli-4-metilpentene-I.

d_2 = distanze reticolari dei piani equatoriali del poli-4-metilesene-I.

Analogamente al poli-4-metilpentene, il poli-4-metilesene presenta un periodo di $14,00 \pm 0,15 \text{ \AA}$ con dimensioni equatoriali della cella simili a quelle del precedente polimero; e gli si può pertanto attribuire una analoga struttura (tabella II).

È notevole il fatto che il poli-4-metilesene è cristallino pur presentando un atomo di carbonio asimmetrico in ogni gruppo laterale; ma non è possibile per ora stabilire se eventuali irregolarità nella distribuzione di configurazioni diverse degli atomi di carbonio asimmetrico delle catene laterali siano la causa della minore cristallinità osservata per tale polimero.

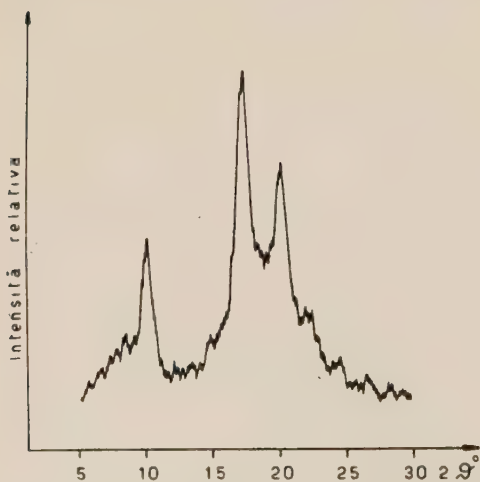


Fig. 4. - Registrazione con contatore di Geiger dello spettro ai raggi X (Cu $K\alpha$) del poli-5-metilesene.

Poli-5-metilesene-I. - Il poli-5-metilesene-I è stato da noi esa-

minato per mezzo dei raggi X e della diffrazione degli elettroni (fig. 4). Esso fornisce una periodicità di 6.50 \AA lungo l'asse della fibra. Il reticolo reciproco che interpreta i riflessi equatoriali è di tipo esagonale. L'asse a è uguale a 10.2 \AA . La densità röntgenografica (0,84) qualora si ammetta che lungo c si ripetano per l'identità 3 unità monomeriche, si accorda bene con quella sperimentale. La forma della catena è del tipo $(AB)_3$ di Bunn come è già stato dimostrato in un lavoro precedente ⁽⁵⁾.

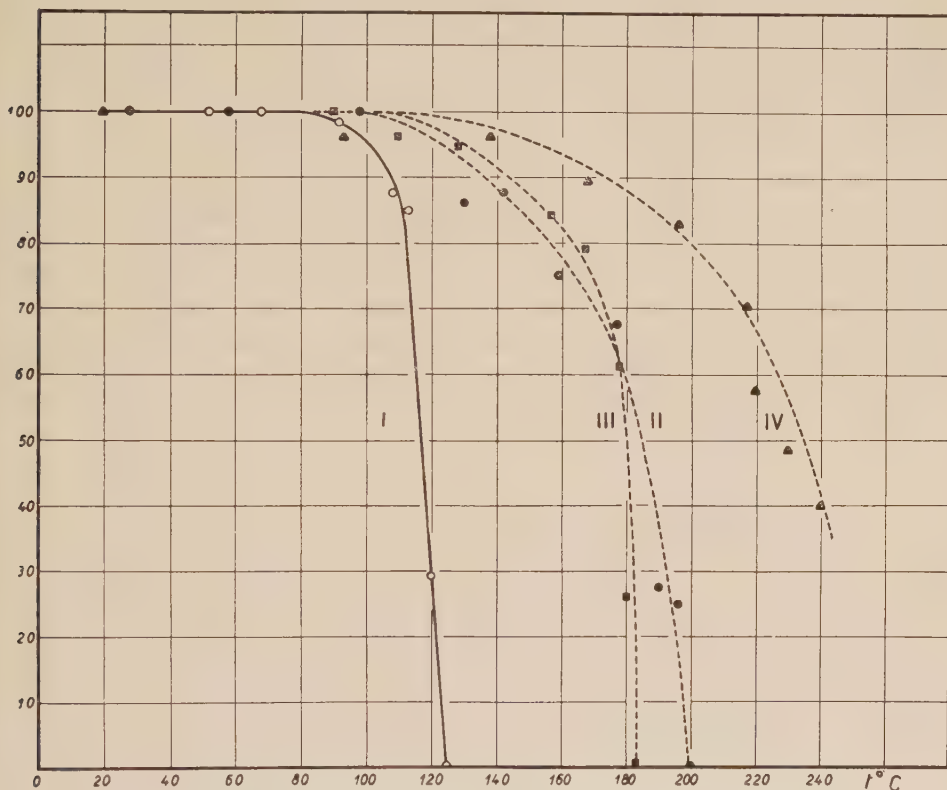


Fig. 5. - Curve di variazione della cristallinità con la temperatura di: I) poli-5-metilelene; II) poli-4-metilelene; III) poli-4-metilpentene; IV) poli-3-metilbutene.

Analisi termica dei polimeri. - Le variazioni della cristallinità con la temperatura sono state esaminate per tutti i polimeri studiati per mezzo di una apparecchiatura da noi già descritta ⁽⁶⁾.

Nella fig. 5 sono riportate le curve della variazione della cristallinità (misurata dal decrescere dell'intensità di una riga ai raggi X) in funzione della temperatura, su una scala arbitraria nella quale il valore 100 corri-

(5) G. NATTA, I. W. BASSI e P. CORRADINI, lavoro in corso di stampa su « Die Makrom. Chemie ».

(6) G. NATTA e P. CORRADINI, lavoro in corso di stampa su « La Ricerca Scientifica », presentato al Simposio di Chimica Macromolecolare di Milano-Torino del. 1954.

sponde all'altezza della riga di riferimento alla temperatura ambiente. Come temperatura di transizione del 1° ordine (completa fusione) si è considerata la temperatura alla quale la cristallinità si annulla. Nella tabella III sono riportate le temperature di fusione dei polimeri in esame in confronto con quelle di altri polimeri isotattici. Tanto maggiore è la lunghezza del radicale attaccato alla catena isotattica e quindi tanto maggiore è il numero delle configurazioni possibili della catena laterale, tanto più si abbassa il punto di fusione. Le ramificazioni, viceversa, aumentano in generale il punto di fusione perché riducono la mobilità della catena e tanto più quanto più la ramificazione è vicina alla catena principale del polimero, perché maggiore risulta la barriera energetica che si oppone alla rotazione del gruppo laterale.

TABELLA III.

Punti di transizione del I ordine di alcuni polimeri isotattici (determinati per via röntgenografica).

Polimeri a viscosità intrinseca > 1	Temperatura di fusione röntgenografica, °C
Poli-alfa-pentene	75-80
Poli-alfa-butene forma I	126-128
Poli-5-metilesene-I	124-130
Polipropilene	158-160
Poli-4-metilesene-I	183-188
Poli-4-metil-pentene-I	200-205
Polistirolo isotattico	230
Poli-3-metilbutene	> 240

CONCLUSIONI. - Dall'esame röntgenografico di alcuni polimeri cristallini di α -olefine e precisamente del butene-1, del 3-metilbutene-1, del 4-metilpentene-1, del 4-metilesene-1 e del 5-metilesene-1 è risultato che tali polimeri, indipendentemente dal loro periodo di identità e dal numero di unità monomeriche in essi contenute, posseggono allo stato cristallino unità monomeriche strutturalmente equivalenti, ossia sequenze testa-coda di unità monomeriche contenenti atomi di carbonio con la medesima configurazione sterica, e sono perciò isotattici.

Viene confermato che l'isotassia determina nei cristalli una configurazione spiraliforme delle catene ed inoltre che la forma delle catene non corrisponde sempre a quella con simmetria ternaria riscontrata ad esempio per il polistirolo, ma l'elica può risultare più schiacciata ed allargata con maggiore pe-

riodo di identità e diverso numero di unità monomeriche per passo a seconda della forma e delle dimensioni dei gruppi laterali. Le spirali possono risultare costituite, invece di tre unità monomeriche per passo, come nel polipropilene, nella forma I del polibutene-1 e nel polistirolo (periodo di identità 6,45-6,65 Å), da quattro unità per passo nel poli-3-metilbutene-1 (periodo di identità 6,85 Å), oppure da 3,5 unità per passo (corrispondente ad un periodo di 13,8-14 Å che comprende sette unità monomeriche e due passi della spirale) nei poli-4-metilalcheni esaminati, mentre risulta ancora di 3 unità monomeriche nel poli-5-metilesene-1.

Risulterebbe quindi che una ramificazione metilica nelle catene laterali dei polimeri isotattici provoca una distorsione della catena principale che è massima quando il metile è nella posizione vicina alla catena principale, minore se è distanziato di un gruppo metilenico, nulla se è maggiormente distanziato.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su un principio di dualità per talune formole di maggiorazione relative alle equazioni differenziali.* Nota di GAETANO FICHERA, presentata (*) dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

In un mio recente lavoro ho considerato un principio d'esistenza nell'analisi funzionale degli spazi di Banach, che, per quanto assai semplice, sembra rivelarsi utile strumento in numerose questioni relative alle applicazioni, specie per quelle inerenti ai teoremi di esistenza per i problemi al contorno riguardanti equazioni differenziali lineari (1).

Mi propongo nella presente Nota di osservare una ulteriore conseguenza del sopradDETTO principio, che mi pare non priva di qualche interesse. Precisamente mostrerò che il sussistere di una data formola di maggiorazione *a priori* per la soluzione di un determinato problema al contorno, implica, ove sia verificata una certa condizione di completezza, il sussistere di una seconda formola di maggiorazione *a priori* relativa ad un problema al contorno non necessariamente identico al primo. Talché, in opportune ipotesi, le formole di maggiorazione possono essere associate a due a due, in modo che se è vera una data formola, lo è anche quella che ad essa è stata associata e che verrà detta la sua *duale*.

I. FORMULAZIONE GENERALE DEL PRINCIPIO DI DUALITÀ. — Sia E_k ($k = 1, 2, \dots, n$) un insieme appartenente ad un dato ambiente S_k nel

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) Cfr. G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*, «Atti del Convegno internazionale sulle Equazioni alle derivate parziali» (Trieste, agosto 1954), Ediz. Cremonese, Roma, 1955.

quale è stata introdotta una misura non negativa $\mu_k^{(2)}$. L'insieme E_k sia μ_k -misurabile. Indicherò con $\mathcal{L}^{(p)}(E_k)$ ($p \geq 1$) lo spazio di Banach delle funzioni reali aventi modulo di potenza p -esima μ_k -sommabile in E_k . Considererò anche il caso $p = \infty$, nel quale $\mathcal{L}^{(\infty)}(E_k)$ è costituito dalle funzioni pseudo-limitate in E_k . Sia V un insieme astratto lineare rispetto al corpo reale e $M_k(v), L_k(v)$ due trasformazioni lineari definite in V ed i cui codomini $M_k(V)$ ed $L_k(V)$ sono rispettivamente contenuti in $\mathcal{L}^{(q_k)}(E_k)$ ed $\mathcal{L}^{(p_k)}(E_k)$, ($1 \leq q_k \leq \infty, 1 \leq p_k \leq \infty$). Sia U un secondo insieme astratto lineare rispetto al corpo reale. Le due trasformazioni $M_k^*(u)$ ed $L_k^*(u)$ siano definite in U ed abbiano codomini $M_k^*(U)$ ed $L_k^*(U)$ contenuti in $\mathcal{L}^{(p_k^*)}(E_k)$ e $\mathcal{L}^{(q_k^*)}(E_k)$ essendo p_k^* e q_k^* i complementari di p_k e q_k rispettivamente ⁽³⁾. Per ogni $v \in V$ ed ogni $u \in U$ si abbia:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n \int_{E_k} [M_k(v) L_k^*(u) - M_k^*(u) L_k(v)] d\mu_k = 0.$$

Consideriamo lo spazio di Banach \mathcal{B} costituito dai vettori $w \equiv (w_1, w_2, \dots, w_n)$, ciascuno dei quali ha come k -esima componente w_k una funzione reale appartenente a $\mathcal{L}^{(p_k)}(E_k)$, e così normalizzato:

$$\|w\| = \left(\sum_{k=1}^n \|w_k\|^2 \right)^{1/2}.$$

Indico con $L(v)$ la trasformazione lineare la quale all'elemento $v \in V$ fa corrispondere il vettore di \mathcal{B} avente per componenti: $L_1(v), L_2(v), \dots, L_n(v)$.

Dal principio di esistenza ricordato nella introduzione ⁽⁴⁾ segue in modo immediato il teorema:

I. Se il codominio $L(V)$ della trasformazione $L(v)$ è un insieme completo nello spazio \mathcal{B} e se sussiste la formola di maggiorazione:

$$(2) \quad \left(\sum_{k=1}^n \|M_k(v)\|^2 \right)^{1/2} \leq K \left(\sum_{k=1}^n \|L_k(v)\|^2 \right)^{1/2}$$

per ogni $v \in V$, allora per ogni $u \in U$ sussiste la maggiorazione:

$$(2d) \quad \left(\sum_{k=1}^n \|M_k^*(u)\|^2 \right)^{1/2} \leq K \left(\sum_{k=1}^n \|L_k^*(u)\|^2 \right)^{1/2}.$$

(2) Per le notazioni e i concetti relativi alla teoria della misura o, in generale, all'Analisi astratta, impiegati nella presente Nota, avvertiamo che ci uniformeremo a quelli del testo: G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I, Ist. Mat. Univ. Trieste, 1954.

(3) Si dice che p e q sono complementari allorché:

$$q \left\{ \begin{array}{ll} = \infty & \text{se } p = 1, \\ = \frac{p}{p-1} & \text{se } 1 < p < \infty, \\ = 1 & \text{se } p = \infty. \end{array} \right.$$

(4) Cfr. loc. cit. ⁽¹⁾, p. 175.

Tale teorema esprime il principio di dualità annunciato. La (2d) sarà detta la *duale* della formola di maggiorazione (2).

2. CASI PARTICOLARI. — Vogliamo adesso considerare qualcuno dei casi particolari più espressivi del teorema I, relativi alle applicazioni.

Sia D un dominio regolare e limitato dello spazio euclideo S_r . Si consideri l'operatore differenziale lineare del secondo ordine ellittico-positivo in D :

$$L(v) \equiv \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \frac{\partial^2 v}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^r b_h \frac{\partial v}{\partial x_h} + cv.$$

Le funzioni a_{hk} siano di classe due in D , le b_h di classe uno e c hölderiana in D ed ivi mai positiva.

Per ogni numero naturale pari p e per ogni soluzione v dell'equazione $L(v) = 0$ di classe uno in D , sussiste la formola di maggiorazione:

$$(3) \quad \left(\int_D v^p dx \right)^{1/p} \leq K_p \left(\int_{\mathfrak{F}D} v^p d\sigma \right)^{1/p}$$

($dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_r$; $d\sigma$ = misura dell'elemento ipersuperficiale su $\mathfrak{F}D$).

Poniamo:

$$L^*(v) \equiv \sum_{h,k}^{1,r} \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} (a_{hk} v) - \sum_{h=1}^r \frac{\partial}{\partial x_h} (b_h v) + cv;$$

$$\Gamma(v) \equiv \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \frac{\partial v}{\partial x_h} \frac{\partial v}{\partial x_k} \quad ; \quad b = \sum_{h=1}^r \left(b_h - \sum_{k=1}^r \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k} \right) \cos(x_h, N);$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \equiv \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \frac{\partial v}{\partial x_h} \cos(x_k, N),$$

essendo N la normale a $\mathfrak{F}D$ rivolta verso l'interno di D .

La (3) è una facile conseguenza della identità:

$$(4) \quad \int_D \{ v^p L^*(w) - w [p(p-1)v^{p-2} \Gamma(v) + pv^{p-1} L(v) + (1-p)cv^p] \} dx = \\ = \int_{\mathfrak{F}D} \left\{ pwv^{p-1} \frac{\partial v}{\partial \nu} - v^p \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} - bw \right) \right\} d\sigma$$

quando come w si assume una funzione verificante le condizioni:

$$L^*(w) > 0 \text{ in } D, \quad w = 0 \text{ su } \mathfrak{F}D.$$

Si ha

$$K_p = \left(\frac{\max_{\mathfrak{F}D} \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|}{\min_D |L^*(w)|} \right)^{1/p}.$$

Facendo assumere alla (4), scritta per $p = 1$ e $w \equiv u$ con $u = 0$ su $\mathcal{F}D$, il ruolo della (1), si constata che la (3) ammette la seguente formola duale:

$$(3' d) \quad \left(\int_{\mathcal{F}D} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - bu \right|^q d\sigma \right)^{1/q} \leq K_p \left(\int_D |E^*(u)|^q dx \right)^{1/q},$$

essendo q il complementare di p ed u una qualsiasi funzione di classe uno in D , di classe due in $D - \mathcal{F}D$, con $|E^*(u)|^q$ sommabile in D e nulla su $\mathcal{F}D$. Come casi limite, per $p \rightarrow \infty$, della (3) e della (3' d) si hanno la ben nota formola:

$$(3') \quad \max_D |v| = \max_{\mathcal{F}D} |v|$$

e la sua duale:

$$(3' d) \quad \int_{\mathcal{F}D} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - bu \right| d\sigma \leq \int_D |E^*(u)| dx^{(5)}.$$

Se si impone alla v la ulteriore condizione: $\partial v / \partial \nu = 0$ su $\mathcal{F}_2 D$, essendo $\mathcal{F}_2 D$ una parte di $\mathcal{F}D$ composta da porzioni di superficie regolari, posto $\mathcal{F}_1 D = \mathcal{F}D - \mathcal{F}_2 D$, si ha ⁽⁶⁾:

$$(5) \quad \max_D |v| = \max_{\mathcal{F}_1 D} |v|.$$

La duale della (5) è la seguente:

$$(5' d) \quad \int_{\mathcal{F}_1 D} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - bu \right| d\sigma \leq \int_D |E^*(u)| dx,$$

(5) Per dedurre direttamente la (3' d) dalla (3') occorre enunciare in una forma un po' più ampia il principio di dualità I, ammettendo che i codomini delle M_k ed L_k oltre che spazi $\mathcal{L}^{(p)}$ possano anche essere spazi di funzioni continue definite in un insieme chiuso dello spazio euclideo. Tale estensione si consegue in modo immediato.

Vogliamo notare come, disponendo della (3 d) o della (3' d), si consegua subito, sfruttando il principio d'esistenza indicato nella nota ⁽⁴⁾ il teorema d'esistenza per il problema di Dirichlet relativo all'equazione $L(v) = 0$. Infatti, assegnata la funzione continua f su $\mathcal{F}D$, per il ricordato principio e per la (3 d) [(3' d)] segue l'esistenza di una funzione v appartenente a $\mathcal{L}^{(p)}(D)$ [$\mathcal{L}^{(\infty)}(D)$] tale che

$$\int_{\mathcal{F}D} f \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - bu \right) d\sigma = \int_D v E^*(u) dx,$$

qualunque sia u nulla su $\mathcal{F}D$ e di classe due in D . Per il cosiddetto « lemma di Weyl » ne viene che v è la soluzione del problema di Dirichlet:

$$L(v) = 0 \quad \text{in } D - \mathcal{F}D, \quad u = f \quad \text{su } \mathcal{F}D.$$

(6) Cfr. C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer, Berlino 1955, p. 5 e Bibliografia ivi citata.

la quale sussiste per ogni u verificante condizioni qualitative analoghe a quelle sopra specificate e tale che $u = 0$ su $\mathfrak{F}_1 D$, $\partial u / \partial \nu - bu = 0$ su $\mathfrak{F}_2 D$. La (5 d) sussiste effettivamente, dato che le tracce su $\mathfrak{F}_1 D$ delle soluzioni dell'equazione $E(v) = 0$, tali che $\partial v / \partial \nu = 0$ su $\mathfrak{F}_2 D$, costituiscono un sistema completo per la convergenza uniforme (7).

Consideriamo ora la seguente maggiorazione:

$$(6) \quad \left(\int_{\mathfrak{F}D} v^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq K \left(\int_D \left[\sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \frac{\partial v}{\partial x_h} \frac{\partial v}{\partial x_k} - cv^2 \right] dx \right)^{1/2},$$

la quale sussiste per ogni v di classe uno in D , supposto connesso, se non è $c \equiv 0$ in D , e, nel caso contrario, per ogni v che si annulli in un prefissato punto x_0 di D (8). Noi supporremo che v verifichi l'equazione ellittico-positiva:

$$(7) \quad \sum_{h=1}^r \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\sum_{k=1}^r a_{hk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) + cv = 0.$$

In tal caso, per un teorema di chiusura relativo alle soluzioni di tale equazione (9), può applicarsi il principio di dualità, assegnando il ruolo della (1) alla identità:

$$\int_{\mathfrak{F}D} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = - \int_D \left[\sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \frac{\partial v}{\partial x_h} \frac{\partial v}{\partial x_k} - cuv \right] dx,$$

la quale sussiste per ogni u di classe uno in D ed ivi soluzione della (7). Ne segue che per ogni siffatta funzione sussiste la formola duale della (6).

$$(6d) \quad \left(\int_D \left[\sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} - cu^2 \right] dx \right)^{1/2} \leq K \left(\int_{\mathfrak{F}D} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

Innumerevoli sono gli esempi che potrebbero ancora addursi relativamente alle equazioni ellittiche. Preferiamo tuttavia indicare alcuni casi relativi alle equazioni paraboliche, dei quali, peraltro, sarà facile riconoscere gli analoghi nel caso ellittico.

Sia D un dominio limitato dello spazio S_{r+1} delle variabili x_1, x_2, \dots, x_r, t . Esso sia compreso fra i due iperpiani di equazioni $t = 0$ e $t = T$ ($T > 0$). Supporremo che l'intersezione di D con l'iperpiano $\pi(t_0)$ di equazione $t = t_0$ ($0 \leq t_0 \leq T$) sia un dominio regolare di $\pi(t_0)$ che indicheremo con $B(t_0)$. Noi supporremo:

$$\pi(0) \cdot \mathfrak{F}A = B(0) \quad , \quad \pi(T) \cdot \mathfrak{F}A = B(T),$$

$$\pi(t_0) \cdot \mathfrak{F}A = \mathfrak{F}B(t_0) \quad \text{per } 0 < t_0 < T.$$

(7) Cfr. loc. cit. (1), pp. 197-198.

(8) Cfr. la dimostrazione del teor. IX in loc. cit. (1).

(9) Cfr. loc. cit. (1); teor. XI.

Consideriamo l'operatore differenziale del secondo ordine:

$$L(v) \equiv \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(x,t) \frac{\partial^2 v}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^r b_h(x,t) \frac{\partial v}{\partial x_h} + c(x,t)v - \frac{\partial v}{\partial t}.$$

L'operatore:

$$L_0(v) \equiv \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(x,t) \frac{\partial^2 v}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^r b_h(x,t) \frac{\partial v}{\partial x_h} + c(x,t)v$$

sia per ogni t di $(0, T)$ ellittico-positivo ed i suoi coefficienti verifichino in $B(t)$ le ipotesi ammesse per i coefficienti degli operatori ellittici dianzi considerati. In particolare sia $c \leq 0$ in D .

Detto p un numero naturale pari, si consideri l'identità:

$$(4') \quad \int_D \{v^p L^*(w) - w[p(p-1)v^{p-2}\Gamma(v) + pv^{p-1}L(v) + (1-p)cv^p]\} dx dt = \\ = \int_{\mathcal{F}'D} \left\{ pwv^{p-1} \frac{\partial v}{\partial \nu} - v^p \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} - (b - \cos(t, N))w \right] \right\} d\sigma - \\ - \int_{B(0)} v^p w dx + \int_{B(T)} v^p w dx.$$

L^* è l'aggiunto dell'operatore L ; $\Gamma(v)$, b e $\partial/\partial \nu$ sono definiti come nel caso ellittico; N è la normale interna alla frontiera del dominio $B(t)$ di $\pi(t)$; $\mathcal{F}'D$ è la parte della frontiera di D definita dalle condizioni: $x \in \mathcal{F}B(t)$, $0 < t < T$.

Scegliendo la w in modo opportuno, possono dedursi dalla (4') diverse formole di maggiorazione. Notiamone qualcuna. Ad esempio la seguente:

$$(8) \quad \left(\int_D v^p dx dt \right)^{1/p} \leq K_p \left(\int_D |L(v)|^p dx dt \right)^{1/p}.$$

Essa sussiste per ogni v nulla in $B(0) + \mathcal{F}'D$. Si ha:

$$K_p = p \frac{\max_D |w|}{\min_D |L^*(w)|};$$

w è una qualsiasi funzione tale che: $L^*(w) > 0$ in D , $w \leq 0$ in D .

La duale della (8) è la seguente:

$$(8d) \quad \left(\int_D |u|^q dx dt \right)^{1/q} \leq K_p \left(\int_D |L^*(u)|^q dx dt \right)^{1/q}$$

valida per ogni u nulla su $B(T) + \mathcal{F}'D$.

Sia ora $\mathcal{F}'D = \mathcal{F}'_1 D + \mathcal{F}'_2 D$ con $\mathcal{F}'_1 D$ ed $\mathcal{F}'_2 D$ senza punti in comune. Supposto $v = 0$ su $B(0) + \mathcal{F}'_1 D$ e $\partial v / \partial \nu = 0$ su $\mathcal{F}'_2 D$, esista una w tale che:

$w < 0$ in D e $\partial w / \partial \nu - [b - \cos(t, N)] w \geq 0$ su $\mathcal{F}'_2 D$. Se è $c < 0$ in D , dalla (4') si trae:

$$(9) \quad \left(\int_D v^p c w \, dx \, dt \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p - q_0} \left(\int_D \left(\frac{L(v)}{c} \right)^p c w \, dx \, dt \right)^{1/p}$$

essendo q_0 il più piccolo intero tale che:

$$L^*(w) + q_0 c w > c w.$$

Per $p \rightarrow \infty$ si ha:

$$(9') \quad \max_D |v| \leq \max_D \left| \frac{L(v)}{c} \right|.$$

La (9) e la (9') hanno le seguenti come duali:

$$(9d) \quad \left(\int_D |u|^q c w \, dx \, dt \right)^{1/q} \leq \frac{p}{p - q_0} \left(\int_D \left| \frac{L^*(u)}{c} \right|^q c w \, dx \, dt \right)^{1/q},$$

$$(9'd) \quad \int_D |u| \, c \, dx \, dt \leq \int_D |L^*(u)| \, dx \, dt,$$

che sussistono per ogni u verificante le condizioni: $u = 0$ su $B(T) + \mathcal{F}'_1 D$ e $\partial u / \partial \nu - [b - \cos(t, N)] u = 0$ su $\mathcal{F}'_2 D$ ⁽¹⁰⁾.

Vogliamo come ultimo esempio dedurre la duale di una formola di maggiorazione relativa ad una equazione di quarto ordine. Precisamente considereremo la seguente formola di maggiorazione dovuta a Miranda ⁽¹¹⁾:

$$(10) \quad \max_D |\text{grad } v| \leq K \max_{\mathcal{F}D} |\text{grad } v|$$

e relativa ad ogni soluzione dell'equazione biarmonica $\Delta_2 \Delta_2 v = 0$ considerata in un dominio D del piano $x_1 x_2$ limitato da curve chiuse, aventi tangenti e curvature continue.

Detto u un vettore di componenti u_1, u_2 , si ponga:

$$\begin{aligned} L_i^*(u) &= \Delta_2 u_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \\ M_i^*(u) &= - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \frac{dx_i}{dN} + \frac{\partial u_i}{\partial N} \\ (i &= 1, 2). \end{aligned}$$

(10) Teoremi di completezza, quali quelli richiesti per assicurare il sussistere di (8d), (9d) e (9'd) sono stati dimostrati da E. MAGENES, *Sull'equazione del calore: teoremi di completezza ecc.* Note I e II, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », 1952 e: *Aggiunta alla Nota: Sull'equazione del calore ecc.*, Cedam, Padova 1952.

(11) Cfr. C. MIRANDA, *Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili*, « Giorn. di Mat. di Battaglini », 1948-49.

Si ha per ogni funzione v biarmonica in D ed ogni vettore \mathbf{u} nullo su $\mathfrak{F}D$, in opportune ipotesi di regolarità per v e \mathbf{u} :

$$\int_{\mathfrak{F}D} \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} M_1^*(\mathbf{u}) + \frac{\partial v}{\partial x_2} M_2^*(\mathbf{u}) \right] d\sigma = - \int_D \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} L_1^*(\mathbf{u}) + \frac{\partial v}{\partial x_2} L_2^*(\mathbf{u}) \right] dx_1 dx_2.$$

Tale relazione, nel caso attuale, fa l'ufficio della (1), e quindi, tenendo presente che $\text{grad } v$ descrive un sistema completo in un opportuno spazio di vettori continui su $\mathfrak{F}D$, si deduce ⁽¹²⁾:

$$(10d) \quad \int_{\mathfrak{F}D} (|M_1^*(\mathbf{u})|^2 + |M_2^*(\mathbf{u})|^2)^{1/2} d\sigma \leq K \int_D (|L_1^*(\mathbf{u})|^2 + |L_2^*(\mathbf{u})|^2)^{1/2} dx,$$

valida per gli \mathbf{u} nulli su $\mathfrak{F}D$. Essa è la formola duale della (10).

Geometria. — *Sui numeri di Betti delle varietà razionali.* Nota di RALPH H. F. DENNISTON, presentata ^(*) dal Socio B. SEGRE.

1. Nei gruppi di omologia d'una varietà algebrica n -dimensionale (cioè del suo complesso riemanniano, di dimensione reale $2n$), una sottovarietà algebrica qualunque, effettiva o virtuale, determina una classe. Le classi di omologia che possono essere così determinate da sottovarietà si chiamano *algebriche*, e le altre *trascendenti*. Le classi algebriche k -dimensionali costituiscono un sottogruppo libero del gruppo k -esimo di omologia; se k è dispari, il sottogruppo è vuoto.

È stato congetturato ⁽¹⁾ che una varietà razionale, senza punti singolari, sia sempre priva di classi trascendenti. Ciò si sa essere vero nel caso delle curve e delle superficie: *non esiste però alcuna dimensione superiore per cui sia sempre così*, come ora mostreremo. Infatti, se la congettura fosse vera, i numeri di Betti, per cotali varietà, sarebbero sempre nulli per le dimensioni dispari: mentre invece la presente Nota fornisce una serie di casi contrari.

A questo scopo, dimostreremo un teorema — per sé non privo di interesse — relativo a due varietà in corrispondenza birazionale, e soggette ad opportune restrizioni: si rende in tal guisa possibile la determinazione di due dei gruppi di omologia per una delle varietà, e la costruzione di esempi soddisfacenti alle condizioni volute.

2. Enunciamo, per comodità espositiva, certe proprietà di una successione esatta di gruppi abeliani, delle quali omettiamo le semplici dimostrazioni.

(12) Cfr. quanto affermato nella nota (5).

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) Ved., per esempio, C. EHRESMANN, *Sur la topologie de certains espaces homogènes*, « Annals of Math. » (2), 35, 443 (1934).

Si consideri una tale successione

$$\cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow G_4 \rightarrow \cdots$$

Denoti $r(G_i)$ il rango del gruppo abeliano G_i . Secondo la definizione di successione esatta, esiste nel G_i un sottogruppo ch'è simultaneamente l'immagine dell'omomorfismo dalla sinistra ed il nucleo dell'omomorfismo alla destra: denoti $s(G_i)$ il rango di questo sottogruppo.

LEMMA 1.

$$r(G_i) = s(G_i) + s(G_{i+1}).$$

LEMMA 2.

$$r(G_1) - r(G_2) + r(G_3) - \cdots + (-1)^k r(G_{k+1}) = s(G_1) + (-1)^k s(G_{k+1}).$$

LEMMA 3. — Se sappiamo che vale la limitazione

$$r(G_1) - r(G_2) + r(G_3) - \cdots + r(G_{2k+1}) \leq 0,$$

ne possiamo concludere che in essa ha luogo l'uguaglianza, e che

$$s(G_1) = s(G_{2k+1}) = 0.$$

LEMMA 4. — Se $s(G_{i+1}) = 0$, e se G_{i+1} e G_{i+2} sono gruppi liberi, ne segue che G_i è pure libero.

3. TEOREMA. — *Siano V, V' varietà algebriche, irriducibili, n -dimensionali, senza punti singolari, situate in spazi proiettivi complessi. Sia fra loro una corrispondenza birazionale, che non abbia punti fondamentali su V' . Sia W la varietà (non vuota) composta dai punti fondamentali su V , e W' la varietà corrispondente su V' ; sappiamo che la dimensione di W' è $n-1$, mentre quella di W è minore. Supponiamo che V non abbia classi trascendenti di omologia per le dimensioni $2n-2, 2n-3$, e che W' non abbia coefficienti di torsione per la dimensione $2n-3$. Allora si ha che*

$$H_k(V') \cong H_k(V) + H_k(W') \quad (k = 2n-2, 2n-3).$$

(Ciò vuol dire che il gruppo di omologia a primo membro risulta isomorfo alla somma diretta dei due gruppi a secondo membro).

Ed invero, possiamo triangolare i complessi finiti V, V' , in modo che W sia un sottocomplesso di V , di dimensione inferiore a $2n-3$, e che W' sia un sottocomplesso $(2n-2)$ -dimensionale di V' . Poiché i complementi $V-W, V'-W'$ sono omeomorfi, ne risulta che

$$H_k(V) \cong H_k(V, W) \cong H_k(V', W') \cong H_k(V') \quad (k = 2n, 2n-1),$$

$$H_k(V) \cong H_k(V, W) \cong H_k(V', W') \quad (k = 2n-2, 2n-3).$$

Ora, se $q(H_k(M))$, per una varietà algebrica M , denota il rango del sottogruppo di $H_k(M)$ composto dalle classi algebriche, sappiamo ⁽²⁾ che

$$q(H_{2n-2}(V)) + q(H_{2n-2}(W')) = q(H_{2n-2}(V')).$$

Poiché i gruppi $H_{2n-2}(V)$ e $H_{2n-2}(W')$ non contengono classi trascendenti, ne segue che

$$r(H_{2n-2}(V', W')) + r(H_{2n-2}(W')) \leq r(H_{2n-2}(V')).$$

Si consideri ora la successione esatta

$$\begin{aligned} \rightarrow H_{2n-2}(W') \rightarrow H_{2n-2}(V') \rightarrow H_{2n-2}(V', W') \rightarrow H_{2n-3}(W') \rightarrow H_{2n-3}(V') \rightarrow \\ \rightarrow H_{2n-3}(V', W') \rightarrow. \end{aligned}$$

Si vede dal Lemma 3 che

$$r(H_{2n-2}(V', W')) + r(H_{2n-2}(W')) = r(H_{2n-2}(V')),$$

$$s(H_{2n-2}(W')) = s(H_{2n-3}(W')) = 0.$$

Dunque, poiché $H_{2n-2}(W')$ e $H_{2n-2}(V', W')$ sono liberi, il Lemma 4 dimostra che pure $H_{2n-2}(V')$ è libero. Di conseguenza,

$$H_{2n-2}(V') \cong H_{2n-2}(V', W') + H_{2n-2}(W') \cong H_{2n-2}(V) + H_{2n-2}(W'),$$

il che è una delle cose da dimostrare.

D'altra parte, si è già visto che

$$s(H_{2n-3}(W')) = 0;$$

si ha inoltre

$$s(H_{2n-3}(V', W')) = 0,$$

in quanto, in virtù delle ipotesi ammesse, il gruppo qui considerato risulta vuoto. Dunque il Lemma 2 implica che sia

$$r(H_{2n-3}(V')) = r(H_{2n-3}(W')),$$

ed il Lemma 4 che $H_{2n-3}(V')$ sia libero (essendo libero $H_{2n-3}(W')$). Di conseguenza,

$$H_{2n-3}(V') \cong H_{2n-3}(W') \cong H_{2n-3}(V) + H_{2n-3}(W'),$$

ciò che completa la dimostrazione del Teorema.

4. COROLLARIO. - *Dati n, p interi arbitrari, sotto la sola condizione che $n > 2, p > 0$, è possibile costruire una varietà n -dimensionale, razionale, senza punti singolari, il cui numero di Betti per la dimensione $2n - 3$ valga $2p$.*

(2) B. L. VAN DER WAERDEN, *Zur algebraischen Geometrie VI*, § 7 (*Das Verhalten der Schnittpunktzahlen bei gewissen birationalen Abbildungen*), «Math. Ann.», 110, 155-8, (1934-5).

A questo scopo, sia V lo spazio n -dimensionale proiettivo complesso, e W una curva di genere p , senza punti singolari, in V . Sia V' la varietà immagine di V nella dilatazione ⁽³⁾ di base W : questa varietà è priva di punti singolari. Della varietà W' , immagine di W , sono allora noti ⁽⁴⁾ i gruppi di omologia: essi risultano isomorfi a quelli del prodotto topologico di W con uno spazio proiettivo $(n-2)$ -dimensionale. Dunque W' non ha coefficienti di torsione, ed il suo numero di Betti per la dimensione $2n-3$ è $2p$. Secondo il Teorema, questo numero conserverà lo stesso valore anche per V' . Dunque la varietà V' gode delle proprietà desiderate.

Geometria. — Connessioni tensoriali per tensori doppi misti.

Nota di ALDO COSSU, presentata ^(*) dal Socio E. BOMPIANI.

In questa Nota, seguendo un'idea di E. Bompiani ^(*) per la determinazione delle connessioni tensoriali per tensori doppi covarianti e controvarianti, si introducono in modo perfettamente analogo le connessioni tensoriali per tensori doppi misti. Pertanto vengono soltanto enunciati i risultati che sono analoghi a quelli già trovati da E. Bompiani, ponendo in risalto solo le proprietà che sono caratteristiche di questo particolare tipo di connessioni.

I. — DEFINIZIONI E GENERALITÀ.

Sia X_n una varietà regolare, sia x^i ($i = 1, \dots, n$) un sistema ammissibile di coordinate e sia $\xi_k^i(x)$ un campo di tensori doppi misti.

Si consideri la formazione

$$(1.1) \quad D\xi_k^i = d\xi_k^i + E_{rkt}^{is} \xi_s^r dx^t,$$

ove le E_{rkt}^{is} sono n^5 funzioni del punto x della X_n ; essa ha carattere tensoriale solo e soltanto se per una trasformazione regolare delle coordinate $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ ($i' = 1', \dots, n'$) le suddette funzioni si trasformano secondo la legge

$$(1.2) \quad E_{r'k't'}^{i's'} = E_{rkt}^{is} \vartheta_{r'}^r \vartheta_{k'}^k \vartheta_{t'}^t \vartheta_s^{s'} - \vartheta_{r't}^{i'} \delta_{k'}^{s'} \vartheta_{r'}^r \vartheta_{t'}^t + \vartheta_{kt}^{s'} \delta_{r'}^{i'} \vartheta_{k'}^k \vartheta_{t'}^t,$$

ove s'è posto $\vartheta_{r'}^r = \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}$, $\vartheta_{t'}^t = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^r \partial x^t}$ ed essendo δ_k^i il noto simbolo di Kronecker.

(3) B. SEGRE, *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche*, «Ann. di Mat.», (4) 33, 5-48 (1952).

(4) H. GUGGENHEIMER, *Omologia delle dilatazioni*, «Rend. Accad. Lincei», (8), 13-15 (1954).

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) E. BOMPIANI, *Le connessioni tensoriali*, «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. I, fasc. 5, 1946.

In tal caso le E_{rkt}^{is} definiscono un ente geometrico che chiameremo *connessione tensoriale per tensori doppi misti*.

La formazione (1.1) prende il nome di *differenziale tensoriale di ξ_k^i* . Chiameremo inoltre derivata covariante di ξ_k^i l'espressione

$$(1.3) \quad \nabla_t \xi_k^i = \partial_t \xi_k^i + E_{rkt}^{is} \xi_s^r.$$

La $D\xi_k^i = 0$ definisce il trasporto infinitesimale per equipollenza di ξ_k^i dal punto x al punto $x + dx$.

Assegnato quindi nei punti di una linea di X_n un campo di tensori ξ_k^i , questo è un campo di tensori equipollenti se in ogni punto della linea è $D\xi_k^i = 0$.

Considerata una ordinaria connessione vettoriale di parametri L_{rt}^i si ha

$$(1.4) \quad E_{rkt}^{is} = \delta_k^s L_{rt}^i - \delta_r^i L_{kt}^s + Q_{rkt..}^{...is}$$

essendo $Q_{rkt..}^{...is}$ un tensore.

Ma, contrariamente a ciò che accade per le connessioni tensoriali per tensori doppi controvarianti, il tensore $Q_{rkt..}^{...is}$ non è determinato rispetto alla connessione E_{rkt}^{is} della sola connessione vettoriale L_{rt}^i , ma da tutte le T_p -trasformate ⁽²⁾ della L_{rt}^i , cioè dalle connessioni

$$\bar{L}_{rt}^i = L_{rt}^i + \delta_r^i \varphi_t$$

essendo φ_t un arbitrario vettore covariante.

Seguendo E. Bompiani si dirà che la connessione tensoriale è dedotta dalla connessione vettoriale L_{rt}^i se il differenziale tensoriale del generico tensore rispetto alla connessione tensoriale coincide con quello relativo alla connessione vettoriale L_{rt}^i .

Si ha che *condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione tensoriale sia dedotta da una connessione vettoriale incognita è che per il tensore $Q_{rkt..}^{...is}$ definito dalla (1.4) si abbia*

$$Q_{rkt..}^{...is} = \delta_k^s T_{rt..}^{...i} - \delta_r^i T_{kt..}^{...s},$$

essendo ovviamente $T_{kt..}^{...s}$ un tensore.

In tal caso la connessione tensoriale è dedotta dalla connessione vettoriale

$$L_{rt}^{*i} = L_{rt}^i + T_{rt}^i + \delta_r^i \varphi_t$$

essendo φ_t un arbitrario vettore covariante.

(2) E. BORTOLOTTI indica con T_p le trasformazioni di una connessione che conservano il trasporto delle direzioni, si cfr. *Geometria delle varietà a connessione affine*, « Annali di Matematica », ser. IV, t. VIII, 1930-31.

Dalle (1.2) segue che le

$$(1.5) \quad F_{rkt}^{is} = -E_{krt}^{si}$$

sono i parametri di una nuova connessione tensoriale, segue altresì che le

$$(1.6) \quad G_{rkt}^{is} = \frac{1}{2}(E_{rkt}^{is} - E_{krt}^{si}) = \frac{1}{2}(E_{rkt}^{is} + F_{rkt}^{is}) = -G_{krt}^{si}$$

sono i parametri di un'altra connessione tensoriale determinata da quella assegnata.

Le connessioni (1.5) e (1.6) verranno chiamate rispettivamente *coniugata* ed *associata* alla connessione E_{rht}^{is} .

Inoltre le

$$(1.7) \quad \Psi_{rkt..}^{\dots is} = \frac{1}{2}(E_{rkt}^{is} + E_{krt}^{si}) = \Psi_{krt..}^{\dots si}$$

sono le componenti di un tensore, sono anche componenti di un tensore le E_{phl}^{ip} , come si può osservare dalle (1.2) contraendo rispetto agli indici r', s' .

2. SIGNIFICATO GEOMETRICO DEGLI ENTI ASSOCIATI AD UNA CONNESSIONE TENSORIALE.

Si considerino in x i due tensori doppi misti λ_k^i e μ_k^i ed il loro prodotto interno $v_k^i = \mu_h^i \lambda_k^h$. Il tensore $\bar{\lambda}_k^i$, applicato in $x + dx$ ed equipollente a λ_k^i secondo la connessione E_{rht}^{is} , è, a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo,

$$\bar{\lambda}_k^i = \lambda_k^i - E_{rht}^{is} \lambda_s^r dx^t.$$

Analogamente il tensore $\bar{\mu}_k^i$, applicato in $x + dx$ ed equipollente a μ_k^i secondo la connessione H_{rht}^{is} , è

$$\bar{\mu}_k^i = \mu_k^i - H_{rht}^{is} \mu_s^r dx^t.$$

In $x + dx$ a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo si ha

$$\bar{v}_k^i = \bar{\mu}_h^i \bar{\lambda}_k^h = \mu_h^i \lambda_k^h - (E_{rkt}^{ps} \delta_q^i + H_{qrl}^{ip} \delta_k^r) \lambda_s^r \mu_p^q dx^t.$$

Lo scalare v_k^k in x è uguale a \bar{v}_k^k in $x + dx$, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, se è

$$(E_{rqt}^{ps} + H_{qrl}^{ip}) \lambda_s^r \mu_p^q dx^t = 0.$$

Se si vuole che ciò accada per qualunque spostamento dx e per qualunque scelta dei tensori λ_k^i e μ_k^i deve aversi

$$H_{rkt}^{is} = -E_{krt}^{si} = F_{rkt}^{is}.$$

Cioè la connessione H_{rkt}^{is} deve coincidere con la connessione coniugata alla E_{rkt}^{is} .

Si può dare una veste geometrica al risultato osservando che assegnare in x i due tensori misti λ_k^i e μ_k^i equivale a dare due omografie vettoriali, che il prodotto ν_k^i è il prodotto della due omografie e che lo scalare ν_k^k è la traccia della omografia ν_k^i .

Si ha pertanto che assegnate in x due generiche omografie vettoriali λ_k^i e μ_k^i , considerata l'omografia prodotto $\nu_k^i = \mu_h^i \lambda_k^h$ di traccia ν_k^k e l'omografia $\bar{\lambda}_k^i$ equipollente in $x + dx$ alla λ_k^i secondo la connessione E_{rkt}^{is} , la connessione, mediante la quale si deve trasportare l'omografia μ_k^i da x a $x + dx$ affinché in $x + dx$ si ottenga un'omografia $\bar{\mu}_k^i$ tale che il prodotto $\bar{\nu}_k^i = \bar{\mu}_h^i \bar{\lambda}_k^h$ abbia traccia uguale a quella della ν_k^i , è la connessione coniugata alla E_{rkt}^{is} .

Si è in tal modo trovato un significato geometrico per la connessione F_{rkt}^{is} ,

Naturalmente se la connessione E_{rkt}^{is} coincide con la sua associata G_{rkt}^{is} , per la (1.6) si ha ovviamente che, se sono in $x + dx$

$$\bar{\lambda}_k^i = \lambda_k^i - G_{rkt}^{is} \lambda_s^r dx^t$$

e

$$\bar{\mu}_k^i = \mu_k^i - G_{rkt}^{is} \mu_s^r dx^t$$

i tensori equipollenti, secondo la G_{rkt}^{is} , rispettivamente ai tensori λ_k^i e μ_k^i , è sempre, con ovvio significato dei simboli, $\nu_k^k = \bar{\nu}_k^k$.

Anzi questa è una proprietà che caratterizza le connessioni G_{rkt}^{is} soddisfacenti le

$$(2.1) \quad G_{rkt}^{is} = -G_{krt}^{is};$$

si può quindi dire che *se e soltanto se la connessione soddisfa le (2.1), assegnate due qualunque omografie vettoriali, nel loro trasporto infinitesimale per equipollenza si conserva la traccia del loro prodotto.*

Dal punto di vista analitico cioè si ha per le connessioni in questione che è

$$d(\mu_h^k \lambda_k^h) = D\mu_h^k \lambda_k^h + \mu_h^k D\lambda_k^h = 0.$$

Determiniamo il significato geometrico del tensore $\Psi_{rkt...}^{...is}$.

Poiché è, come si può dedurre dalla (1.6) e (1.7),

$$(2.2) \quad E_{rkt}^{is} = G_{rkt}^{is} + \Psi_{rkt...}^{...is},$$

da quanto si è detto precedentemente segue il significato geometrico dell'annullarsi del tensore $\Psi_{rkt...}^{...is}$.

Supponiamo ora che esso non sia nullo e si considerino in x i tensori ξ_k^i e ζ_k^i equipollenti rispettivamente secondo la E_{rkt}^{is} e la sua coniugata F_{rkt}^{is} ad uno

stesso tensore in $x + dx$. Si ha in x a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo, tenendo conto della relazione

$$(2.3) \quad E_{rkt}^{is} = F_{rkt}^{is} + 2 \Psi_{rkt..}^{s..is}$$

$$(2.4) \quad \xi_k'^i = (\delta_k^s \delta_r^i - 2 \Psi_{rkt..}^{s..is} dx^t) \xi_s^r.$$

Le (2.4) rappresentano una corrispondenza tra tensori doppi misti, prossima alla identità, determinata dal tensore $\Psi_{rkt..}^{s..is}$.

Si può verificare facilmente che, se per il generico spostamento dx , si ha $\xi_k'^i = \rho \xi_k^i$ (con ρ scalare arbitrario) deve aversi necessariamente

$$(2.5) \quad \Psi_{rkt..}^{s..is} = \delta_r^i \delta_k^s \psi_t$$

con ψ_t vettore covariante.

Poiché ogni omografia vettoriale tra i vettori della stella di centro x subordina una omografia tra le direzioni della stella, anche la corrispondenza T (2.5) tra omografie vettoriali determina una corrispondenza T' tra le omografie operanti nella stella di direzioni di centro x .

Se la corrispondenza T' è, per il generico spostamento dx , l'identità, allora è verificata la (2.5), e viceversa.

Si consideri in ogni punto della X_n il tensore δ_k^i che rappresenta tra le omografie vettoriali l'identità; come è noto esso determina un campo di tensori equipollenti rispetto ad una qualunque connessione vettoriale. Non così accade se si considera una generica connessione tensoriale.

Si ha infatti che è

$$D\delta_k^i = E_{\rho kt}^{i\rho} dx^t,$$

cioè considerato il campo delle identità vettoriali ed essendo x il generico punto del campo, la omografia vettoriale nella stella di centro x determinata dal tensore

$$\delta_k^i + E_{\rho kt}^{i\rho} dx^t$$

è equipollente alla identità nella stella di centro $x + dx$.

Segue quindi che condizione necessaria e sufficiente affinché il campo delle identità vettoriali sia un campo di tensori equipollenti per una connessione tensoriale è che sia

$$E_{\rho kt}^{i\rho} \equiv 0.$$

3. - TENSORE DI CURVATURA.

Considerato il campo dei tensori ξ_k^i e nel generico punto x del campo i due sistemi di differenziali $d_1 x^i, d_2 x^i$, si ha

$$(D_2 D_1 - D_1 D_2) \xi_k^i = E_{rktu..}^{s..is} \xi_s^r d_1 x^t d_2 x^t,$$

ove è

$$E_{rktu..}^{\dots is} = \partial_u E_{rkt..}^{is} - \partial_t E_{rkn..}^{is} + E_{gku}^{ip} E_{rpt..}^{qs} - E_{gkt..}^{ip} E_{rpu}^{qs}$$

un tensore a cui si darà il nome di *tensore di curvatura*.

Questo tensore è legato, come si può provare facilmente, al trasporto ciclico infinitesimale (3).

Indicato con $G_{rktu..}^{\dots is}$ il tensore di curvatura relativo alla connessione associata G_{rkt}^{is} , si hanno le identità

$$\begin{aligned} G_{rk(tu)..\dots}^{\dots is} &= 0, \\ (3.1) \quad G_{rktu..\dots}^{\dots is} + G_{kr tu..\dots}^{\dots si} &= 0 \end{aligned}$$

da cui segue

$$G_{[rktu]..\dots}^{\dots [is]} = 0.$$

Anche per il tensore $E_{rktu..\dots}^{\dots is}$ sussistono le seguenti identità

$$E_{rk(tu)..\dots}^{\dots is} = 0$$

e per le (2.2) e (3.1)

$$(3.2) \quad E_{rktu..\dots}^{\dots is} + E_{kr tu..\dots}^{\dots si} = 2 (\Delta_u \Psi_{rkt..}^{\dots is} - \Delta_t \Psi_{rku..}^{\dots is})$$

ove si è posto

$$\Delta_u \Psi_{rkt..}^{\dots is} = \partial_u \Psi_{rkt..}^{\dots is} + E_{gku}^{ip} \Psi_{rpt..}^{\dots qs} + E_{grru}^{sp} \Psi_{pkt..}^{\dots iq}.$$

Dalle (3.2) segue inoltre

$$E_{[rktu]..\dots}^{\dots [is]} = 2 \Delta_{[u} \Psi_{rkt]..\dots}^{\dots is}.$$

Si può provare facilmente (4) che anche per le connessioni tensoriali relative a tensori doppi misti l'annullarsi del tensore di curvatura è condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione sia *integrabile*, sia tale cioè da determinare un trasporto per equipollenza indipendente dalla linea di trasporto.

4. PARTICOLARI TRASFORMAZIONI DI UNA CONNESSIONE TENSORIALE.

Come si è già osservato le equazioni

$$(4.1) \quad D\xi_k^i = d\xi_k^i + E_{rkt}^{is} \xi_s^r dx^t = 0$$

determinano la legge di trasporto per equipollenza dei tensori doppi misti.

(3) Il significato geometrico del tensore di curvatura è analogo a quello relativo al tensore di curvatura di una connessione tensoriale per tensori controvarianti, si cfr. A. COSSU, *Alcune osservazioni sulle connessioni tensoriali*, « Rend. di Mat. », fasc. 3-4, p. 388 (1955).

(4) Cfr. A. COSSU, *Sulle connessioni tensoriali integrabili*, in corso di pubblicazione nei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei ».

Poiché, come si è già ricordato, ogni tensore doppio misto applicato in x determina una omografia vettoriale ω_v nella stella con centro in x , che a sua volta individua una omografia ω_d tra le direzioni della stella, segue ovviamente che il trasporto delle omografie ω_v subordina un trasporto per le ω_d .

Poiché però l'omografia ω_d individuata del tensore ξ_k^i è anche individuata da un qualunque altro tensore $\bar{\xi}_k^i$ soddisfacente le

$$(4.2) \quad \xi_k^i = \rho \bar{\xi}_k^{i(s)},$$

si può verificare subito che le (4.1) non sono invarianti rispetto alle (4.2).

Si possono invece considerare le equazioni

$$(4.3) \quad \xi_h^l D \xi_k^i - \xi_k^i D \xi_h^l = 0$$

che determinano la legge di trasporto delle omografie ω_d e che sono invarianti rispetto alle (4.2).

È facile provare, tenendo conto delle (4.3), che le due connessioni E_{rkt}^{is} ed \bar{E}_{rkt}^{is} determinano lo stesso trasporto per le omografie ω_d solo e soltanto se si ha

$$(4.4) \quad \bar{E}_{rkt}^{is} = E_{rkt}^{is} + \delta_r^i \delta_k^s \varphi_t$$

essendo φ_t un arbitrario vettore covariante.

Le (4.4) rappresentano quindi le trasformazioni T_d delle connessioni tensoriali con conservazione del trasporto delle ω_d .

Poiché inoltre si ha dalle (4.4), tra i tensori di curvatura della E_{rkt}^{is} e della sua T_d -trasformata la relazione

$$(4.5) \quad \bar{E}_{rktu..}^{\dots is} = E_{rktu..}^{\dots is} + 2 \partial_{[u} \varphi_{t]},$$

si deduce che la connessione in esame e la sua T_d -trasformata hanno la stessa curvatura se φ_t è il gradiente di una funzione scalare.

In altre parole tra le T_d esistono particolari trasformazioni T_{de} che conservano anche la curvatura; esse sono date dalle (4.4) essendo però φ_t un gradiente arbitrario.

Tra le T_d -trasformate della connessione E_{rkt}^{is} ne esiste una da essa *intrinsecamente determinata in modo invariante rispetto alle* (4.4) i cui parametri sono

$$P_{rkt}^{is} = E_{rkt}^{is} - \frac{2 \delta_r^i \delta_k^s}{n^2} \Psi_{pq t \dots}^{\dots pq}$$

Per essa si ha che il tensore $H_{rkt..}^{\dots is} = \frac{1}{2} (P_{rkt}^{is} + P_{krt}^{is})$ è tale da soddisfare la $H_{pq i \dots}^{\dots pq} = 0$.

(5) Si osservi che ρ è in generale una funzione scalare del punto del campo.

Geometria. — *Sugli jacobiani di funzioni meromorfe sopra una varietà complessa compatta.* Nota di EDOARDO VESENTINI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

In una Memoria di prossima pubblicazione studierò le classi di omologia degli jacobiani di sistemi lineari di divisori effettivi determinati, sopra una varietà complessa compatta, M , di dimensione complessa m , da una o più funzioni meromorfe. Il metodo seguito nella costruzione di tali sistemi jacobiani consiste nell'associare a ciascuna, F , delle funzioni meromorfe date su M , la struttura fibrata dalle forme lineari a coefficienti in un conveniente multiplo della struttura di rette complesse determinata da F in M . La costruzione, con il metodo delle ostruzioni, delle classi caratteristiche fondamentali di Chern delle strutture indicate è complicata dalla presenza dei luoghi di punti di indeterminazione delle funzioni F , cosicché ad un approfondimento della questione occorre premettere uno studio dell'intorno di tali luoghi in M . Le difficoltà di questo studio non vengono sostanzialmente aggravate quando si passi dal caso di una a quello di più funzioni meromorfe. Perciò in questa Nota (1) nella quale verranno delineati, senza dettagli dimostrativi, alcuni dei risultati conseguiti nella Memoria annunciata, basterà che io mi limiti al caso di una sola funzione meromorfa; qui inoltre, sulla scorta delle osservazioni precedenti, preciserò alcuni enunciati contenuti in una mia recente Nota lineea [9] (2).

1. Sia data su M una struttura analitica di rette complesse, \mathcal{F} , avente per fibra la retta complessa, C , e per gruppo strutturale il gruppo moltiplicativo di C (3). Fissato su M un ricoprimento finito sufficientemente sottile $\mathcal{A} = \{U_j\}$ mediante insiemi aperti, ciascuno, U_j , dei quali sia uniformizzato da un sistema di coordinate complesse z_j^α ($\alpha = 1, 2, \dots, m$), \mathcal{F} può essere definita, a meno di un'equivalenza, da un sistema di funzioni di transizione $f_{kj} = f_{kj}(z)$, definite ed olomorfe in $U_j \cap U_k$ e tali che: $f_{kj} f_{jk} = 1$ in $U_j \cap U_k$, $f_{kj} f_{jl} f_{lk} = 1$ in $U_j \cap U_k \cap U_l$.

Denotando con \mathcal{B} la struttura fibrata dai vettori *covarianti* su M , sia $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ la struttura fibrata dalle forme differenziali di tipo $(1, 0)$ a coefficienti in \mathcal{F} ([2], n. 2); $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ ha per fibra uno spazio vettoriale complesso, C_m , di dimensione m , per gruppo strutturale il gruppo lineare complesso $GL(m, C)$,

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) Parte dei risultati qui esposti ha formato oggetto di una mia comunicazione al V Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Pavia, ottobre 1955).

(2) I numeri in parentesi quadre rinviano alla Bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

(3) Per la nomenclatura relativa alle strutture di rette complesse (complex line bundles), ci riferiremo a quella introdotta da Kodaira; cfr. ad esempio [2].

ed è tale che, essendo $j\zeta_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) le coordinate complesse nella fibra $C_{m,z}$ uscente da un punto $z \in U_j$, qualora sia $z \in U_j \cap U_k$, le coordinate $j\zeta_\alpha, k\zeta_\beta$ ($\beta = 1, 2, \dots, m$) di un medesimo punto di $C_{m,z}$ sono legate dalle relazioni

$$k\zeta_\beta = f_{kj} \frac{\partial \zeta_j^\alpha}{\partial \zeta_k^\beta} j\zeta_\alpha.$$

Essendo $c_i \in H^{2m-2i+2}(M)$ ⁽⁴⁾ la i -esima classe caratteristica fondamentale di coomologia di Chern, di dimensione $2m - 2i + 2$ ($i = 1, 2, \dots, m$), della struttura fibrata dai vettori complessi (contravarianti) tangenti a M , la i -esima classe caratteristica fondamentale di \mathfrak{B} — o meglio della struttura sferica unitaria equivalente a \mathfrak{B} in $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$ — coincide, come è noto, con $(-1)^{m-i+1} c_i$. Denotando con $c^2(\mathfrak{F}) \in H^2(M)$ la classe caratteristica di \mathfrak{F} , la classe caratteristica, $c_*(\mathfrak{F}) \in H^{2m}(M)$, della struttura sferica unitaria equivalente a $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$ in $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$ è espressa dalla relazione

$$(1) \quad c_*(\mathfrak{F}) = (c^2(\mathfrak{F}))^m + \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i+1} (c^2(\mathfrak{F}))^{i-1} c_i,$$

ove gli indici fuori parentesi denotano degli esponenti ed i prodotti sono dei cup-products sull'anello degli interi.

Se $m > 1$, la (1) può essere ottenuta fissando anzitutto una triangolazione (finita) sufficientemente sottile di M , ed osservando che nella proiezione di Hopf $\Sigma^{2m-1} \rightarrow P_{m-1}$ di una $(2m-1)$ -sfera Σ^{2m-1} sopra uno spazio proiettivo complesso P_{m-1} di dimensione complessa $m-1$, ogni coppia di sezioni in \mathfrak{B} ed in $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$, prive di singolarità sullo scheletro M^{2m-1} di dimensione $2m-1$ della triangolazione fissata, induce due sezioni, prive di singolarità su M^{2m-1} , nello spazio fibrato dagli elementi lineari covarianti su M , avente per fibra-tipo P_{m-1} . Determinando la 2-cocatena differenza, nel senso di Hopf, delle due sezioni considerate, si prova che essa è un cociclo e che la sua classe di coomologia coincide con $c^2(\mathfrak{F})$. Da una relazione di Kundert segue la (1) ⁽⁵⁾. Nel caso $m = 1$ la (1) discende immediatamente dal teorema di esistenza delle strutture fibrate ([9], n. 3, pp. 489-490).

2. Supponiamo $m > 1$, e sia S un'ipersuperficie analitica-complessa, irriducibile e non singolare di M , cioè una varietà complessa (compatta) di dimensione $m-1$, regolarmente immersa in M , in guisa che nell'intorno di ogni punto $z \in S \cap U_j$ sia possibile introdurre un sistema di coordinate locali z_j^α annullantisi in z e tali che S sia rappresentata in U_j dall'equazione

(4) La coomologia considerata in M è la coomologia di Čech a supporti compatti ed a coefficienti interi (secondo la nomenclatura di H. Cartan).

(5) La dimostrazione testé appena accennata generalizza una dimostrazione esposta nel n. 2 (pp. 489-490) della Nota [9], alla quale rinviamo anche per le indicazioni bibliografiche. Il risultato in questione verrà acquisito per altra via nella Memoria annunciata.

$z_j^m = 0$, e z_j^1, \dots, z_j^{m-1} siano coordinate locali in $S \cap U_j$. Supponiamo che esista su M una funzione meromorfa, F , multipla di $-S$, cioè tale che, denotando con $F_j(z) = \frac{\psi_j(z)}{\varphi_j(z)}$ la rappresentazione locale di F in U_j come quoziente di due funzioni $\psi_j = \psi_j(z)$ e $\varphi_j = \varphi_j(z)$, olomorfe e prive di divisori comuni nell'anello delle funzioni olomorfe in U_j , $\varphi_j(z) = 0$ sia un'equazione minimale ⁽⁶⁾ di S . I luoghi dei punti di livello costante di F sono delle ipersuperficie analitiche complesse di M , i cicli fondamentali delle quali, muniti dell'orientazione naturale indotta dalla struttura complessa considerata su M , sono omologhi al ciclo fondamentale di S . Denotando con lo stesso simbolo S la classe di omologia di tale ciclo in M , faremo le seguenti ipotesi sulla funzione F ⁽⁷⁾:

1° ogni ipersuperficie di livello costante di F è irriducibile;

2° il luogo L dei punti di indeterminazione di F è una sottovarietà non singolare, di dimensione (complessa) $m - 2$, regolarmente immersa in M (cioè rappresentabile localmente annullando due delle m coordinate locali su M), avente classe di omologia $S^2 = S \cdot S \in H_{2m-4}(M)$. Nell'intorno di ogni punto di indeterminazione appartenente a $U_j \cap L$, F può essere rappresentata

localmente dalla $F_j = \frac{z_j^{m-1}}{z_j^m}$;

3° ogni altro punto singolare di F è un punto doppio ordinario per l'ipersuperficie di livello passante per esso;

4° ogni ipersuperficie di livello di F ha al più un punto doppio ordinario.

I punti nei quali risulta $\varphi_j^2 \frac{\partial F_j}{\partial z_j^\alpha} = 0$, per $\alpha = 1, 2, \dots, m$, sono tutti e soli i punti di L ed i punti singolari considerati in 3°. Deformando la triangolazione considerata nel n. 1 in guisa che lo scheletro M^i , di dimensione $i=3$, di M sia disgiunto da L ⁽⁸⁾, gli m scalari $\varphi_j^2 \frac{\partial F_j}{\partial z_j^\alpha}$ danno luogo alla forma differenziale $\varphi_j^2 \frac{\partial F_j}{\partial z_j^\alpha} dz_j^\alpha$, priva di punti stazionari su M^3 ⁽⁹⁾ ed a coefficienti nella struttura di rette complesse \mathfrak{F} definita dalle funzioni di transizione

$$f_{kj} = \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_j} \right)^2.$$

Poiché la classe di omologia duale della classe caratteristica $c^2(\mathfrak{F})$ di \mathfrak{F} è $2S$ ([3]), dalla (1) discende che, denotando con il medesimo simbolo M la

(6) Con questa locuzione si intende, come è noto, che, per ogni altra equazione locale $\lambda_j(z) = 0$ di S , il quoziente $\lambda_j(z)/\varphi_j(z)$ sia olomorfo in U_j .

(7) Ipotesi analoghe sono state fatte da Hirzebruch, nel caso $m = 2$, nel n. 3.4 di [1] (p. 121).

(8) La considerazione dello scheletro di dimensione tre è dettata dal ricorso alla struttura fibrata da P_{m-1} ; cfr. in proposito il n. 1 di [9].

(9) Ricordiamo che dicesi punto stazionario di una forma differenziale ogni punto nel quale si annullino tutti i coefficienti della forma stessa.

classe di omologia del ciclo fondamentale di M , l'indice di Kronecker, $\mu = I(c_*(\mathcal{F}), M)$, dello o-ciclo $c_*(\mathcal{F}) \cap M$ è offerto dalla relazione

$$(2) \quad \mu = 2^m I(S^m) + \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i+1} 2^{i-1} I(S^{i-1} C_{2i-2}),$$

ove $C_{2i-2} \in H_{2i-2}(M)$ è la classe di omologia duale di c_i , ed $I(\dots)$ denota al solito l'indice di Kronecker di uno o-ciclo immagine dell'intersezione delle classi di omologia scritte fra parentesi.

Deformando eventualmente la triangolazione considerata nel n. 1 in guisa che nessuno dei punti singolari considerati in 3° giaccia in M^{2m-1} , si dimostra che ciascuno di tali punti porta contributo eguale a +1 al primo membro di (2).

Se $m = 2$ anche il luogo L si riduce ad un numero finito di punti, i quali portano contributo complessivamente eguale a $I(S^2)$ in (2). Ne consegue che il numero ν delle ipersuperficie di livello costante di F dotate di punto doppio è, nel caso $m = 2$, espresso dalla relazione

$$(3) \quad \nu = 3 I(S^2) - 2 I(SC_2) + \chi(M)^{(10)},$$

ove $\chi(M)$ è la caratteristica di Eulero-Poincaré di M .

3. Se $m > 2$, la dimensione (complessa) $m - 2$ di L è > 0 , sicché non è possibile costruire una triangolazione di M tale che M^{2m-1} sia disgiunto da L . Ma in questo caso si può procedere nel modo seguente. Fissata in M una metrica hermitiana definita positiva, rispetto alla quale il gruppo di struttura di \mathcal{B} si riduca al gruppo unitario $U(m)$, costruiamo mediante essa l'intorno tubolare⁽¹¹⁾ di raggio sufficientemente piccolo di L in M . Questo intorno è uno spazio fibrato, A' , di base L , avente per fibre le sfere piene aperte, di dimensione (reale) 4, riempite dalle geodetiche uscenti normalmente dai punti di L . Assumendo il raggio dell'intorno considerato tanto piccolo che tutti i punti doppi isolati considerati in 3° ed in 4° siano interni alla varietà a bordo $M - A'$, e tenuto conto del penultimo capoverso del n. 2, si ha che il numero ν delle ipersuperficie di livello dotate di punto doppio eguaglia l'indice di Kronecker del ciclo fondamentale relativo di $M - A'$ e dell'immagine di $c_*(\mathcal{F})$ nell'omomorfismo $j^*: H^{2m}(M) \rightarrow H^{2m}(M - A')$ associato all'immersione identica $j: M - A' \rightarrow M$. Pertanto, per determinare ν basta sottrarre da $c_*(\mathcal{F})$ l'immagine nell'omomorfismo $i^*: H^r(A') \rightarrow H^r(M)$ (associato all'immersione identica $i: A' \rightarrow M$), della classe di coomologia, $k^{2m} \in H^{2m}(A')$, dell'ostacolo primario alla estensione in A' della sezione determinata da $\varphi_j \frac{\partial F_j}{\partial z_j^\alpha} dz_j^\alpha$ sul

(10) Questo risultato, ben noto per le curve di un fascio sopra una superficie algebrica, è stato ottenuto, nel caso da noi considerato, da Hirzebruch ([1], n. 3.4, p. 121).

(11) Per la definizione di intorno tubolare cfr. ad esempio [8], p. 21.

bordo di $M - A'$. Relativamente a quest'ultima classe di coomologia, si dimostra che

k^{2m} è l'immagine nell'isomorfismo di Thom $\varphi^*: H^r(L) \rightarrow H^{r+4}(A')$ ([7], théor. I.2, p. 125) della classe caratteristica fondamentale $h^{2m-4} \in H^{2m-4}(L)$ della struttura fibrata dalle forme differenziali di tipo $(1, 0)$ di L a coefficienti nella restrizione, $\mathfrak{F}|L$, di \mathfrak{F} a L .

Poiché da un risultato di Thom ([7], théor. I.8, p. 133) consegue che l'immagine $i^* k^{2m} = i^* \varphi^* h^{2m-4}$ è l'immagine di h^{2m-4} nell'omomorfismo di Gysin $H^{2m-4}(L) \rightarrow H^{2m}(M)$, associato all'immersione identica $f: L \rightarrow M$, in base alle note proprietà moltiplicative di tale omomorfismo si ha pertanto che

$$(4) \quad \nu = I(c_*(\mathfrak{F}), M) - I(h^{2m-4}, L),$$

ove L denota la classe di omologia del ciclo fondamentale di L . Il numero $\mu = I(c_*(\mathfrak{F}), M)$ che compare nella (4) è offerto dalla (2), mentre per determinare $I(h^{2m-4}, L)$ basta ripetere per L e per la restrizione $\mathfrak{F}|L$ le considerazioni accennate nel n. 2 per M e per \mathfrak{F} , giungendo così ad una relazione, analoga alla (1), nella quale compaiono, in luogo di $c^2(\mathfrak{F})$ e di c_i , la classe caratteristica $c^2(\mathfrak{F}|L)$ di $\mathfrak{F}|L$ e le classi di Chern della struttura fibrata dai vettori complessi controvarianti tangenti a L . Tenuto conto che

$$f_*(c^2(\mathfrak{F}|L) \cap L) = S^3,$$

e determinando le classi di Chern di L mediante un teorema di Whitney (cfr. ad esempio [10], théor. 15, p. 85), si ottiene infine la relazione

$$(5) \quad \nu = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} (i+1) I(C_{2i}, S^i) \quad (C_{2m} = M), I(C_0) = \chi(M) \quad (12),$$

che per $m=2$ coincide con la (3).

4. Le considerazioni che hanno condotto alla (5) sono suscettibili di ampie generalizzazioni e permettono di determinare, sopra la varietà complessa compatta M , le classi di omologia delle sottovarietà complesse di dimensione complessa $1, \dots, m-1$, luoghi dei punti di contatto delle ipersuperficie di livello costante di $2, \dots, m$ funzioni meromorfe su M , (supposte esistenti e) soddisfacenti a condizioni di generalità analoghe a quelle indicate nel n. 2. Da questi risultati, dei quali ci occuperemo diffusamente nella Memoria annunciata, è possibile dedurre inoltre, specificando ulteriormente la natura delle funzioni meromorfe considerate, delle relazioni - analoghe a quelle ormai classiche, stabilite da F. Severi, B. Segre, M. Eger e J. A. Todd per le varietà algebriche immerse in uno spazio proiettivo - fra le classi di

(12) Nel caso in cui M sia una varietà algebrica, la (5) è stata ottenuta per la prima volta, con metodo algebrico geometrico, per $m=3$ da B. Segre e per m qualsiasi da M. Eger e J. A. Todd (cfr., anche per le indicazioni bibliografiche, [4]).

omologia degli jacobiani di sistemi lineari di divisori effettivi di M e le classi di Chern di M .

Ma le considerazioni suddette, consistenti essenzialmente — come abbiamo visto nel n. 3 — nell'esclusione da M di un'opportuna sottovarietà L e nello studio della varietà a bordo residua ad un intorno tubolare di L , sono suscettibili di altre applicazioni. Esse possono venire utilizzate, come si vedrà in un prossimo lavoro, nella trattazione di altre questioni, ad esempio lo studio dei punti stazionari isolati di forme olomorfe semplici o $(m-1)$ -ple su M , l'insieme dei punti stazionari delle quali consti di una varietà complessa compatta, N , di dimensione complessa n ($0 < n < m$), regolarmente immersa in M , e di un numero finito di punti stazionari isolati. Relativamente a questo problema, consideriamo il caso in cui la forma olomorfa τ sia semplice, ed N sia una qualsiasi sottovarietà complessa, T (eventualmente anche singolare), di M , di dimensione $n = m - 1$, cioè il caso in cui la rappresentazione locale τ_j di τ in U_j sia del tipo

$$\tau_j = {}_jG {}_jA_\alpha dz_j^\alpha,$$

ove ${}_jG$ e ${}_jA_\alpha$ sono olomorfe in U_j , e ${}_jG = 0$ è un'equazione minimale di T . Per una forma siffatta abbiamo stabilito in [9] una formula (la (7)) la quale dà, secondo quanto abbiamo affermato a p. 492, il « numero ⁽¹³⁾ dei punti stazionari isolati » di τ . Ma l'espressione « punto stazionario isolato » viene usata in questo caso impropriamente, in quanto, come risulta dal n. 1 di [9], la citata formula (7) fornisce gli zeri (isolati) comuni alle m funzioni olomorfe ${}_jA_\alpha$, *potendo benissimo accadere che taluni di essi appartengano a T* . Questa possibilità è suffragata dal seguente esempio.

Sia M una superficie algebrica sulla quale esista un integrale semplice di prima specie, $\int \omega$, dotato di un insieme, non vuoto e finito, di punti stazionari; il numero ⁽¹³⁾ di tali punti eguaglia, come è ben noto, la caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(M)$ di M . Supponiamo che ciascuno di tali punti figuri con molteplicità eguale a 1 nel numero complessivo $\chi(M)$, e, fissato uno, P , di essi, applichiamo a M una trasformazione birazionale, σ_P , avente su M un solo punto fondamentale, coincidente con P ⁽¹⁴⁾. L'immagine di P nella superficie trasformata $\sigma_P M$ è (birazionalmente) equivalente ad una retta complessa, T , regolarmente immersa in $\sigma_P M$, mentre la trasformazione σ_P è biuni-

(13) Ovviamente, nel computo di questo numero, ciascuno, $z \in U_j$, di tali punti deve essere contato con molteplicità eguale alla *caratteristica* del sistema di funzioni ${}_jA_\alpha$ sul ciclo fondamentale di una $(2m-1)$ -sfera tracciata in U_j con centro z e raggio sufficientemente piccolo; cfr. ad esempio [5], n. 104, pp. 283-285.

(14) Una trasformazione siffatta può essere ottenuta applicando una *dilatazione* di centro P ad un modello proiettivo non singolare di M (cfr. ad esempio i numeri 12 e 16' di [4]), e può essere realizzata, anche sopra una qualsiasi varietà complessa compatta (non necessariamente algebrica), con il cosiddetto processo σ di Hopf (cfr. ad esempio [1], n. 2.3, pp. 117-118).

voca fra $M - P$ e $\sigma_p M - T$. Ne consegue che la forma τ , olomorfa su $\sigma_p M$, trasformata di ω mediante σ_p , ha su $\sigma_p M$ un insieme di punti stazionari costituito dai punti di T e dai $\chi(M) - 1$ punti di $\sigma_p M$ trasformati mediante σ_p dei $\chi(M) - 1$ punti stazionari di ω su F , distinti da P . D'altra parte, dalla (7) di [9] si ha facilmente che il numero degli zeri (isolati) comuni alle funzioni jA_α che figurano nella rappresentazione locale di τ è eguale a

$$\chi(\sigma_p M) = \chi(M) + 1,$$

sicché, come può indursi anche dal n. 8 (p. 282) di [6], due di tali zeri isolati appartengono a T .

Ad analoghe osservazioni si prestano le formule stabilite alle pp. 491-494 di [9], per i luoghi di punti stazionari di forme o di sistemi di forme olomorfe o meromorfe, semplici o $(m - 1)$ -ple. Ma su tali questioni ritorneremo sistematicamente in un prossimo lavoro.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. HIRZEBRUCH, *Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen*, « Journ. reine ang. Math. », 191, 110-124 (1953).
- [2] K. KODAIRA, *On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux*, « Proc. Nat. Acad. Sci. USA », 39, 865-868 (1953).
- [3] K. KODAIRA e D. C. SPENCER, *Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties. Divisor class groups on algebraic varieties*, « Proc. Nat. Acad. Sci. USA », 39, 868-877 (1953).
- [4] B. SEGRE, *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche*, « Ann. di Mat. », (4) 35, 1-128 (1953).
- [5] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, vol. II (in corso di stampa).
- [6] F. SEVERI, *La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica*, « Comment. Math. Helv. », 4, 268-326 (1932).
- [7] R. THOM, *Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod*, « Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. », (3), 69, 109-182 (1952).
- [8] R. THOM, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, « Comment. Math. Helv. », 28, 17-86 (1954).
- [9] E. VESENTINI, *Sui punti stazionari di forme meromorfe sopra una varietà complessa compatta*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), 18, 486-494 (1955)⁽¹⁵⁾.
- [10] WU W. T., *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques*, « Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg. », n. 11 (Hermann et Cie., Paris, 1952).

(15) *Errata-corrige* di [9]: a p. 490 - quarta riga dal basso - in luogo di: $\leq r - 2$, leggi: $\leq m - 2$; a p. 492 - quindicesima riga dall'alto - in luogo di: *in ogni caso risulta* $I(T^2) = 0$, e vale ..., leggi: *nel primo caso risulta* $I(T^2) \leq 0$, e *nel secondo vale* ...

Topologia. — *Un indice dei punti uniti*^(*). Nota I di D. G. BOURGIN, presentata ^(**) dal Socio MAURO PICONE.

Questa è la prima di una serie di Note sugli indici delle trasformazioni e prepara la base per i metodi e per i risultati fondamentali. Nella seconda Nota l'indice è rispetto ad un insieme aperto per uno spazio ANR o LC^* . Un resoconto dell'Autore [1] menziona Leray [2] e Browder [3] a questo proposito. Leray tratta la questione in un modo differente. La nostra definizione è analoga a quella di Browder che non riuscì a stabilirne l'invarianza che è prevista nel teorema centrale 2. Nella seguente pubblicazione i nostri metodi sono nello spirito di quelli di Lefschetz [4], [5] per argomenti connessi.

Stabiliamo qualche convenzione e definizione. Queste saranno seguite anche nei nostri altri articoli. Gli spazi occorrenti sono spazi di Hausdorff compatti e connessi e sono indicati con X , con punti x . Le applicazioni sono sempre supposte continue. Il *contorno* di un insieme A è scritto \bar{A} . Il complemento di un insieme A è indicato con un apice, cioè A' . Useremo le lettere greche minuscole per i ricoprimenti finiti aperti con l'ordinamento definito da $\alpha < \beta$ se β raffina α . Gli insiemi aperti o elementi di α sono scritti a_i . Il nervo di un ricoprimento è un complesso euclideo ed è indicato dalla lettera latina minuscola corrispondente, cioè a è il nervo di α . I punti di a sono scritti y . Il vertice di a corrispondente ad a_i è indicato da (a_i) . Usiamo il simbolo St per stella nel senso algebrico sia in α che in a ma il contesto impedisce confusione. Useremo la notazione $\bar{\sigma}$ per entrambe le chiusure, algebrica e topologica, di un simpleso σ . Se β è un ricoprimento e L è un sotto complesso del complesso finito K contenente tutti i vertici di K , allora β è una *maglia della realizzazione parziale* di L mediante q se per ciascuno simpleso di K l'applicazione delle facce in L è contenuta in un singolo elemento di β . Una omotopia è *su* α se per qualsiasi punto l'orbita sotto l'omotopia si trova in un elemento di α . R è il simbolo di una retrazione e I o I_A indicano il segmento unitario. Il parallelotopo $P = P\{A\}$ I_A dove l'insieme $\{A\}$ è arbitrario e non necessariamente numerabile.

Lo spazio X è di solito considerato essere un NR in un parallelotopo (o più generalmente quello dell'osservazione (1)). La proprietà LC^* è che per ogni α c'è un β tale che per qualsiasi parziale realizzazione di un complesso finito con una maglia β vi è una *piena realizzazione* (full realization), con una maglia α . Chiamiamo d una *maglia-estensione* per β e scriviamo $\alpha \overset{e}{<} \beta$. Scriviamo Q_a per una *applicazione canonica* di X in a .

I gruppi di omologia di Čech, $H_n(X)$, sono sempre sopra i numeri razionali. Scriviamo $H(X)$ per la somma diretta $\Sigma H_n(X)$. I caratteri in

(*) Ringrazio la « United States Air Force » delle sovvenzioni da essa avute per la preparazione di questo lavoro.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

grassetto per le lettere servono per distinguere fra l'applicazione di X in X e gli omeomorfismi indotti sui gruppi di catene, di cicli e di omologia. Se $f: X \rightarrow X$ allora f è l'omeomorfismo indotto. Inoltre, se p_b^a è la trasformazione proiezione da b in a , allora p_b^a rappresenta non solamente l'omeomorfismo indotto sul gruppo di catene sopra b in quello sopra a , ma anche rappresenta gli omeomorfismi dei gruppi di cicli e inoltre i gruppi di omologia. Usiamo i per l'applicazione identica $ix = x$. Diremo che q_b è una applicazione *co-canonica* sopra α o più semplicemente *un'applicazione co-canonica* se $q_b Q_b \simeq i$ sopra α .

Supponiamo che f applichi il complesso euclideo finito, K , in K . Sia O aperto in K senza punti uniti di f su \bar{O} . Sia 1K una suddivisione di K e 2K una suddivisione di 1K .

Sia Sd l'operazione di suddivisione che sostituisce σ in 1K con la somma catenante dei semplici di 2K orientati consistentemente nella suddivisione di quella. Sia F un'approssimazione simpliciale a f su 2K a 1K [6]. Scriviamo $f = F Sd$ per l'omeomorfismo catenante delle catene orientate di 1K a 2K . Sia $f^i \sigma_n^i = \sum_j t_j^i(n) {}^i \sigma_n^j$, ${}^i \sigma_n^j \in {}^1K$. Introduciamo ${}^1O = St(O, {}^1K)$. Finalmente definiamo

$$(A) \quad \Lambda(f, o) = \sum (-1)^n \sum_{i \sigma_n^i \in {}^1O} t_i^i(n).$$

Con suddivisione abbastanza raffinata, 1K e 2K , Λ è indipendente dalle suddivisioni e dalla scelta dell'approssimazione simpliciale.

Ci sono approssimazioni simpliciali, $\{F\}$, tanto vicine a f quanto si vuole che hanno solamente punti uniti regolari, $\{x_\alpha\}$ e per ogni tale F

$$({}^1A) \quad \Lambda(f, o) = \sum_{x_\alpha \in O} (-1)^s j_s(x_\alpha)$$

dove $j_s(x_\alpha)$ è l'indice di F rispetto al punto x_α e s è la dimensione di una sfera aperta omeomorfa a un intorno di x_α [1, p. 232].

LEMMA O. - Per un arbitrario α vi è una β tale che ogni coppia di punti in un elemento b_i di β può essere unito da una pista (path) unica in qualche elemento a_j di α , $j = j(i)$.

Sia G un intorno di X in P per il quale vi è una ritrazione R . Supponiamo che $N(\alpha)$ estenda α in G cioè $N(\alpha) = \{N(a_i) \mid N(a_i) \cap X = a_i, N(a_i) \text{ aperto in } G\}$. Allora sia $M = \{M_j\}$ un aggregato finito di insiemi convessi aperti in P ricoprenti X , ciascuno contenuto in un elemento di $N(\alpha)$. Allora $\delta = \{d_i \mid d_i = M_i \cap X\}$ è un ricoprimento con una estensione convessa M . Usiamo questo ricoprimento δ , invece dell'originale α . Sia $O = \cup M_i$. Per ogni x c'è un convesso $\sqcup x$ contenuto in un elemento di M per il quale $R \sqcup x$ e $\sqcup x \cap X$ sono nello stesso insieme d_i di δ . Invero prendiamo un insieme aperto Vx , includendo x , in d_i . Allora $\sqcup x$ è qualsiasi insieme convesso aperto in $(R^{-1} Vx) \cap M_i$. Per la compattezza di X vi è un ricoprimento di X da $\{\sqcup_j \mid \sqcup_j = \sqcup x_j, j = 1, \dots, N\}$. Allora $\beta = \{b_j \mid b_j = \sqcup_j \cap X\}$ è un ricoprimento aperto. Se x_1 e x_2 sono una coppia arbitraria in b_j , il segmento retto L che unisce x_1 e x_2 si trova in \sqcup_j e perciò RL si trova in un insieme $d_i \subset a_k$ ed è la pista unica da x_1 ad x_2 menzionata nel teorema. Diremo che α è il *ricoprimento orbitale* per β e scriveremo $\alpha \overset{\circ}{\leq} \beta$. Evidentemente le piste variano in un modo continuo al variare di x_1 e x_2 .

LEMMA 1. — *X una NR di P implica X è LC*.*

Seguiamo la dimostrazione del lemma o fino alla definizione di β inclusa. Supponiamo adesso che L sia denso in K e $q(L \cap \bar{\sigma}_n) \subset b_j$. Sia C_n l'involucro convesso di $q(L \cap \bar{\sigma}_n)$. Allora $C_n \subset \sqcup_j$. Supponiamo tutte le facce m dimensionali di $\bar{\sigma}_n$ siano applicate in \sqcup_j . Consideriamo una faccia $m+1$ dimensionale, $\bar{\sigma}_{m+1}$. Allora $q\bar{\sigma}_{m+1} \subset \sqcup_j$. Scegliamo un punto arbitrario z in C_n e costruiamo il giunto (join) $zq\bar{\sigma}_{m+1}$ che, per la convessità, è ancora in \sqcup_j . L'applicazione di $\bar{\sigma}_{m+1}$ su $zq\bar{\sigma}_{m+1}$ procede prendendo un punto arbitrario interno, y_0 , di $\bar{\sigma}_{m+1}$ come corrispondente di z ed applicando il segmento $[y_0, y]$ baricentricamente su $[z, qy]$. Continuando in questo modo si ottiene un'applicazione q di σ_n in \sqcup_j . Perciò $Rq\sigma_n \subset R\sqcup_j \subset d_i$. In breve β ha δ per una maglia estensione e segue che X è LC*.

Osservazione (1): nel seguito possiamo eliminare la condizione che X sia una NR di P senza perdere qualche risultato se aggiungiamo come postulati sullo spazio il lemma o ed il lemma 1.

LEMMA 2. — *Per α arbitrario c'è una co-canonica applicazione q_b su α per tutti $\beta_0 < \beta$.*

Introduciamo raffinamenti seguendo il seguente schema:

$$\alpha <_1 \alpha <_2 \alpha <_1 \beta <_1 \beta.$$

Seguiamo [5, p. 88, Lemma 9.1] e assegnamo al vertice (b_i) un punto arbitrario di b_i . Allora i vertici di un semplice di b vanno in un solo elemento di ${}_1\beta$. Allora vi è una piena realizzazione con maglia α . Chiamiamo questa applicazione q_b . Sia Q_b l'applicazione canonica in b . Questo implica che se $x \in b_i$ allora $Q_b x \in \text{St}(\bar{b}_i)$. Allora $q_b \text{St}(\bar{b}_i) \subset \text{St}_2 a_j \subset {}_1 a_k$. Si capisce $b_i \cap {}_2 a_j = \Phi$ e perciò $b_i \subset {}_1 a_k$. Questo significa che per x arbitrario i punti x e $q_b Q_b x$ sono in un insieme di ${}_1 \alpha$ e perciò sono omotopici su α .

Osservazione (2): in questo articolo le applicazioni co-canoniche saranno derivate come sopra con conseguenza che per un ricoprimento δ , $q_d(d_i) \subset d_i$. Perché le applicazioni co-canoniche esistono per segmenti $\beta < \beta_0$ supponiamo tacitamente che tutti i ricoprimenti considerati soddisfano la condizioni che il q associato sia co-canonica.

Sia $\lambda_b^a = Q_a q_b$ su $b \rightarrow a$. Scriviamo p_b^a , $\alpha < \beta$, per l'usuale semplice proiezione applicazione (inclusione). Dal lemma 2 segue, in virtù della osservazione 2,

LEMMA 3. — *Per δ , $\beta > \beta_0$, $\lambda_b^a \lambda_d^b \simeq \lambda_d^a$. In particolare $\lambda_d^b \lambda_b^a \simeq \lambda_b \simeq \lambda_b^b \lambda_b^b$.*

Supponiamo $h: X \times I \rightarrow X$ con $h(, 0) = q_b Q_b$ e $h(, 1)$ l'identità. Allora $Q_a(, s) q_d$ definisce una omotopia. Forse sarebbe possibile dimostrare, come nel caso di uno spazio metrico, che X è uno quasi complesso ma in ogni modo il Lemma 3, che indica una proprietà più debole e sufficiente per tutti i nostri sviluppi.

LEMMA 4. - $p_b^a Q_b \simeq Q_a$ se $a < b$.

p_b^a applica ogni vertice (b_i) di $\overline{\sigma_b(x)}$ in un vertice (a_j) dove $x \in b_i \subset a_j$. Conseguentemente $p_b^a \overline{\sigma_b(x)}$ è un simpleso chiuso (perché p_b^a è lineare), che è una faccia di $\overline{\sigma_a(x)}$. Ora $Q_b(x) \in \overline{\sigma_b(x)}$. Allora $p_b^a Q_b(x) \in \overline{\sigma_a(x)}$. Perciò $p_b^a Q_b(x)$ è un'applicazione canonica. Perché tutte le applicazioni canoniche in a sono omotopiche, $p_b^a Q_b \simeq Q_a$.

LEMMA 5. - $Q_b H(X) \rightarrow H(b)$ è un isomorfismo in; $q_b H(b) \rightarrow H(X)$ è un isomorfismo su.

L'applicazione $q_b Q_b \simeq i$ (cfr. osservazione (2)) implica che l'isomorfismo indotto $q_b Q_b$ è l'isomorfismo identico e questo dà il lemma immediatamente.

LEMMA 6. - Per $\alpha < \beta$ gli omeomorfismi p_b^a e λ_b^a sono gli stessi su $Q_b H(X) \rightarrow Q_a H(X)$.

Evidentemente $p_b^a Q_b = Q_a$ dal lemma 4. Anche $Q_a = \lambda_b^a Q_b$, perché $\lambda_b^a Q_b = Q_a q_b Q_b \simeq Q_a$. Allora $p_b^a Q_b = \lambda_b^a Q_b$ su $H(X)$.

LEMMA 7. - $H_n(X)$ ha un numero finito di generatori per ogni n ed è banale per $n \geq N$.

Questa osservazione vale per i gruppi di omologia di a . Vedi lemma 5.

LEMMA 8. - $H(X) \approx L \{ H(b), \lambda_b^a \}$.

Il sistema $\{ H(b), \lambda_b^a \}$ è un sistema inverso con l'eccezione della piccola modificazione che λ_b^b non deve essere l'identità. Ciò che è importante è che la proprietà di composizione con λ_b^b vale dal lemma 3. Allora $\lambda_b^b H(b) = Q_b q_b H(b)$. Per il lemma 5, q_b è un omeomorfismo su $H(X)$. Allora $\lambda_b^b H(b) = Q_b(X)$. Segue che il limite inverso di $\{ H(b), \lambda_b^a \}$ è lo stesso come quello di $\{ Q_b H(X), \lambda_b^a \}$ dove ormai λ_b^b è l'identità in $Q_b H(X)$. Dai lemma 5 e 6 segue $\lambda_b^a Q_b H(X) = Q_a H(X) \approx H(X)$.

Allora λ_b^a è un omeomorfismo da $Q_b H(X)$ su $Q_a H(X)$. Questo stabilisce [4, p. 51] che

$$L \{ Q_b H(X), \lambda_b^a \} \approx Q_a H(X) \approx H(X).$$

Ci serviremo sempre della definizione costruttiva degli omeomorfismi sui gruppi di omologia indotti dalle applicazioni degli spazi. In conseguenza riassumiamo i risultati in un breve paragrafo.

Siano Z e W due insiemi compatti e supponiamo che si applichi W in Z . Allora $f: H(W) \rightarrow H(Z)$ è determinato così [4, p. 252]: a ciascun ricoprimento aperto finito $\alpha(Z)$ di Z associamo $'\alpha(W) = f^{-1}(\alpha)$ definita da $'\alpha(W) = \{ 'a_i \mid 'a_i = f^{-1}(a_i) \text{ quando } 'a_i \neq \Phi \}$. Sia $\beta(W)$ un ricoprimento che raffina $'\alpha(W)$. A ciascun (b_i) assegniamo (a_j) dove $b_i \subset a_j$ e poi, perché $'a$ corrisponde a $\text{St}(f(W); a)$ buttiamo l'apice. Allora $T_b(W)^{a(Z)}(b_i) = (a_j)$. Questa corrispondenza di vertici per $b(W)$ e $a(Z)$ determina l'omeomorfismo

$$T_b(W)^{a(Z)} \{ = T_d(W)^{a(Z)} p_b^{d(W)}, \alpha < \delta < \beta \}$$

dei gruppi catenanti, ecc. e così definisce l'omeomorfismo f . Specificamente se

$$\Gamma = \{ \Gamma(b) \} \in H(W)$$

allora

$$(B) \quad f: \Gamma = \Lambda = \{ \Lambda_{(a)} \mid \Lambda_{(a)} = \mathbf{T}_{b(W)}^{a(Z)} \Gamma(b) = \mathbf{T}_{c(W)}^{a(Z)} \Gamma(c) \}.$$

In breve $\Lambda(a)$, come un elemento algebrico, è $\Gamma(a)$.

LEMMA 9. — $\mathbf{Q}_a H(X)$ è la a -esima sezione di $H(X)$ per un aggregato confinale $\{\alpha\}$.

Supponiamo $\alpha = \{a_i \mid i = 1, \dots, N\}$ sia irriducibile. Nel paragrafo che termina alla formula (B), W, Z, f corrispondano a X , e a \mathbf{Q}_a . Una collezione confinale dei ricoprimenti di a indicati con $\alpha^N(a)$ è ottenuta dalla introduzione della n -esima derivata baricentrica a^N di a con le stelle dei vertici come intorni. Però, perché $H(a^N) = H(a)$, basta considerare $\Lambda(a)$ invece di $\Lambda = \{ \Lambda(a^N) \in H(a) \}$. Sia π un sotto insieme di $1, \dots, N$. A ciascuno $l, l = 1, \dots, L$, sia $\{a_j \mid j \in \pi_l\}$ un aggregato massimale con intersezione comune. Scegliamo un punto $x(\pi_l)$ in questa intersezione. Un'applicazione canonica esiste portando $x(\pi_l)$ in $\sigma(\pi_l)$ il simpleso aperto coi vertici $\{(a_j) \mid j \in \pi_l\}$ per ogni l . \mathbf{Q}_a rimane invariato al variare dell'applicazione canonica. Perciò con $'a_i = \mathbf{Q}_a \text{St } a_i \subset a_i$ abbiamo $\Phi \models \cap_{\pi} \alpha_i \Rightarrow \Phi \models \cap_{\pi} \text{St}(a_i) [4, p. 294] \Rightarrow \Phi \models \cap_{\pi} \mathbf{Q}_a^{-1} \text{St}(a_i) \subset \cap_{\pi} a_i$.

Allora $'a$ è lo stesso, vertice per vertice e simpleso per simpleso, con a . Segue che $\mathbf{p}_{a,a}$ e $\mathbf{T}_{a,a}$ sono gli stessi isomorfismi o, equivalentemente, (B) implica che $\mathbf{Q}_a \Gamma_i = \Lambda_i(a) = \Gamma_i(a)$ e perché escludendo la differenza notazionale di un apice $H(a)$ e $H(a)$ sono gli stessi quando \mathbf{Q}_a è canonica, possiamo scrivere $\Lambda_i(a) = \Gamma_i(a)$.

Supponiamo allora che $Z = W = X$. Sia $f_b^a = \mathbf{Q}_a f q_b$ ma scriviamo f_a per f_a^a .

LEMMA 10. — Per ciascuno α in un aggregato confinale dei ricoprimenti di X e per un insieme confinale $\{\gamma\}$ dei raffinamenti di α , \mathbf{f}_g^a e \mathbf{T}_g^a sono gli stessi da $H(g)$ su $H(a)$.

Per α arbitrario definiamo i ricoprimenti $\alpha = \{a_i \mid 'a_i = \mathbf{Q}_a^{-1} \text{St}(a_i)\}$. Perché \mathbf{Q}_a è canonica $\alpha < ' \alpha$. Sia $'\beta = \{b_i \mid 'b_i = f^{-1} a_i\}$. Analogamente $''\beta = \{b_i \mid ''b_i = f^{-1}('a_i), f(X) \cap a_i \models \Phi\}$. Evidentemente $'\beta < ''\beta$. Supponiamo che $''\beta <^* \alpha < \gamma$. Allora f è determinata dagli aggregati delle applicazioni dei vertici $\{\mathbf{T}_g^a\}$, dove $\mathbf{T}_g^a(g_i) = (a_j)$ solamente se $g_i \subset d_k \subset ''b_j$ perché $''b_j \subset 'b_j$.

Perché $q_g(g_i) \subset g_i$ se $\sigma \in \text{St}(g_i)$ i vertici di σ si applicano da q_g nei punti di un aggregato $\{g_l\}$ con una intersezione. Conseguentemente q_g applica σ in un singolo insieme di δ e perciò applica $\text{St}(g_i)$ in un singolo elemento $''b_i$. Questo elemento si trasforma per f sul singolo elemento $'a_j$ e perciò per \mathbf{Q}_a in $\text{St}(a_j)$. In breve $f_g^a \text{St}(g_i) \subset \text{St}(a_j) \subset \text{St } \mathbf{T}_g^a(g_i)$. Cioè \mathbf{T}_g^a è un'approssimazione simpliciale a f_g^a . Perciò possiamo sostituire \mathbf{T}_b^a da \mathbf{f}_b^a in (B).

Scriviamo $L(f)$ per il numero di Lefschetz di f da X a X [4, p. 319] e $L(f_a)$ per il numero di Lefschetz per f su a in a .

TEOREMA 1. — $L(f) = L(f_a)$ per $\alpha_0 < \alpha$.

La base per $H_n(X)$ è $\{\Gamma_n^i \mid \Gamma_n^i = \{\Gamma_n^i(a)\} \mid i = 1, \dots, N(n)\}$.

Abbiamo $(a) f \Gamma_n^i = \sum_j t_j^i(n) \Gamma_n^j$. Allora $L(f)$ è definita da $(b) L(f) = \sum_n (-1)^n \sum_i t_i^i(n)$. La base in $H_n(a)$ è $\{\Gamma_n^i(a) \mid i = 1, \dots, N(n)\} \cup \{\Gamma_n^j(a) \mid j = N(n) + 1, \dots, L(n)\}$. Siano $\gamma_n^i, \gamma_n^i(a)$ e $\gamma_n^j(a)$ cicli rappresentanti delle classi corrispondenti. Il ciclo $\lambda_a^a \gamma_n^j(a) = \rho_n^j(a)$ è essenziale perché è una rappresentativa di $\lambda_a^a \Gamma_n^j(a)$ che è un elemento di $Q_a H(X)$. Allora c'è un ciclo ρ_n^j di X la a -esima coordinata del quale è $\rho_n^j(a)$. Poi $\rho_n^j \sim \sum m_i^j(n) \gamma_n^i$ implica $\rho_n^j(a) \sim \sum m_i^j(n) \gamma_n^i(a)$. Possiamo sostituire gli elementi Γ_n^j da $\Gamma_n^j - \sum_i m_i^j(n) \Gamma_n^i = \Delta_n^j$, e analogamente $\gamma_n^j(a)$ da $\gamma_n^j(a) - \sum_i m_i^j(n) \gamma_n^i(a)$. Allora $\lambda_a^a \delta_n^j(a) \sim 0$. Anzi

$$(C) \quad f_a \delta_n^j(a) \sim Q_a f q_a \delta_n^j(a) \sim Q_a f q_a \lambda_a^a \delta_n^j(a) \sim 0.$$

Per stabilire che l'omeomorfismo f_a è quello indotto da f usiamo una conseguenza immediata dei lemmi 6 e 9. Se $\Gamma \in H(X)$ allora $Q_a \Gamma = \Gamma(a)$ dal lemma 9. Perciò $\lambda_a^b \Gamma(a) = \lambda_a^b Q_a \Gamma = Q_b q_a Q_a \Gamma = Q_b \Gamma = \Gamma(b)$. Allora usando il lemma 10, con α e β nella relazione domandata in quel lemma

$$(d) \quad f_a \Gamma(a) = Q_a f q_a \Gamma(a) = Q_a f q_a \lambda_b^a \lambda_a^b \Gamma(a) = Q_a f q_b \Gamma(b) = f_b^a \Gamma(b) = T_b^a \Gamma(b).$$

Da (B) l'effetto di f sulle coordinate $\Gamma(a)$ è $T_b^a \Gamma(b)$ che da (d) è $f_a \Gamma(a)$. Conseguentemente f_a è l'omeomorfismo indotto da f sulla a -esima coordinata degli elementi di $H(X)$.

Più particolarmente

$$(e) \quad f_a \Gamma_n^i(a) = \sum_j t_j^i(n) \Gamma_n^j(a),$$

dove $t_j^i(n)$ è indipendente da a . Allora in conseguenza di (b), (C) ed (e) implicano $L(f) = L_a(f_a)$.

LEMMA 11. - $L(f_a)$ è indipendente dalla variazione di Q_a e q_a .

Usiamo il teorema 1 osservando che $L(f)$ è determinato da f che può essere definito da T_b^a , cioè senza q_a e Q_a .

BIBLIOGRAFIA.

- [1] D. G. BOURGIN, *Classes of Transformations and Bordering Transformations*, « Bull. A. M.S. », vol. 57, pp. 223-237 (1951).
- [2] F. BROWDER, *Thesis*, 1948.
- [3] J. LERAY, *Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique*, « J. Math. Pures Appl. » (9), vol. 24, pp. 201-248 (1945).
- [4] S. LEFSCHETZ, *Algebraic Topology*, « Amer. Math. Soc. Colloquium Publications », vol. 27, New York, 1942.
- [5] S. LEFSCHETZ, *Topics in Topology*, « Annals of Mathematics Studies », no. 10, Princeton, 1942.
- [6] S. EILENBERG and N. STEENROD, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Press.

Meccanica. — *Sur les principes de Hamilton et de la moindre action.* Nota di VICTOR VÂLCOVICI, presentata^(*) dal Corrisp. B. FINZI.

Dans une Note récente M. E. Storchi⁽¹⁾ se pose la question si le principe de Hamilton et celui de la moindre action restent valables par rapport à des mouvements variés qui ne soient pas synchrones.

La méthode employée par M. Storchi le conduit à la conclusion qu'il n'est pas nécessaire d'imposer des conditions ponctuelles le long de la trajectoire mais seulement des conditions concernant des valeurs moyennes, exprimées par des intégrales. Cette conclusion, qui surprend au premier abord, est pourtant naturelle, étant donné que les dits principes se rapportent eux-mêmes à des valeurs moyennes.

La méthode de M. Storchi me suggère les observations qui suivent.

Soit (A_i) un système de n points matériels A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) à liaisons holonomes. Nous désignerons par \bar{r}_i le vecteur de position du point A_i , par m_i sa masse, par \bar{F}_i la force proprement dite appliquée au point A_i , de sorte que l'équation fondamentale de la dynamique prendra la forme:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \delta \bar{r}_i = 0,$$

$\delta \bar{r}_i$ étant un déplacement virtuel du système.

Considérons un intervalle fini de temps, $t = [t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$, pendant lequel le point matériel A_i décrit la trajectoire naturelle C_P ayant les extrémités aux points P_0 ($t = t_0$) et P_1 ($t = t_1$).

A chaque point P de C_P nous associerons un vecteur infinitésimal $\delta \bar{r}_i$, fonction arbitraire du vecteur de position \bar{r}_i de P , et partant, du temps t , continue et dérivable, tel qu'il représente un déplacement virtuel compatible avec les liaisons. En désignant par Q l'autre extrémité du vecteur $\delta \bar{r}_i$ ($= \overline{PQ}$), le lieu des points Q sera une courbe C_Q à tangente unique en chaque point et ayant les extrémités en Q_0 et Q_1 . Le vecteur de position, \bar{r}'_i , de Q sera donné par

$$(2) \quad \bar{r}'_i = \bar{r}_i + \delta \bar{r}_i.$$

Cette relation établit une correspondance ponctuelle $(1, 1)$ entre les courbes C_P et C_Q .

L'opérateur différentiel δ appliqué au vecteur \bar{r}_i nous conduit donc d'un point P de C_P , au point correspondant Q de C_Q , tandis que l'opérateur différentiel d appliqué au même vecteur \bar{r}_i nous conduit au point P' , infiniment voisin de P sur la courbe C_P . C'est toujours à l'aide de l'opérateur d que l'on passe du point Q sur la courbe C_Q , au point Q' , infiniment voisin de Q sur

(*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) « Rend. Lincei », XVIII, pp. 162-167 (1955).

C_Q . Nous supposerons que les points P' et Q' se correspondent réciproquement par la transformation (2).

D'autre part, en supposant qu'un mobile fictif, A'_i , parcourt la courbe C_Q , de Q_0 à Q_i , le temps propre étant t' , on aura pour la vitesse \bar{v}'_i du mobile A'_i au point Q :

$$(3) \quad \bar{v}'_i = \frac{d\bar{r}'_i}{dt'}.$$

Entre le temps t qui régit le déplacement de A_i sur C_P et le temps t' nous admettrons la relation:

$$(4) \quad t' = t + \delta t,$$

δt étant une fonction infinitésimale arbitraire, continue et dérivable de t .

Supposons qu'un second mobile fictif, A''_i , décrit la courbe C_Q , de Q_0 à Q_i , tel qu'il se trouve dans la position Q au même moment t , où le mobile réel A_i se trouve en P . Nous dirons que le mouvement de A''_i est une *variation synchrone* du mouvement de A_i , tandis que celui de A'_i en est une *variation non synchrone*.

La vitesse \bar{v}''_i du mobile A''_i sera donnée par

$$(5) \quad \bar{v}''_i = \frac{d(\bar{r}_i + \delta\bar{r}_i)}{dt} = \bar{v}_i + \frac{d}{dt} \delta\bar{r}_i,$$

$\bar{v}_i (= d\bar{r}_i/dt)$ étant la vitesse du mobile réel A_i . Nous aurons, évidemment,

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \delta\bar{r}_i = \delta \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \delta\bar{v}_i,$$

en désignant par $\delta\bar{v}_i$ la variation subie par \bar{v}_i lorsqu'on passe du mouvement réel, au mouvement du mobile fictif de A''_i , au même moment t .

Pour calculer l'expression

$$(7) \quad \delta' \bar{v}_i = \bar{v}'_i - \bar{v}_i,$$

qui représente la variation subie par la vitesse \bar{v}_i lorsqu'on passe du mobile réel en P , au mobile fictif A'_i en Q , nous considérons la valeur (3) de \bar{v}'_i dans laquelle nous introduisons les expressions (2) et (7) de \bar{r}'_i et de t' :

On aura

$$(8) \quad \bar{v}'_i = \frac{d(\bar{r}_i + \delta\bar{r}_i)}{d(t + \delta t)} = \left(\frac{d\bar{r}_i}{dt} + \frac{d}{dt} \delta\bar{r}_i \right) \left(1 + \frac{d}{dt} \delta t \right)^{-1},$$

ou bien, en négligeant les quantités infinitésimales du second ordre et ayant égard à (6),

$$(9) \quad \delta' \bar{v}_i = \delta\bar{v}_i - \bar{v}_i \frac{d}{dt} \delta t.$$

On en tire, à l'aide d'une multiplication scalaire par \bar{v}_i :

$$(10) \quad \delta' T = \delta T - 2 T \frac{d}{dt} \delta t,$$

si l'on désigne par T l'énergie cinétique du système, par δT sa variation quand on passe du mouvement réel en P , au mouvement fictif de A'_i en Q ,

et par $\delta'T$ sa variation quand on passe du mouvement réel en P; au mouvement fictif de A'_i en Q.

LE PRINCIPE GÉNÉRAL INTÉGRAL DE LA DYNAMIQUE. — Afin d'exprimer l'équation générale (1) à l'aide des quantités $\delta\bar{r}_i$ et δt , remarquons que l'on a:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i \delta\bar{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \delta\bar{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \frac{d}{dt} \delta\bar{r}_i,$$

ou bien, avec (6),

$$\Sigma m_i \bar{a}_i \delta\bar{r}_i = \frac{d}{dt} \Sigma m_i \bar{v}_i \delta\bar{r}_i - \delta T.$$

Em remplaçant δT par sa valeur tirée de (10) on aura:

$$\Sigma m_i \bar{a}_i \delta\bar{r}_i = \frac{d}{dt} \Sigma m_i \bar{v}_i \delta\bar{r}_i - \delta'T - 2T \frac{d}{dt} \delta t.$$

Introduisons maintenant cette expression dans l'équation (1) et intégrons ensuite l'équation ainsi transformée, par rapport à t , entre les limites t_0 et t_1 . Nous obtiendrons de cette façon la relation suivante:

$$(11) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta'T + 2T \frac{d}{dt} \delta t + \delta\mathcal{L} \right) dt = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \delta\bar{r}_i \Big|_{t=t_0}^{t=t_1},$$

où nous avons mis

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \delta\bar{r}_i.$$

La formule intégrale (11) est connue ⁽²⁾. Mais la fécondité de son contenu n'a pas été encore mise en évidence. Elle contient, on va le voir, comme des cas particuliers, outre le principe de Hamilton et celui de la moindre action, une infinité d'autres nouveaux. Nous l'appellerons « le principe général intégral de la dynamique ».

Principe de Hamilton. En prenant $\delta t \equiv 0$ et en supposant que les déplacements $\delta\bar{r}_i$ s'annulent aux extrémités,

$$(12) \quad \delta\bar{r}_i = 0 \quad \text{pour} \quad t = t_0 \quad \text{et} \quad t = t_1, \dots$$

la formule (11) deviendra:

$$(13) \quad \int (\delta T + \delta\mathcal{L}) dt = 0^{(3)}.$$

C'est la forme générale connue du principe de Hamilton. Mais nous avons déduit cette forme, du principe général (11), en supposant, comme on fait d'habitude, que les mouvements variés sont synchrones avec les mouvements réels ($\delta t \equiv 0$). Pour pouvoir admettre des mouvements variés non synchrones

(2) Voir p. ex. T. LEVI-CIVITA et V. AMALDI, *Mécc. Raz.*, vol. II, partie II, p. 506, form. (22).

(3) Nous avons supprimé ici les limites t_0 et t_1 de l'intégrale de droite pour simplifier l'écriture. C'est ce que nous ferons constamment dans ce qui suit.

il faudrait trouver des conditions pour δt autre que $\delta t \equiv 0$. C'est ce que l'on obtient en prenant p. ex.:

$$(14) \quad \int 2T \frac{d}{dt} \delta t \delta t = \alpha \int (\delta' T + \delta \mathcal{L}) dt,$$

α étant arbitraire et $\neq -1$; car, en effet, la formule générale (11) devient avec (12) et (14):

$$(\alpha + 1) \int (\delta' T + \delta \mathcal{L}) dt = 0,$$

ce qui donne pour $\alpha \neq -1$:

$$\int (\delta' T + \delta \mathcal{L}) dt = 0.$$

On pourra la mettre sous la forme

$$(15) \quad \int (\delta' T + \delta' \mathcal{L}) dt = 0$$

étant donné que l'on a:

$$(16) \quad \delta' \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}.$$

La formule (15) peut être regardée comme une généralisation du principe de Hamilton (13) pour des mouvements variés non synchrones, si δt satisfait la condition intégrale (14).

Une seconde forme généralisée du principe de Hamilton ressortira de (11) en prenant

$$(17) \quad (1 - \alpha) \int T \frac{d}{dt} \delta t dt = \alpha \int (\delta' T + \delta \mathcal{L}) dt, \quad \alpha = \text{arb.} \neq -1,$$

car dans ce cas la formule (11) peut s'écrire avec (12) et (17):

$$(\alpha + 1) \int \left(\delta' T + T \frac{d}{dt} \delta t + \delta \mathcal{L} \right) dt = 0.$$

Or on a:

$$(18) \quad \int \left(\delta' T + T \frac{d}{dt} \delta t \right) dt = \delta' \int T dt;$$

de sorte que la relation ci-dessus pour $\alpha \neq -1$ prendra la forme:

$$(19) \quad \delta' \int T dt + \int \delta \mathcal{L} dt = 0,$$

qui peut être considérée également comme une généralisation de la forme (13) du principe de Hamilton pour des mouvements variés non synchrones, si δt satisfait la condition intégrale (17).

PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION (MAUPERTUIS). - Nous nous proposons maintenant de trouver des conditions qui permettraient de déduire du principe général (11), le principe de la moindre action:

$$(20) \quad \delta' \int T dt = 0,$$

les mouvements variés étant non synchrones. Ayant égard à l'identité (18) nous mettrons la relation (20) sous la forme:

$$(21) \quad \int \left(\delta' T + T \frac{d}{dt} \delta t \right) dt = 0.$$

On peut déduire de (11), si l'on y fait

$$(22) \quad \int \delta \mathcal{L} dt = \alpha \int \delta' T dt + (\alpha - 1) \int T \frac{d}{dt} \delta t dt,$$

$$\alpha = \text{arb.} \neq -1,$$

la formule

$$(\alpha + 1) \int \left(\delta' T + T \frac{d}{dt} \delta t \right) dt = 0,$$

ce qui mène à (21) pour $\alpha \neq -1$. Si l'on prend $\alpha = 1$ dans la relation de condition (21), celle-ci deviendra

$$(23) \quad \int (\delta' T - \delta \mathcal{L}) dt = 0$$

qui d'habitude est remplacée par la suivante:

$$\delta' T - \delta \mathcal{L} = 0,$$

beaucoup plus restrictive.

LE CAS SPÉCIAL DES FORCES CONSERVATIVES. — Si les forces \bar{F}_i admettent une fonction de forces U (le cas considéré par M. Storchi),

$$\delta \mathcal{L} = \delta U,$$

le principe général (11) prendra, par conséquent, la forme

$$(24) \quad \int \left(\delta' L + 2T \frac{d}{dt} \delta t \right) dt = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \delta \bar{r}_i \Big|_{t=t_0}^{t=t_1}$$

où nous avons désigné par L la fonction de Lagrange,

$$L = T + U.$$

En tenant compte de l'identité

$$\delta' \int L dt = \int \left(\delta' L + L \frac{d}{dt} \delta t \right) dt$$

la formule (24) devient, vu la relation (16),

$$(25) \quad \delta' \int L dt + \int E \frac{d}{dt} \delta t dt = \sum m_i \bar{v}_i \delta \bar{r}_i \Big|_{t=t_0}^{t=t_1},$$

en notant avec E l'énergie du système,

$$E = T - U.$$

On voit que si l'on choisit δt tel qu'il vérifie la condition

$$(26) \quad \int E \frac{d}{dt} \delta t dt = \alpha \int \left(\delta' T + T \frac{d}{dt} \delta t \right) dt,$$

$$\alpha = \text{arb.} \neq -1,$$

et si l'on admet la condition (12) aux limites, la relation (25) deviendra

$$(\alpha + 1) \delta' \int L dt = 0$$

et partant, pour $\alpha \neq -1$,

$$(27) \quad \delta' \int L dt = 0.$$

C'est le principe de Hamilton pour des forces conservatives, étendu au cas où les mouvements variés seraient non synchrones; il est valable à condition que δt satisfasse la relation (26); celle-ci, d'ailleurs, pour $\alpha = 0$ coïncide avec la condition correspondante donnée par M. Storchi ⁽⁴⁾.

Ici il convient de signaler tout spécialement l'importante observation de M. Storchi concernant cette condition,

$$\int E \frac{d}{dt} \delta t dt = 0,$$

qui impose à la fonction δt une restriction bien moindre que celle que l'on trouve d'habitude,

$$\delta t = 0.$$

Si au lieu de (26), la fonction δt vérifie la condition:

$$(28) \quad \int \delta U dt = \alpha \int \delta' T dt + (\alpha - 1) \int T \frac{d}{dt} \delta t dt.$$

$$\alpha = \text{arb.} \neq -1,$$

alors la formule (25) nous conduira, avec (12), à:

$$(\alpha + 1) \delta' \int T dt = 0,$$

donc, pour $\alpha \neq -1$, à

$$\delta' \int T dt = 0.$$

C'est le principe de la moindre action; la relation de condition (28) concernant δt se réduit, pour $\alpha = 1$, à celle trouvée par M. Storchi ⁽⁵⁾, à savoir

$$\int \delta' E dt = 0.$$

Cette relation trouvée par M. Storchi est beaucoup moins restrictive que celle que l'on donne d'habitude,

$$\delta' E = 0.$$

(4) Loc. cit. relation (11).

(5) Loc. cit. relation (10).

REMARQUES FINALES. — Nous venons de voir que le principe général intégral (11) peut engendrer le principe de Hamilton ainsi que celui de la moindre action sous les formes très générales: (15) et (19) pour le premier (20) pour le second de ces deux principes, à condition que la fonction δt de t satisfasse chaque fois une certaine relation intégrale. Les formes connues dans la littérature de ces deux principes s'en déduisent comme des cas particuliers.

Mais la méthode à l'aide de laquelle nous avons déduit ces formes générales des deux principes est susceptible d'en fournir aussi d'autres. Mettons, p. ex., le principe général intégral (11) avec la condition (12) aux limites, sous la forme:

$$(29) \quad I + J = 0,$$

où l'on a mis

$$(30) \quad \begin{cases} I = \alpha_1 \int \delta' T dt + \alpha_2 \int 2 T \frac{d}{dt} \delta t dt + \alpha_3 \int \delta \mathcal{L} dt, \\ J = \beta_1 \int \delta' T dt + \beta_2 \int 2 T \frac{d}{dt} \delta t dt + \beta_3 \int \delta \mathcal{L} dt, \end{cases}$$

es quantités α_i et β_i étant soumises aux conditions:

$$(31) \quad \alpha_i + \beta_i = \alpha \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad ; \quad \alpha = \text{arb.} \neq 0.$$

Si l'on impose maintenant à la fonction δt de t la condition de satisfaire la relation:

$$(32) \quad J = \beta I \quad , \quad \beta = \text{arb.} \neq -1,$$

le principe général (29) engendre un nouveau principe, à savoir:

$$(33) \quad I = 0,$$

qui présente une grande élasticité d'expression fournie par les quantités arbitraires α_i ($i = 1, 2, 3$), α et β .

D'ailleurs on peut augmenter encore le nombre des quantités arbitraires α_i , en augmentant le nombre des termes dans les expressions de I et J ; c'est ce qui arrive p. ex. en donnant au principe (11) la forme

$$\delta' \int 2 T dt - \int \delta' T dt - \int T \frac{d}{dt} \delta t + \int T \frac{d}{dt} \delta t dt + \int \delta \mathcal{L} dt = 0.$$

Nous n'insisterons plus.

Nous allons terminer ces observations en considérant le cas particulier des forces conservatives.

Le principe général intégral (24) peut être mis sous la forme:

$$(34) \quad \delta' \int T dt + \delta' \int U dt + \int E \frac{d}{dt} \delta t dt = 0,$$

avec la condition (12) aux limites.

Prenons

$$I = \delta' \int \alpha_1 T dt + \delta' \int \alpha_2 U dt + \alpha_3 \int E \frac{d}{dt} \delta t dt,$$

$$J = \delta' \int \beta_1 T dt + \delta' \int \beta_2 U dt + \beta_3 \int E \frac{d}{dt} \delta t dt,$$

$$\alpha_i + \beta_i = \alpha \quad ; \quad \alpha_i, \beta_i \quad ; \quad \alpha \text{ const. arb., } i = 1, 2, 3.$$

Pour obtenir un principe variationnel il suffira de faire $\alpha_3 = 0$ ou $\beta_3 = 0$. Faisons p. ex. $\alpha_3 = 0$. Le principe variationnel aura donc la forme:

$$(35) \quad \int (\alpha_1 T + \alpha_2 U) dt = \text{stationnaire},$$

et la condition correspondante pour δt :

$$(36) \quad \delta' \int (\beta_1 T + \beta_2 U) dt + \alpha \int E \frac{d}{dt} \delta t dt = \beta \delta' \int (\alpha_1 T + \alpha_2 U) dt,$$

$$\beta = \text{const. arb.} \neq -1.$$

L'expression:

$$E(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 T + \alpha_2 U$$

représente une sorte d'énergie « cinéto-potentielle » que l'on pourrait appeler « du genre (α_1, α_2) ». Le principe exprimé par (36) devient le principe Hamilton pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 1$, $\beta = 0$, et le principe de la moindre action pour $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

On pourrait donner aussi d'autres valeurs aux paramètres α_i , α et β , et obtenir ainsi d'autre principes. En particulier, pour $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ on aura le principe variationnel suivant:

$$\int U dt = \text{stationnaire},$$

avec la condition

$$\int \left(\delta' E + 2 E \frac{d}{dt} \delta t \right) dt = 0.$$

Ce cas a été trouvé aussi par M. Storchi ⁽⁶⁾.

Avec les valeurs $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha = 1$ des paramètres on obtiendra le principe variationnel:

$$\delta' \int E dt = 0,$$

la condition pour δt ayant la forme

$$\int \left(2 \delta' U + L \frac{d}{dt} \delta t \right) dt = 0, \quad \text{pour } \beta = 0.$$

(6) Loc. cit., p. 166.

Cosmogonia. — *Orbite anapsidali in sistemi binari di massa variabile.* Nota di E. L. MARTIN, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Cadute di meteoriti, immersioni in nubi cosmiche, fughe di particelle atmosferiche, irraggiamento della materia ed altri fatti di natura consimile sono oggi comunemente noti e accettati. Essi provocano nei corpi celesti aumenti o, rispettivamente, diminuzioni di massa, che, pur avvenendo dal lato quantitativo lentissimamente col tempo, quando abbiano come succede generalmente carattere progressivo, possono causare effetti secolari cospicui.

I citati fenomeni debbono quindi essere tenuti presenti nello studio dei processi evolutivi degli astri e dei loro sistemi. È perciò che la variazione di massa dei corpi celesti, introdotta circa un secolo fa in alcune ricerche analitiche come ipotesi efficace per spiegare appunto qualche realtà fenomenica di effetto secolare notevole, è andata acquistando un interesse astronomico sempre più crescente col tempo sì da rivestire, oggi più che mai, carattere di attualità. Ne sono prova le comunicazioni fatte all'Assemblea della Unione Astronomica Internazionale di Roma nel 1952 dagli astronomi Ambartsumian ⁽¹⁾ e Fessenkov ⁽²⁾ e ricordate in una sua Nota lincea dall'Armellini ⁽³⁾. Questi ha ivi precisato acutamente in proposito quali siano le condizioni rigorose di validità della equazione cardinale della dinamica tanto sotto la nota forma classica $m(t) (d\bar{v}/dt) = \bar{F}$ quanto sotto l'altra suggestiva espressione $d[m(t) \bar{v}]/dt = \bar{F}$ introdotta dal Levi-Civita ⁽⁴⁾.

In seguito adotteremo soltanto la prima delle due, ammettendo con ciò che nella nostra trattazione siano verificate le condizioni dimostrate necessarie dall'Armellini per la sua rigorosa validità.

È inoltre notissimo come l'Armellini si sia molto occupato del problema dei due corpi di massa variabile sul quale egli ha effettuato numerose ed originali ricerche ⁽⁵⁾ giungendo a risultati notevoli.

2. Nel problema dei due corpi, di massa sia costante che variabile, si può considerare ovviamente tanto il moto di ciascuno di essi rispetto al centro di massa del sistema, quanto quello relativo, come qui verrà generalmente sottinteso in seguito, di uno dei due corpi (detto secondario o mobile) rispetto all'altro (chiamato primario o fisso).

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) Cfr. negli « Atti del Congresso »: *Discorso introduttivo al simposio sopra l'evoluzione stellare*.

(2) Ibidem. *La irradiazione corpuscolare come fattore evolutivo del Sole e delle stelle*.

(3) « Rendiconti Lincei », 1953, sem. I: *Osservazioni sul problema dei due corpi di massa variabile e sopra alcune sue applicazioni cosmogoniche*.

(4) « Rendiconti Lincei », 1928, sem. II, *Sul moto di un punto di massa variabile*.

(5) Cfr. G. ARMELLINI, « Rendiconti Lincei », 1911 II; 1913 I; 1914 II; 1915 II; 1922 I; 1925 I; 1926 II; 1932 I e II; 1936 I; 1937 I, e « Mem. Acc. Naz. Sc. dei XL », 1915, XIX.

Ricordiamo ora che se la massa del sistema è variabile, quando si imponga la condizione che la eccentricità e delle coniche osculatrici all'orbita percorsa dal corpo considerato rimanga sempre costante durante il moto, allora si ricava facilmente - come del resto confermeremo in seguito - che l'orbita è una spirale di natura logaritmica, quindi senza apsidi, e che vale per essa in ogni istante la relazione:

$$(1) \quad e + \cos v = 0 \quad \text{con} \quad 0 < e < 1 \quad e \quad \cos v = -e = \text{cost.}$$

ove v è l'anomalia vera del mobile rispetto a ciascuna di dette coniche, anomalia che risulta quindi costante durante tutto il moto.

Ricordiamo inoltre che se invece imponiamo la condizione:

$$(2) \quad v = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \cos v = 0,$$

come pure confermeremo in seguito, l'orbita è una spirale di natura iperbolica e quindi ancora senza apsidi, con $em = \text{cost.}$

I due esempi ora ricordati appaiono ovviamente come casi particolari della condizione $v = \text{costante}$ da cui sorge spontanea l'idea di trattare questa nella sua generalità. Dal punto di vista fisico è opportuno rilevare che se i due esempi sopra richiamati, e gli altri casi che considereremo, non risultano sempre applicabili al caratteristico moto reale delle stelle doppie se non al più per indagare, con alcuni di essi, sulla evoluzione dei sistemi binari strettissimi, fotometrici, essi possono invece ben rispondere in genere a quesiti riguardanti altri campi di ricerca in problemi cosmogonici legati a variazioni della massa. Ci limiteremo a citare in proposito il Jeans ⁽⁶⁾.

3. Rispetto ad un sistema di coordinate polari avente il polo nel primario ed un asse polare generico per esso, indicata con $\vartheta = \vartheta(t)$ la anomalia del secondario all'istante t e con $\omega = \omega(t)$ quella del periastro della conica osculatrice all'orbita (vera) in detto istante, e con $v = v(t)$ la loro differenza, che è la cosiddetta anomalia vera, poniamo come condizione generale:

$$(3) \quad \vartheta(t) - \omega(t) = v = \text{cost.}$$

Indichiamo con $m = m(t)$ la massa del sistema e con $e = e(t)$ la eccentricità osculatrice, parametro generalmente variabile con t . Allora la nota relazione generale dell'Armellini:

$$(4) \quad d(em) = -\cos v \, dm,$$

appunto per la (3), è immediatamente integrabile e ci dà con ovvio significato dei simboli e con la disuguaglianza suggerita dalla natura generale del problema la relazione:

$$(5) \quad em = m_0(e_0 + \cos v) - m \cos v > 0$$

⁽⁶⁾ Cfr. «M. N.», LXXXV, I, novembre 1924: *Cosmogonic Problems associated with a secular decrease of mass.*

oppure

$$(6) \quad m(e + \cos v) = m_0(e_0 + \cos v) = \text{cost.}$$

Se la costante è nulla, essendo naturalmente sottinteso che sia $m_0 > 0$, ne consegue la (1) e quindi il primo esempio sopra ricordato, mentre per $em = e_0 m_0$ si ha la (2) del secondo esempio.

4. Scegliendo le unità di misura in modo che siano eguali ad uno la costante delle aree e quella di attrazione, indicando con $p = p(t)$ il parametro della conica osculatrice e con $r = r(t)$ il raggio vettore all'istante t , valgono notoriamente, oltre la $mp = 1$, anche le altre due relazioni seguenti:

$$(7) \quad \frac{1}{r} = m + em \cos v$$

$$(8) \quad r^2 \dot{\phi} = 1$$

La (7) per la (5) ci dà tosto:

$$(9) \quad \frac{1}{r} = m_0 \cos v (e_0 + \cos v) + m \sin^2 v$$

per cui il raggio vettore $r = r(t)$ non dipende dai variabili valori parametrici della mutevole osculatrice, in particolare dalla eccentricità, ma soltanto dalla legge di massa $m = m(t)$ e quindi attraverso essa dal tempo, oltre che naturalmente dal particolare valore della costante v .

Dalla (9) consegue:

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{r} = \sin^2 v \frac{dm}{dt}$$

per cui:

Ammesso, come succede nei fenomeni che si considerano, che la massa $m = m(t)$ sia funzione monoversa del tempo almeno nell'intervallo temporale preso in esame, avviene che la condizione (3) e cioè $v = \text{cost.}$ porta conseguentemente nel moto la mancanza di apsidi (periastri ed apoastri).

5. Esaminiamo la questione più da vicino. Consideriamo innanzitutto un terzo esempio e precisamente quello in cui sia $v \equiv 0 \pmod{\pi}$ e quindi $\sin v = 0$. Allora si ha dalla (10) (come del resto è intuitivo data la condizione posta), $\dot{r} = 0$, $r = \text{cost.}$ per cui $e = 0$ e quindi dalla (7) anche $m = \text{cost.}$ cosicché l'esempio ha interesse soltanto per il suo aspetto di limite nel quale, comunque, essendo l'orbita un cerchio, non esistono apsidi. Ammettiamo in seguito che sia valida la:

$$(11) \quad \sin v = 0$$

e consideriamo la formula generale dell'Armellini:

$$(12) \quad me d\omega = - \sin v dm$$

la quale, tenuto conto della (5) e separando le variabili, ci dà:

$$(13) \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \operatorname{sen} v \int_{m_0}^m \frac{-dm}{m_0(e_0 + \cos v) - m \cos v}.$$

Per l'esempio (2), in cui cioè: $v = \pm \pi/2$, $\cos v = 0$, $\operatorname{sen} v = \pm 1$, rilevando inoltre che per la (3) si ha:

$$(14) \quad \omega - \omega_0 = \vartheta - \vartheta_0,$$

la integrazione dà facilmente $m_0 e_0 (\vartheta - \vartheta_0) = \mp (m - m_0)$, da cui, riducendosi in tal caso la (7) ad $1/r = m$, si ha, per l'equazione dell'orbita tra r e ϑ , la spirale di natura iperbolica $1/r = m_0 [1 \pm e_0 (\vartheta - \vartheta_0)]$, a conferma di quanto già detto al n. 2 della presente Nota per l'esempio in questione. Ammettiamo quindi in seguito che oltre alla (11) valga anche la:

$$(15) \quad \cos v \neq 0.$$

Si ha allora dalla (13):

$$(16) \quad \omega - \omega_0 = \operatorname{tang} v \log \{ [m_0(e_0 + \cos v) - m \cos v] / m_0 e_0 \}.$$

Da questa, tenuto conto della (14) e indicando con b la base dei logaritmi naturali, si ottiene:

$$(17) \quad e_0 m_0 b^{\operatorname{cotg} v (\vartheta - \vartheta_0)} = m_0(e_0 + \cos v) - m \cos v.$$

Eliminando la m tra la (17) e la (9) si ricava tosto:

$$(18) \quad \frac{1}{r} \cos v + e_0 m_0 \operatorname{sen}^2 v b^{\operatorname{cotg} v (\vartheta - \vartheta_0)} = m_0(e_0 + \cos v),$$

la quale, coinvolgendo come variabili r e ϑ soltanto, è l'equazione in termini finiti dell'orbita vera nel caso generale escludente i due esempi considerati in cui è nullo $\operatorname{sen} v$ (terzo esempio) oppure $\cos v$ (secondo esempio).

Se invece si annulla $e_0 + \cos v$ (primo esempio) per cui diventa zero il secondo membro della (18), questa, a conferma di quanto detto per tale esempio al n. 2 della presente Nota, si semplifica nella seguente forma spirale di natura logaritmica:

$$(19) \quad \frac{1}{r} = m_0 \operatorname{sen}^2 v b^{\operatorname{cotg} v (\vartheta - \vartheta_0)}.$$

Derivando rispetto a ϑ la (19) e ponendo poi per la (1) $\cos v = -e_0$, oppure derivando la (18), si ottiene egualmente:

$$(20) \quad \frac{d(1/r)}{d\vartheta} = -e_0 m_0 \operatorname{sen} v b^{\operatorname{cotg} v (\vartheta - \vartheta_0)},$$

ove il segno dipende unicamente da quello di $\operatorname{sen} v$, che, per la condizione (3) di partenza, non cambia al variare di ϑ . In conclusione quindi, tenuti presenti anche i risultati ottenuti per i tre esempi singolari esaminati: $e + \cos v = 0$, $\cos v = 0$ e $\operatorname{sen} v = 0$, resta confermato, senza eccezione alcuna, che:

Nel problema dei due corpi di massa variabile, tutti i moti legati alla condizione $\vartheta(t) - \omega(t) = v = \text{cost.}$ hanno carattere anapsidale.

Chimica. — *Sulla forma geometrica delle catene spiralizzate dei polimeri isotattici cristallini* (*). Nota di PAOLO CORRADINI e ITALO PASQUON, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

Come è stato già comunicato a questa Accademia, sono stati sintetizzati e studiati ai raggi X nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano diversi polimeri isotattici di alfaolefine, e sono state portate evidenze röntgenografiche della forma allo stato cristallino, delle loro catene spiralizzate (1).

Ci ripromettiamo di discutere più a fondo in questo lavoro alcuni aspetti dei risultati trovati in precedenza.

Alcuni anni fa, Bunn (2), dopo avere esaminato una serie di strutture note di molecole contenenti 2 o più atomi di carbonio legati da legami semplici, emetteva il principio del massimo allontanamento dei legami (stag-

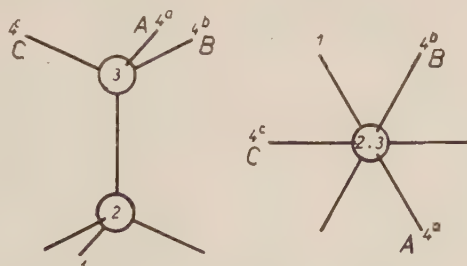


Fig. 1. — Configurazioni di massimo allontanamento dei legami.

gered bonds), assumendo che esso sia determinante della successione di atomi di carbonio tra loro legati a formare una catena, insieme a quello dell'allontanamento degli atomi vicini ma non direttamente vincolati a distanze dell'entità di quelle di Van der Waals.

In una successione di tre legami lungo una catena, sono possibili quindi come mostra la fig. 1 soltanto tre configurazioni, denominate da Bunn con le lettere A, B, C. Noi indicheremo con $\alpha = 180^\circ$ l'angolo formato dal piano 123 con il piano 234^a, con $\beta = 60^\circ$ l'angolo formato dal piano 123 con il piano 234^b, con $\gamma = 60^\circ$ l'angolo tra il piano 123 e il piano 234^c. Indicheremo inoltre nel seguito del lavoro, con α' , β' , γ' e A', B', C' angoli e configurazioni che si discostino dal modello ideale.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) G. NATTA, P. CORRADINI, «Atti Acc. Naz. Lincei», Memorie, ser. VIII, 4, sez. II, fasc. 5, p. 73 (1955); G. NATTA, P. CORRADINI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 18, fasc. 1, p. 19 (1955); G. NATTA, P. CORRADINI, «Die Makr. Chemie», 16, 77 (1955); G. NATTA, P. CORRADINI, I. W. BASSI, «Atti Acc. Naz. Lincei». Nota presentata nella seduta del 10 dicembre 1955.

(2) C. W. BUNN, «Proc. Roy. Soc.» (London), 180, 67 (1942).

Se si vuole che tutti gli atomi di carbonio asimmetrico siano tra loro strutturalmente equivalenti, in un polimero di monomero $\text{CH}_2 = \text{CHR}$ isotattico, la sua catena deve necessariamente configurarsi in una spirale, analogamente a quanto accade ad esempio nelle proteine. Le spirali teoricamente

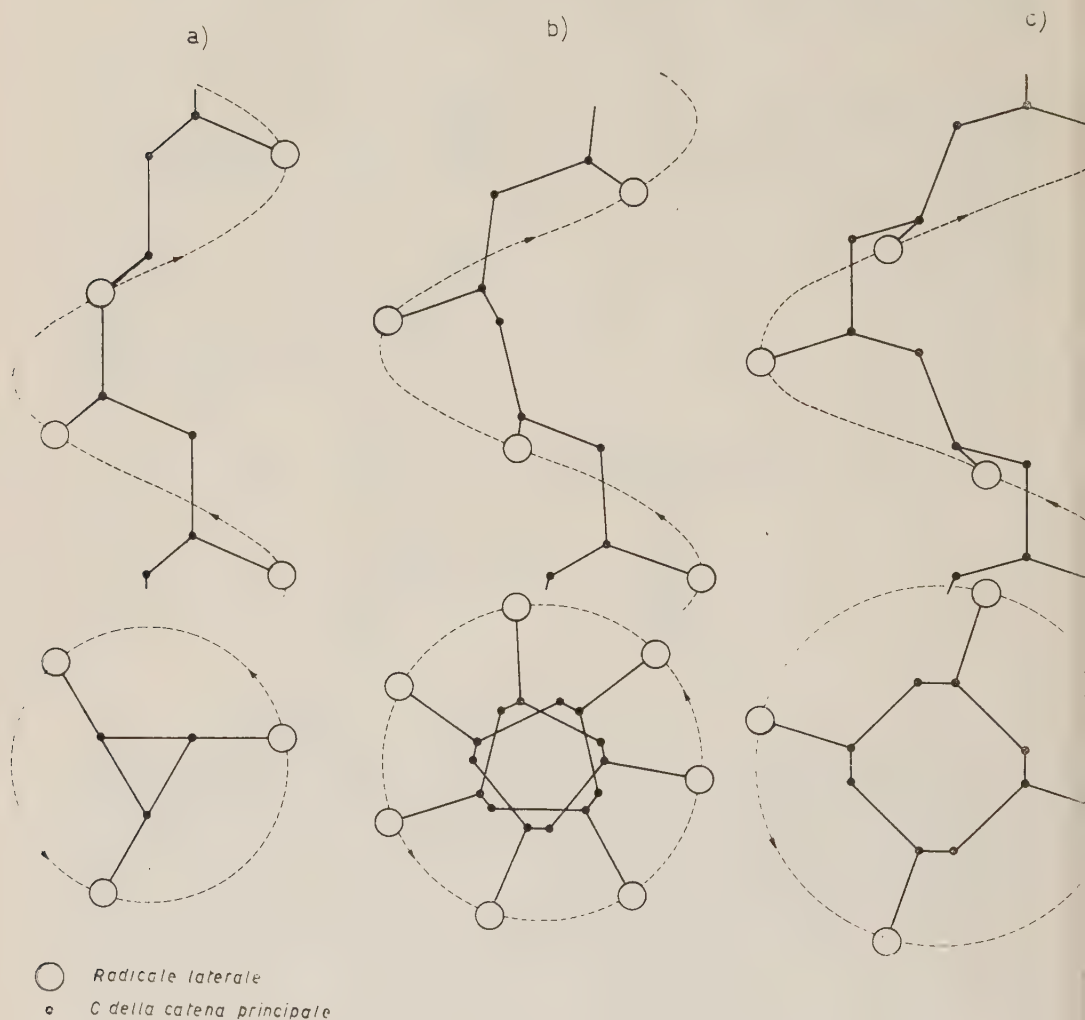


Fig. 2. - Esempi di eliche di polimeri isotattici.

- a) elica $(AB)_3$
b) elica $(A' B')_{3.5}$
c) elica $(A' B')_1$

prevedibili sulla base degli enunciati di Bunn sono quella derivante dalla ripetizione di A (A_2 , zig zag piano), quella derivante dalla ripetizione di B e C (B_4 destra, C_4 sinistra) e quella derivante dall'alternarsi di A e B oppure di A e C ($(AB)_3$, sinistra, $(AC)_3$ destra). Le prime due sono da scartare sulla base della seconda parte dell'enunciato di Bunn, nel caso di polimeri isotattici, in quanto danno luogo ad accostamenti troppo forti tra gli atomi

di carbonio dei gruppi laterali a tra questi e gli atomi di carbonio della catena, e resta come unica configurazione possibile la $(AB)_3$ o $(AC)_3$, cosa che è stata da noi sperimentalmente provata. L'interazione dei gruppi laterali può portare a delle distorsioni dal più semplice modello ideale e conseguentemente a nuovi tipi di eliche. In effetti lungo l'elica del poli-4-metilpentene si ripetono 3,5 monomeri per passo, mentre lungo l'elica del poli-3-metilbutene se ne ripetono 4. Trattandosi di eliche costituite da unità strutturali equivalenti, qualora sia noto il loro passo risulta possibile ricostruire come ed in quali posizioni si succedono gli atomi di carbonio della catena.

Partendo da angoli di valenza (110° – 112°) e distanze di legame ($1,54 \text{ \AA}$) comunemente accettate sono stati ricostruiti i modelli di eliche, che nella fig. 2 sono confrontati con il tipo di elica presente nei primi polimeri isotattici conosciuti (polistirolo). Per le eliche non ternarie che indicheremo d'ora in poi con $(A'B')_{3,5}$ e $(A'B')_4$ rispettivamente per il poli-4-metilpentene e il poli-3-metilbutene, gli angoli α' e β' si scostano dai loro valori normali α e β . Per ciascun tipo di elica tali scostamenti calcolati in base ai dati sperimentali, sono risultati all'incirca uguali sia per l'angolo α' che per l'angolo β' .

Abbiamo pertanto voluto approfondire queste risultanze.

Dati gli angoli σ_1 e σ_2 formati dai piani determinati da 4 legami successivi (fig. 3) per una qualsiasi catena spiraliforme, l'angolo di valenza Φ , la lunghezza r del legame C—C, l'angolo θ tra le proiezioni normali all'asse della catena di due atomi che si succedono sulla stessa elica, si giunge, sulla traccia di quanto fatto da altri autori ⁽³⁾, ad una determinazione univoca del periodo di identità lungo l'asse della spirale, che riferito all'unità monomerica, risulta:

$$(I) \quad d = \frac{2r \sin^2 \Phi/2 \cdot \sin(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sin \theta/2}$$

(3) T. SHIMANOCHI, S. MIZUSHIMA, « J. Chem. Phys. », 23, n. 4, 707 (1955).

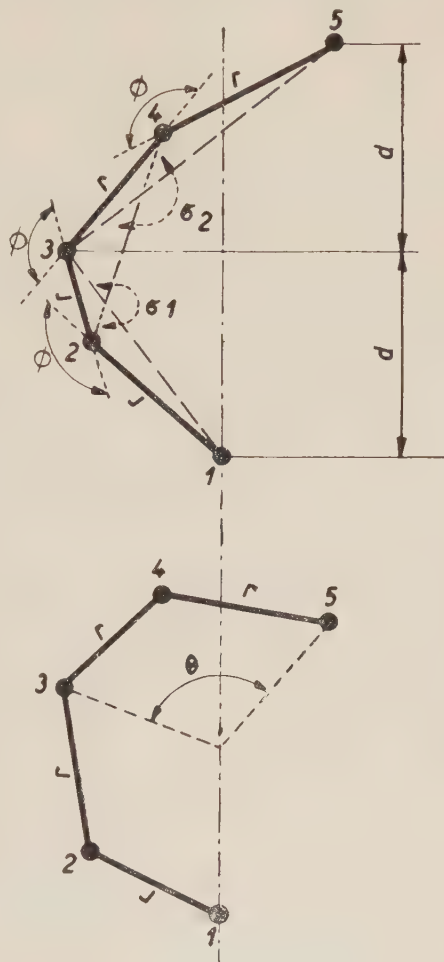


Fig. 3. - Coordinate interne di un'elica.

dove σ_1 e σ_2 sono legati dalla relazione:

$$(2) \quad 2 \cos \theta = 2 \cos \sigma_1 \cos \sigma_2 - 2 \cos \Phi \sin \sigma_1 \sin \sigma_2 - \sin^2 \Phi (1 + \cos \sigma_1)(1 + \cos \sigma_2).$$

Nel caso particolare di polimeri isotattici non aventi catene a simmetria ternaria, poiché σ_1 e σ_2 non coincidono più con 180° e 60° si può porre:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \beta' = 60^\circ + \delta_1 \\ \sigma_2 &= \alpha' = 180^\circ - \delta_2. \end{aligned}$$

Se supponiamo, come si è accennato in precedenza, $\delta_1 = \delta_2$, dato il tipo di elica (determinante di θ) è possibile attraverso la (2) stabilire i valori di α' e di β' e quindi di d al variare dell'angolo Φ .

I risultati sono mostrati graficamente nella fig. 4. Se si ammette il principio della eguale distorsione (*isodistorsione*) degli angoli α' e β' dal valore che avrebbero nel caso del massimo allontanamento dei legami, si deducono con facilità i possibili periodi.

L'elica di 7 monomeri e due passi dovrà avere un periodo compreso tra 13,5 e 14,3 Å per Φ che varia tra 110° e 114° , l'elica di 4 monomeri e un passo avrà un periodo compreso tra 6,85 e 7,40 Å, mentre l'elica normale indistorta un periodo compreso tra 6,15 e 6,50 Å. È prevedibile tuttavia che nel caso di eliche isodistorte l'angolo di valenza Φ si discosti sempre meno dal valore normale tetraedrico quanto maggiore è la distorsione. Ed infatti applicando il principio della isodistorsione ed introducendo il periodo misurato sperimentalmente, Φ risulta eguale a 110° per l'elica di 4 monomeri per passo ($c = 6,85$), a 112° per l'elica di 3,5 monomeri per passo ($13,85 < c < 14,0$ Å), a 114° di solito per l'elica di 3 monomeri per passo ($c \cong 6,5$ Å).

Tali considerazioni possono essere applicate anche ad altri tipi di catene elicoidali. L'elica prevista da Bunn e studiata da Liquori ⁽⁴⁾ per il poliisobutilene è anch'essa un'elica isodistorta derivata dalla B_4 .

Una conferma che l'elica del poli-4-metilpentene ha effettivamente 7 monomeri e 2 passi si è avuta dall'esame delle intensità sperimentali fornite da uno spettro di fibra.

A questo scopo abbiamo calcolato l'intensità distribuita sui vari strati del poli-4-metilpentene assumendo che la diffrazione fosse dovuta ad una sola molecola. In pratica questa distribuzione di intensità è modificata dalle interazioni fra molecole vicine ma è stato già da altri ⁽⁵⁾ constatato che le righe sperimentali intense vengono a cadere nei massimi delle intensità calcolate per una sola molecola.

Il calcolo con trasformate di Fourier della diffrazione dovuta a molecole aventi configurazione spiraliforme è già stato sviluppato da Cochran, Crick

(4) A. M. LIQUORI, « Acta Cryst. », 8, 345 (1955).

(5) W. COCHRAN e F. H. C. CRICK, « Nature », 169, 234 (1952).

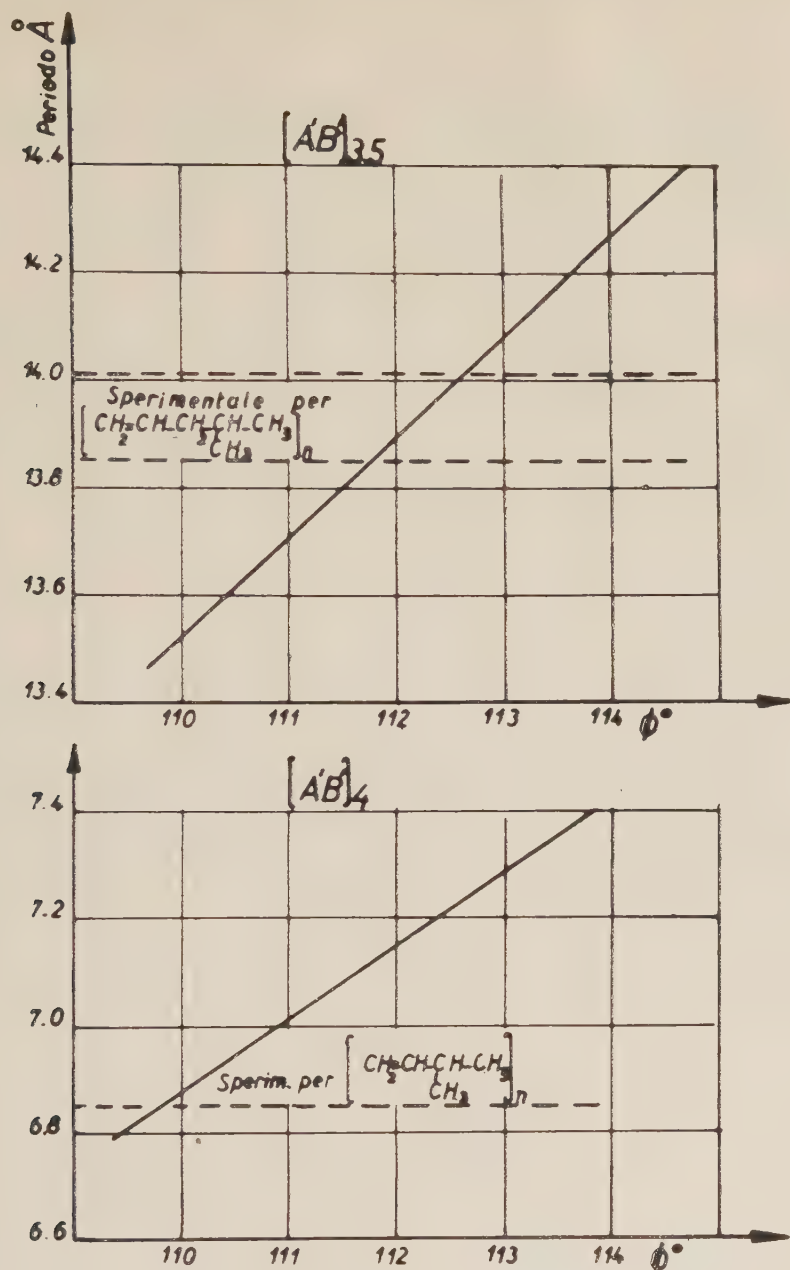


Fig. 4. - Variazione del periodo di eliche isodistorte in funzione dell'angolo di valenza.

e Vand ⁽⁶⁾. Questi autori riportano l'espressione vettoriale del fattore di struttura F (dato dalla relazione (3)) per una catena spiraliforme costituita da eliche discontinue di raggio r ; sfasate rispetto ad un certo sistema di

(6) W. COCHRAN, F. H. C. CRICK, V. VAND, « Acta Cryst. », 6, 581 (1952).

riferimento (r, φ, z) di un angolo φ_j e di z_j , nel punto R, ψ, l del reticolo reciproco:

$$(3) \quad F = \sum_n \sum_j f_j J_n(2\pi R r_j) e^{i \left\{ n \left(\psi + \frac{1}{2} \pi - \varphi_j \right) + 2\pi \frac{l z_j}{c} \right\}}.$$

Gli indici n delle funzioni di Bessel (J_n) sono forniti dalla relazione

$$l/c = n/P + m/p$$

dove c è il periodo del cristallo, P il passo dell'elica, p il periodo per monomero ed m un intero qualunque.

L'intensità nel punto R, ψ, l , a meno di fattori dipendenti solo da R e l è data da

$$(4) \quad F \cdot F^* = \sum_j \sum_h \sum_p \sum_n J_{nj} \cdot e^{i \alpha_{nj}} \cdot J_{ph} e^{-i \alpha_{ph}}$$

(dove $F^* =$ coniugato di F), e dove si è posto

$$J_{nj} = J_n(2\pi r_j R)$$

$$\alpha_{nj} = n \left(\psi + \frac{1}{2} \pi - \varphi_j \right) + \frac{2\pi l z_j}{c}.$$

L'intensità ottenibile sperimentalmente dalla diffrazione dovuta ad una sola molecola è funzione solo di R e l e corrisponde alla somma delle intensità distribuite sulla circonferenza di raggio R del reticolo reciproco giacente sul piano l .

Sarà perciò sufficiente sviluppare l'integrale

$$(5) \quad I = \int_0^{2\pi} F F^* d\psi$$

che tenuto conto della (4) dà:

$$(6) \quad I = \hat{F}^2 = \sum_n \sum_j \sum_h J_{nj} \cdot J_{nh} \cos(\alpha_{nj} - \alpha_{nh}),$$

ossia:

$$(7) \quad \hat{F}^2 = \sum_n \left\{ \sum_j J_n(2\pi R r_j) \cos \left[\frac{2\pi l z_j}{c} - n \varphi_j \right] \right\}^2 + \\ + \sum_n \left\{ \sum_j J_n(2\pi R r_j) \sin \left[\frac{2\pi l z_j}{c} - n \varphi_j \right] \right\}^2$$

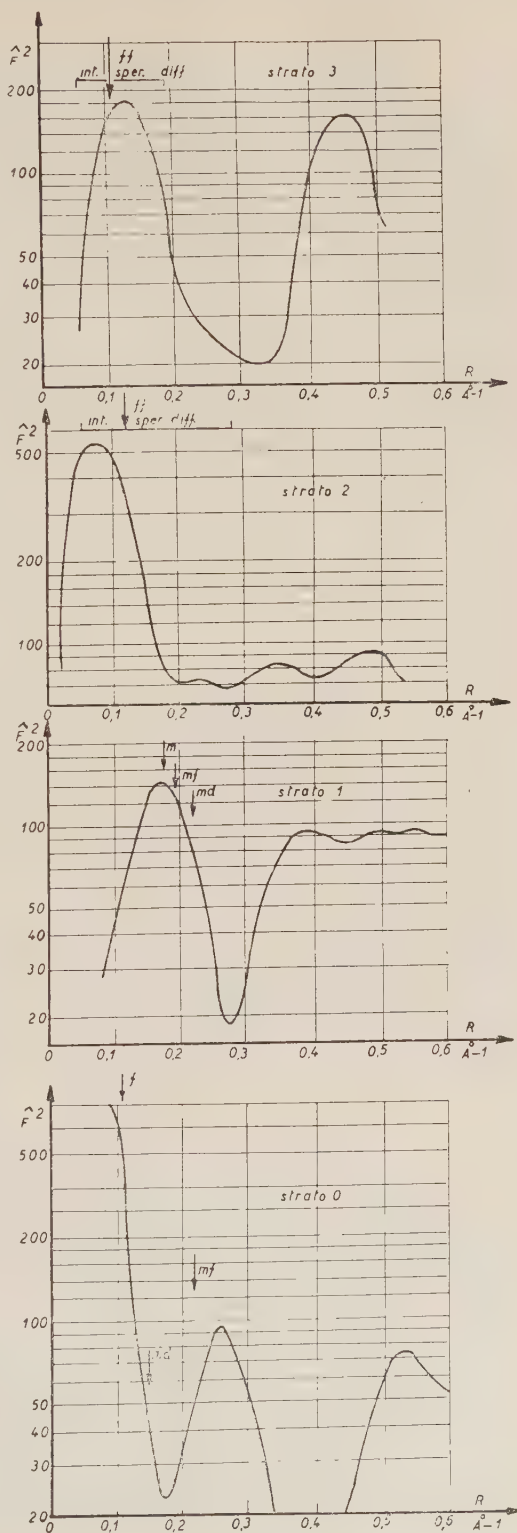
che presenta una maggiore comodità di calcolo.

Questa formula pur non tenendo conto degli effetti, sulla distribuzione delle intensità, per quanto detto sopra, delle interazioni tra molecole

vicine, fornisce un criterio già di per sè sufficiente a verificare il tipo di elica. Il calcolo è stato effettuato per un modello di elica isodistorta del 4-metilpentene, avente 3,5 monomeri per passo, e supposti i sostituenti laterali della catena in posizione di massimo allontanamento (staggered bonds) rispetto ai legami adiacenti. Nella fig. 5 è dato un confronto tra $\log \hat{F}^2$ (R, L) con la posizione effettiva delle righe osservabili sui vari strati di uno spettro di fibra del poli-4-metilpentene. Come era prevedibile teoricamente, i riflessi sperimentalmente forti cadono nelle regioni di massimo dello spettro continuo dovuto alla diffrazione per una sola molecola. L'accordo è da ritenersi soddisfacente.

Il disaccordo sarebbe stato totale se si fossero voluti confrontare i dati sperimentali con i dati calcolati per un'elica di 7 monomeri e 1 o 3 passi, in quanto i massimi sperimentali sarebbero caduti nelle regioni di minimo calcolate. Riteniamo anzi che uno studio del genere sia suscettibile di estensione anche ad altre macromolecole, come, per esempio, il poliisobutilene, e ci ripromettiamo noi stessi di estenderlo ad altri polimeri isotattici.

Fig. 5. - Intensità distribuita, diffratta sui vari strati, da una molecola di poli-4-metilpentene, calcolata per un'elica $(A'B')_{3.5}$ di periodo 13.85 Å. È indicata l'intensità e con frecce la posizione delle principali riflessioni sperimentali.



Fisiologia vegetale. — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* — XV. *Azione inibente dell'acido deidroascorbico sull'attività deidrogenasica di preparati enzimatici vegetali*^(*). Nota di ERASMO MARRÈ, GIANNINO LAUDI e ORESTE ARRIGONI, presentata^(**) dal Socio S. TONZIG.

Alcune esperienze, descritte in un precedente lavoro [1], rivelavano la capacità degli acidi ascorbico e deidroascorbico di influenzare *in vitro*, in estratti grezzi o parzialmente purificati di tessuti di piante superiori, l'attività di diversi sistemi deidrogenasici. Tale reperto appariva di singolare interesse sia ai fini del problema del meccanismo d'azione dell'acido ascorbico sulla cellula vegetale, sia a quelli dello stesso meccanismo d'azione dell'auxina: in quanto altre ricerche eseguite in questo Istituto suggerivano la possibilità che molti degli effetti dell'auxina potessero ricondursi alla sua capacità di controllare il metabolismo dell'acido ascorbico ed, in particolare, l'equilibrio tra le due forme ossidata e ridotta dello stesso [2, 3].

Nella presente ricerca abbiamo esteso e approfondito i risultati precedentemente ottenuti, prendendo in esame l'azione *in vitro* dei principali componenti del sistema dell'ascorbico, e cioè l'acido ascorbico (AA), l'acido deidroascorbico (DHA) e l'acido 2, 3-dichetogulonico (DKG) su alcuni tra i più importanti sistemi deidrogenasici, quali quelli ossidanti il succinato ed il glucoso-6-fosfato. I risultati qui esposti confermano, completandoli ed escludendo possibili cause di errore, quelli precedenti circa l'azione inibente del DHA; rettificano quelli relativi all'apparente azione di stimolo dell'AA, risultata dipendente da condizioni particolari della tecnica seguita; e, infine rivelano come praticamente nullo sia, sull'attività dei sistemi respiratori studiati, l'effetto del DKG, derivante dal DHA per rottura dell'anello lattico.

MATERIALI E METODI.

L'azione dei vari componenti il sistema dell'ascorbico sulla succinodidrogenasi è stata studiata su preparati mitocondriali, ottenuti per centrifugazione frazionata e lavaggio (Laties [4]) da apici di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum*, var. Alaska), coltivate per 7 giorni a 25 gradi C. L'azione sulla glucoso-6-fosfato deidrogenasi è stata studiata, oltre che su preparati mitocondriali, anche su preparati enzimatici ottenuti dallo stesso materiale per precipitazione frazionata con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ (utilizzando in genere la frazione

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

precipitante tra 10 e 50% di saturazione) seguita da dialisi contro tampone ai fosfati 0,05 M, pH 7,3. In entrambi i casi l'attività deidrogenasica veniva determinata mediante la tecnica al cloruro di trifeniltetrazolio (TTC), applicata nel vuoto secondo Marrè e Servettaz [5]. Risultati pienamente concordanti sono stati ottenuti in prove di controllo mediante il metodo di Thunberg al bleu di metilene.

Come reagenti abbiamo utilizzato: TTC, saccarosio (per la preparazione dei mitocondri), acido ascorbico e acido succinico Merck; glucosio-6-fosfato (Gl-6-P), trifosfopiridinnucleotide (TPN) e triidrossimetilaminometano (TRIS) Sigma. L'acido deidroascorbico è stato in alcuni casi acquistato come tale dalla N.B.C. di New York, in altri da noi preparato da AA per ossidazione con bromo [6] seguita da neutralizzazione parziale (pH 5) in TRIS 0,1 M (risultato notevolmente efficace nel ritardare la reazione $\text{DHA} \rightarrow \text{DKG}$, 7). L'acido DKG è stato da noi preparato secondo Penney e Zilva [8].

ESPERIENZE E RISULTATI.

A) *Azione dell'acido ascorbico.*

L'acido ascorbico, in esperienze precedenti [1], si era mostrato capace di un irregolare, ma talora notevole, effetto di stimolo dell'attività deidrogenasica. Tale effetto non era imputabile alla riduzione diretta dell'indicatore (TTC) da parte dell'AA: fenomeno che compare solo per pH superiori a 7,5 (nessuna riduzione del TTC, nelle nostre condizioni di esperienza, si è osservata in assenza di enzima o di substrati, o in presenza di preparati inattivati con calore). D'altra parte l'attivazione da AA risultava limitata al primo periodo di incubazione, per quindi rapidamente ridursi fino a scomparire: il che suggeriva che essa potesse imputarsi alla capacità dell'AA di sequestrare durante l'incubazione sotto vuoto, ossidandosi, piccole quantità di ossigeno residuo. Infatti l'ossigeno compete energicamente col TTC per l'idrogeno staccato dai substrati aggiunti all'incubato [5] e, d'altro lato, tutti i nostri preparati enzimatici presentavano una notevole attività ascorbico-ossidasica. Tale ipotesi è risultata legittima in base ad esperienze da cui si è rilevato che l'effetto attivante dell'AA appare solo in condizioni di vuoto parziale, mentre in ambiente praticamente privo di ossigeno tale composto risulta del tutto inattivo, almeno per quanto riguarda l'attività delle deidrogenasi in questione (Tabella I).

B) *Azione dell'acido deidroascorbico.*

L'azione inibente dell'acido deidroascorbico sia sulla succino-deidrogenasi che sulla Gl-6-P-deidrogenasi risulta dai dati delle Tab. II e III e dalle figg. 1 e 2, concentrazioni in DHA fino a $3 \cdot 10^{-4}$ M esplicando ancora un ben sensibile effetto. Alcune difficoltà d'ordine tecnico rendono difficile una trat-

tazione su base cinetica del fenomeno. La tendenza del DHA, a un pH vicino alla neutralità (quale richiesto dai sistemi enzimatici studiati), a passare rapidamente a DKG, tendenza solo parzialmente ostacolata dall'effetto protettore del TRIS e dei componenti proteici dell'incubato [9], oltre al costringerci

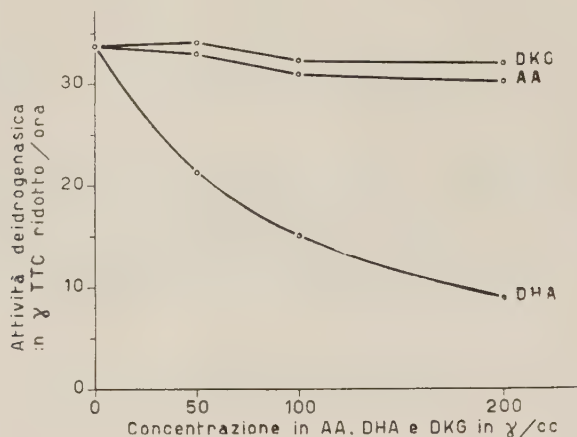


Fig. 1. - Azione dell'AA, del DHA e del DKG su l'ossidazione del succinato da parte di un preparato mitocondriale di pisello. Composizione dell'incubato: contenuto in mitocondri corrispondente a 3 grammi di peso fresco; succinato, 0,01 M; tampone al TRIS 0,2 M, pH 7,2; saccarosio, 0,5 M. Temperatura, 20°C. Tempo di incubazione, 30 min. pr. Dati come media di due determinazioni.

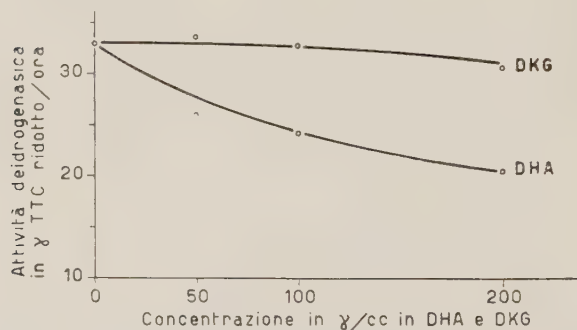


Fig. 2. - Azione del DHA e del DKG su un preparato purificato di glucosio-6-fosfato deidrogenasi di pisello. Composizione dell'incubato: enzima frazionato con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$, 10 mg di proteine; glucosio-6-fosfato, 10^{-2} M; TPN 20; tampone al TRIS 0,1 M; pH 7,2. Temperatura, 20° C. Tempo di incubazione 40 min. pr. Dati come media di due determinazioni.

ad aggiungere alle prove il composto solo parzialmente neutralizzato, e quindi a limitarci a concentrazioni finali in DHA relativamente basse, onde non spostare il pH del sistema, rende difficile una valutazione esatta del rapporto

tra concentrazione (reale) in DHA nell'incubato ed intensità dell'azione inibente. I valori di inibizione da noi ottenuti sono in realtà da considerarsi determinati da concentrazioni in deidroascorbico alquanto inferiori a quelle apparenti, in quanto i prodotti di trasformazione del DHA risultano, come sotto esposto, del tutto inattivi. La possibilità di un'interferenza, sull'effetto inibente del deidroascorbico, di altre condizioni quali variazioni del pH, impurità del composto (metalli pesanti o, nel caso della preparazione dall'AA, bromuro) appare nettamente esclusa dai dati della Tabella III che dimostrano come l'aggiunta, anziché di DHA, di una soluzione di DHA allo stesso titolo, ma precedentemente portata con NaOH per 20 min. pr. a pH 7,5 (pH sufficiente a determinare la rottura dell'anello lattonico) e quindi riportata con HCl al pH iniziale, risulti del tutto inattiva sulle deidrogenasi studiate. Dalla stessa Tabella III risulta pure esclusa la possibilità che l'inibizione da DHA derivi da un effetto di competizione tra DHA e TTC, quale quello da noi rilevato in altre condizioni sperimentali (in presenza di glutatione e di glutatione- e ascorbico-riduttasi [10]).

TABELLA I.

Diverso effetto dell'acido ascorbico (AA) sulla riduzione del TTC in condizioni di vuoto parziale e di vuoto spinto.

Composizione dell'incubato: enzima frazionato con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$, 10 mg proteine; glucosio-6-fosfato 10^{-2} M; TPN 20 γ ; tampone al TRIS 0,1 M; pH 7,2. Temperatura 20°C. Tempo di incubazione 30 min. pr. Dati come media di due determinazioni.

Ambiente	Aggiunte all'incubato		Attivazione in per cento
	Nessuna γ TTC	AA 200 γ ridotto	
Aria	5	21	320
Vuoto parziale (circa 100 mm Hg) .	17	22	29
Vuoto spinto (meno di 5 mm Hg) . . .	24	25	4

C) Azione dell'acido dichetogulonico.

I dati della fig. 1 e delle Tabelle II e III dimostrano come il DKG, preparato secondo Penney e Zilva [8], come pure il composto (presumibilmente DKG) derivato da soluzioni di DHA portate a pH 7,5 risultino praticamente privi di azione sull'attività delle due deidrogenasi studiate. L'azione inibente del deidroascorbico si rivela quindi legata alla presenza dell'anello lattonico.

TABELLA II.

Azione dell'acido deidroascorbico (DHA), dell'acido ascorbico (AA) e dell'acido dichetogulonico (DKG) sull'attività della glucosio-6-fosfato-deidrogenasi di mitocondri di apici di pisello eziolati

Composizione dell'incubato: mitocondri lavati in TRIS 0,2 M corrispondenti a 5 gr. di peso fresco per prova; glucosio-6-fosfato, 10^{-2} M; TPN, 20 γ ; tampone al TRIS 0,2 M, pH 7,2, addizionato con saccarosio 0,5 M. Temperatura 20°C. Tempo di incubazione 20 min. pr. Dati come media di due determinazioni.

Aggiunte all'incubato	γ TTC ridotto	Inibizione %
Nessuna	35	—
DHA 200 γ	19	46
AA 200. γ	37	—
DKG 200 γ	34	3

TABELLA III.

Inattivazione del DHA in seguito alla sua conversione a DKG a pH 7,5

Composizione dell'incubato: enzima frazionato con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$, 10 mg di proteine, glucosio-6-fosfato 10^{-2} M, TPN 20 γ ; tampone al TRIS 0,1 M, pH 7,2. Temperatura 20°C. Tempo di incubazione 25 min. pr. Dati come media di due determinazioni.

Aggiunte	pH finale dell'incubato	γ DHA ridotti a AA durante l'esperienza	γ TTC ridotto	Inibizione %
Nessuna	7,2	0	21	—
DHA 200 γ	7,1	0	8,5	60
DKG (*) 200 γ	7,0	0	19,5	7,5

(*) DKG ottenuto da DHA portato a pH 7,5 per 20 min. pr., quindi riportato al pH di partenza.

CONCLUSIONI.

Riassumendo:

I. - L'acido deidroascorbico inibisce energicamente, in preparati enzimatici parzialmente purificati ed in preparati mitocondriali, l'attività dei sistemi ossidanti il Gl-6-P e il succinato. Tale effetto è ancora ben evidente

per concentrazioni in DHA pari a $3 \cdot 10^{-4} M$, e viene osservato in condizioni tali da escludere interferenze da parte di fattori quali variazioni del pH, presenza di impurità e fenomeni di competizione per l'idrogeno, proveniente dai substrati usati, tra il DHA e l'indicatore adottato (TTC).

II. — L'acido ascorbico, in condizioni di pratica assenza di ossigeno, si rivela privo di qualsiasi significativa attività sulle deidrogenasi studiate. L'effetto attivante precedentemente osservato, in condizioni di vuoto insufficientemente spinto, appare imputabile alla capacità dell'AA, in presenza di ascorbico ossidasi, di rimuovere, ossidandosi, le tracce di ossigeno che all'inizio della reazione rallentano la riduzione dell'indicatore dell'attività deidrogenasica.

III. — L'acido 2,3-dichetogulonico, derivato dal DHA per rottura dell'anello lattonico, appare del tutto inattivo per quanto riguarda le deidrogenasi del Gl-6-P e del succinato.

Questi risultati, confrontati con altri ottenuti in questo laboratorio [1, 11] suggeriscono che al DHA possa risalire la responsabilità principale dell'azione inibente sulla respirazione e la crescita, indotta *in vivo* dal trattamento con acido ascorbico (in buona parte rapidamente trasformato in DHA nei tessuti vivi). Essi sembrano inoltre pienamente in accordo con l'ipotesi, precedentemente espressa, che l'azione dell'auxina sulla respirazione e sulla crescita possa, almeno in parte, derivare dalla sua capacità di inibire l'ossidazione dell'AA a DHA, mantenendo su bassi valori la concentrazione di questo composto nella cellula [2, 12, 13].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] S. TONZIG, F. TREZZI, G. LAUDI e E. MARRÈ, « Atti Acc. Lincei », ser. VIII, vol. IV, fasc. 3 (1955).
- [2] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 18, p. 540 (1955).
- [3] S. TONZIG e E. MARRÈ, in corso di stampa.
- [4] G. G. LATIES, « Plant. Physiol. », 28, 577 (1953).
- [5] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Gior. Bioch. », 4, 10 (1955).
- [6] J. H. ROE e M. J. OESTERLING, « Jour. Biol. Chem. », 152, 511 (1944).
- [7] H. BORSOOK, H. W. DAVENPORT, C. E. P. JEFFREYS e R. C. WARNER, « Jour. Biol. Chem. », 117, 237 (1937).
- [8] J. R. PENNEY e S. S. ZILVA, « Bioch. Jour. », 39, 1 (1945).
- [9] O. ARRIGONI, in corso di stampa.
- [10] E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 16, 649 (1954).
- [11] G. LAUDI, in corso di stampa.
- [12] E. MARRÈ, « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 16, p. 758 (1954).
- [13] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 18, p. 546 (1955).

Fisiologia. — *Le cure parentali in relazione all'ambiente*^(*). Nota II di ENRICO MESSERI, presentata^(**) dal Socio C. CIACCIO.

Considerando la nascita dal punto di vista ecologico e quindi come il primo impegno assuefattivo a un profondo cambiamento dell'ambiente esterno, prendiamo in rapido esame tutte quelle azioni e provvidenze che i genitori attuano con lo scopo di tutelare ed aiutare il neonato contro le avversità locali. Risalendo nella gerarchia dei mammiferi si osservano degli atteggiamenti istintivi e delle attività complesse dei genitori legate verosimilmente alla difesa del neonato per aiutarlo a superare le prime difficoltà di una vita autonoma. Alcuni esempi fra i moltissimi che caratterizzano i costumi delle varie specie di mammiferi rendono evidente la stretta dipendenza fra azione parentale e ambiente. L'ippopotamo partorisce sott'acqua e il neonato nuotando raggiunge la superficie per compiere i primi atti respiratori mentre per nutrirsi è costretto a tuffarsi di nuovo per succhiare il latte materno; questi strani costumi anfibi di questo mammifero manifestano chiaramente quanto l'ambiente sia importante nel modellare istinti ed azioni a prima vista non ben comprensibili. Nelle specie superiori (antropomorfi) la madre porta al seno il figlio, come la donna, mentre nelle altre è il neonato che si conquista attivamente l'alimento, sia che la madre allatti in posizione eretta, sia sdraiata, e mentre succhia avidamente, esso produce con la testa o con le zampe un massaggio sulla mammella per facilitarne la secrezione. Altra facilitazione per la suzione del latte è presentata dall'esempio dell'elefante che spesso cerca un luogo lievemente rialzato a cavallo del quale si dispone la madre si da avvicinare il più possibile il neonato alle proprie mammelle. Molto complessa è la conquista dell'alimento nei marsupiali (canguri), dove il neonato di dimensioni estremamente piccole rispetto alla madre, uscito dal canale di parto si arrampica attraverso il pelo dell'addome materno per raggiungere il marsupio, dove si attacca al capezzolo, e data la sua immaturità fisiologica, si adatta nel marsupio come in una incubatrice. Esso aderisce al capezzolo in maniera tenace e permanente poiché l'estremità di esso si inturgidisce entro la cavità orale del neonato sì da non poter essere abbandonato per molto tempo, in ciò favorito dalla diretta comunicazione delle cavità nasali con il laringe, atta a permettere la suzione del latte e la respirazione contemporaneamente. Ancora più complesso ed indicativo dal punto di vista ecologico è il comportamento di una specie di marsupiale (koala) nel quale esigenze vitali ed ambientali si compenetrano ancor più intimamente. Questo piccolo e grazioso orso australiano, che si ciba esclusivamente delle foglie di Eucalipto, possiede

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale dell'Università di Messina (Direttore prof. A. Alibrandi).

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

il caratteristico marsupio con l'apertura caudale secondo un adattamento ambientale, connesso con lo svezzamento del neonato, al quale la madre fornisce una specie di poltiglia di foglie di Eucalipto già digerite, e ciò accade ad intervalli regolari, tanto che l'intestino materno esplica due funzioni distinte: una nutritiva per il figlio e l'altra intervallare normalmente escretiva per la madre. In alcune specie animali poi abbiamo che le cure parentali sono addirittura negative, spesso da parte paterna, e caratterizzate da ostilità, tanto che la madre subentra a difesa ad oltranza dei figli, come succede in alcuni carnivori, mentre invece negli antropomorfi il padre partecipa spesso alle sollecitudini della madre per la prole. Talvolta la madre arriva ad eplicare veri conati di interventi terapeutici verso il proprio neonato come accade presso qualche specie di scimmia dove il neonato asfittico viene liberato dalle mucosità introdotte nelle prime vie respiratorie attraverso un atto di soffiamento nella sua bocca da parte della madre, così pure l'intenso leccamento sul neonato serve non solo per asciugarlo ma anche per facilitarne l'evacuazione intestinale e vescicale. Anche la liberazione del feto dalle membrane, la recisione del funicolo ombelicale con i denti e l'ingestione della placenta da parte della madre, vanno considerate sotto questo aspetto, pur rappresentando la placenta che viene divorata, anche un deposito di ormoni falattogeni, che favoriscono l'inizio della lattazione (Messori). Atti di protezione termoregolatrice vengono compiuti dalla madre più spesso per incrementare il calore del neonato con sostanze termoisolanti, come fibre vegetali (scoiattolo), o peli staccati dall'addome materno (roditori), ma qualche volta anche per proteggere dagli eccessivi calori, in ambienti tropicali, cercando di proiettare la propria ombra sul figlio (zebra).

GENESI DEGLI ADATTAMENTI ECOLOGICI. — Questi esempi, che potrebbero essere moltiplicati indefinitivamente, ci additano la straordinaria potenza di stimolo che l'ambiente impone alla vita, e la risposta di questa alla ricerca di un *modus vivendi* idoneo alla sopravvivenza. Alcune teorie moderne tendono a considerare l'adattamento all'ambiente come dovuto alla ereditarietà dei caratteri acquisiti, altri come dovuto all'azione della selezione naturale sulle mutazioni genetiche casuali; altri infine, suggestivamente, lo considerano un processo di assimilazione genetica di modificazioni esogene (Waddington). Esistono in natura esempi molto palesi in appoggio a questa teoria e sembra impossibile tentare di spiegare questi fenomeni senza considerare la possibile funzione dell'ambiente nella loro determinazione. Le larve di alcuni tritoni allevati in acqua povera di ossigeno, presentano le branchie più grandi e più sottili dei controlli, adattamento mirabile di superficie e di spessore della zona respiratoria per acconsentire una più rapida assunzione dell'ossigeno, scarsamente disciolto nell'acqua; in tal caso il vantaggio di adattarsi all'ambiente è questione vitale, ed è naturale che solo chi è dotato di largo potere di adattamento sopravviva, in virtù di un precedente patrimonio ereditario che ne permette l'evoluzione. Vi sono però degli adattamenti pseudoesogeni, vale a dire apparentemente evocati dall'esterno, essendo invece in funzione

del patrimonio ereditario dell'individuo, indipendentemente dall'ambiente. Sembra che l'evoluzione di un tale adattamento possa essere sostenuta dal processo di selezione naturale delle mutazioni casuali, che potrebbero avere creato un tale fenotipo, indipendentemente dai fattori locali. Il fatto che l'ispessimento della cute della pianta dei piedi sia già presente nell'embrione (come ha dimostrato Semon) e quindi prima che abbia potuto determinarsi tale fenomeno con l'uso degli arti e con la pressione su tale regione, ci porta a considerare che non già i fattori esogeni ambientali, ma la costituzione ereditaria ha permesso tali strutture. Così analogamente vanno considerate le speciali callosità che lo struzzo presenta nella parte inferiore del corpo, in corrispondenza di punti di contatto col terreno quando si accovaccia, queste strutture sono indipendenti dalla pressione delle relative parti cutanee sul terreno, perché appaiono già nell'embrione (Duerden); così il dente molare del dugongo, che dalla forma conica originaria si appiattisce prima ancora della usura masticatoria (Kükenthal). Verosimilmente tali fenomeni sono dovuti a funzioni ambientali su basi genetiche, evocate dall'esterno, e che la selezione naturale ha fissato in forme ereditarie. Tale modo di considerare questi rapporti fra ecologia e genetica appartiene alla pura ipotesi e, per quanto suggestiva e suffragata da molti esempi naturali, non può per ora uscire dal campo della teoria.

Ritornando ad esaminare l'evento della nascita dell'uomo in confronto agli altri animali; vediamo che esso si comporta in modo del tutto eccezionale per la lentezza della sua maturazione. Alcuni raffronti con gli animali domestici servono a dare un'idea della portata di questo fenomeno. Il coniglio raddoppia il peso della nascita in 6 giorni, il cane lo raddoppia in 10 giorni, il bove, che ha un periodo di gestazione di 9 mesi, pari a quello dell'uomo, raddoppia il proprio peso della nascita (ca. Kg. 40) in 50 giorni, mentre l'uomo raggiunge alla nascita un peso di poco superiore ai Kg. 3 ed impiega ca. 6 mesi per raddoppiarlo.

Questa scarsa spinta verso la maturità della nostra specie può spiegare la conservazione di caratteri a tipo fetale e giovanile nell'uomo adulto, che rappresenterebbe, secondo Bolk, una forma neotenica, cioè fetalizzata in vario grado a seconda delle diverse razze.

Esiste infine un lato del complesso rapporto individuo-ambiente che è di esclusiva pertinenza dell'uomo: esso riguarda l'insorgere e lo svilupparsi delle funzioni spirituali. Chiuderemo quindi questa breve rassegna con alcune considerazioni al riguardo.

È noto che il peso del neonato umano (gr. 3250) è molto superiore a quello delle specie più vicine (scimmia gr. 1500), mentre il peso di alcune scimmie adulte (orango e gorilla) è superiore a quello dell'uomo. Come spiegare queste notevoli differenze ponderali in relazione alle nozioni biologiche che si posseggono su questi antropomorfi? L'elevato peso dell'uomo alla nascita sembra essere un adattamento di compenso di fronte all'enorme peso del suo cervello (nell'uomo 370 gr., nella scimmia 130 gr.). Un altro dato assai interessante è quello che riguarda l'accrescimento dell'uomo in confronto a quello

della scimmia. L'accrescimento non solo nell'uomo è più intenso che nella scimmia durante il periodo fetale, ma continua con la medesima velocità per tutto il primo anno di vita sì da triplicare il peso della nascita (Portmann), poi il ritmo di accrescimento si rallenta in corrispondenza del cosiddetto periodo del primo «riempimento». Verso il quinto anno si nota un nuovo acceleramento dell'accrescimento a tipo spiccatamente differenziativo, a cui segue il secondo periodo di «riempimento»; al dodicesimo anno si ripete un secondo periodo di aumento di statura, coincidente con la crisi puberale, al termine del quale l'uomo è ancora molto lontano dalle caratteristiche dell'adulto, che raggiunge dopo circa altri dieci anni di adolescenza (Lange, Everingham, Scannon). Nella scimmia invece l'accrescimento embrionale è, come abbiamo veduto, più lento e successivamente non si verifica questo forte divario fra il primo anno di accrescimento ed i successivi, ma esso presenta un andamento molto più uniforme dalla nascita alla maturità.

È noto infine che l'indice di «massa del mantello cerebrale» va gradatamente aumentando nella scala zoologica, presentando un forte distacco nell'uomo (0,77 nel riccio, 5 nella lepre, 38 nel macaco, 49 nello scimpanzè, e 170 nell'uomo) ed è pure noto che analogamente a questo indice, costantemente aumenta il periodo di gestazione; a questa regola fa eccezione l'uomo nel quale la durata della gravidanza è circa uguale a quella della Orangutang (275 giorni). Facendo base su questi valori, per raggiungere la maturità cerebrale umana, gli antropoidi dovrebbero avere una gravidanza più lunga di circa un anno di quella dell'uomo; e a sua volta la gravidanza umana, portata sul piano di quella degli altri mammiferi, dovrebbe prolungarsi fino a circa 21 mesi, comprendendo anche il periodo in cui il neonato presenta un accrescimento a carattere fetale. Si avrebbero così nel periodo fetale umano, considerato da questo punto di vista, due fasi distinte: una intrauterina di 9 mesi, ed una extrauterina di 12 mesi. Tutto ciò corrisponde verosimilmente alle esigenze ecologiche speciali dell'uomo, che a differenza di tutti gli altri animali, ha bisogno di completare il suo sviluppo, immerso, molto precocemente, nell'ambiente esterno, dove nelle cure parentali e superparentali (civiltà, socialità, spiritualità) trova un archetipo sul quale è costretto a modellarsi. L'ambiente sociale è necessario fra l'altro per la formazione della parola e per lo sviluppo e la correlazione delle facoltà intellettive e della stazione eretta, le tre caratteristiche peculiari dell'uomo, che nei secoli sono andate perfezionandosi od evolvendosi verso forme di socialità più complesse ed universali (famiglia, tribù, popolo, stato, confederazione, ecc.). L'uomo all'atto della nascita si dovrebbe considerare pertanto un prematuro normalmente fisiologico, che ha compiuto nell'utero materno la fase di «prole inetta» e raggiunge la fase di «prole precoce» nel primo anno di vita. Se si considera poi il suo completo sviluppo ed il suo inserimento spirituale nel mondo sociale, esso ha bisogno di cure parentali assai lunghe da parte dei genitori e della società, che seguitano a modellarlo fino alla tarda età di circa 20-26 anni, fino al raggiungimento del completo accrescimento psicosomatico! A questa lenta assimilazione dell'uomo nell'ambiente sociale del proprio gruppo etnico

corrisponde il lento accrescimento somatico e psicologico che culmina con una sorta di svincolamento dall'ambiente fisico terrestre, grazie al predominio che su di esso può esercitare la intelligenza umana, specialmente se messa in azione da un gruppo organizzato di individui ai quali il nuovo essere in sviluppo si è a poco a poco assimilato. Sotto questo punto di vista l'uomo rappresenta non solo l'ultimo gradino della scala zoologica, ma un regno naturale a sé, unico e sovrano, poiché l'adattamento dell'uomo all'ambiente, grazie al suo imperio sugli elementi che lo circondano, è straordinariamente vasto e complesso. Nessuna specie animale ha avuto ed ha un *habitat* che si possa paragonare all'ecumene. Da millenni l'uomo ha varcato gli angusti confini della sua culla di origine per dilagare su tutto il mondo, dalle infuocate terre tropicali alle gelide lande polari, ovunque si è adattato ad ambienti, a climi, ad alimentazioni e a lavori diversi, con un ritmo impressionante, specie nell'ultimo secolo (mezzi di comunicazione, scoperte scientifiche e tecniche), dimostrando una vera sovranità di conquista dell'ambiente, in confronto alle limitate autonomie ecologiche degli altri animali. Mai una scimmia ha potuto raggiungere la Groenlandia, né un orso bianco ha potuto migrare nel Brasile, mentre l'uomo ha conquistato i poli e le più alte vette del mondo.

Proprio alle caratteristiche della psiche umana ed alle realizzazioni ecologiche che ne conseguono, l'uomo deve il suo comportamento particolare nei riguardi dell'ambiente. Infatti, la nascita, come abbiamo brevemente cercato di lumeggiare, mentre costituisce forse il punto più cruciale ed obbligato di ancoramento ad un determinato ambiente per tutte le specie animali, per l'uomo invece, grazie alle cure parentali e soprattutto alla assimilazione nella vita sociale del suo gruppo etnico, offre la possibilità di sciogliere i legami ambientali. In conseguenza di ciò i popoli possono ormai, senza limiti geografici, migrare lungo i meridiani ed i paralleli del nostro pianeta, obbedendo al biblico comandamento « Implete terram et subiscite eam ».

BIBLIOGRAFIA.

- G. H. WADDINGTON, « Endeavour », vol. XXII, N. 47 (1953).
H. HEDJGER, « Rivista Ciba », Anno VI, N. 38 (1952).
A. PORTMANN, *Idem*.
LANGE, EVERIGHAM, SCANNON, *Idem* in PORTMANN.
E. MESSERI, « Rivista Clinica Pediatrica », N. 11 (1936).
E. MESSERI e G. PICCARDI, « Rivista Clinica Pediatrica », N. 1 (1946).
E. MESSERI e G. PICCARDI, « Rivista Clinica Pediatrica », N. 10 (1946).
E. MESSERI e G. PICCARDI, « Rivista Clinica Pediatrica », N. 3 (1946).
E. WEISBACH, « Simposium Ciba », vol. 3, N. 2 (1955).
L. CELLETTI, *Ostetricia*, Ediz. Abruzzini. Roma 1951.
R. SEMON, « Arch. Mikr. Anat. », 82, 164 (1913).
G. H. WADDINGTON, « Nature », London, 150, 563 (1952).
G. G. WADDINGTON, « Simp. Soc. Exp. Biol. », 1953.
J. E. DUERDEN, « Amer. Nat. », 54, 286 (1920).
P. WEISS, « Yale Journ. Biol. Med. », 19, 235 (1947).

- E. ESENTE e NOCCIOLI, « Rivista Clinica Pediatrica », marzo 1955, N. 3.
E. MESSERI, « Rivista Clinica Pediatrica », N. 8 (1940).
A. PORTMANN, *Biologische Fragmente zu Einer Lehre vom Menschen*, 2^a Ed., Basilea 1951.
R. MEARNs e YERKES, *Chimpanzees, a Laboratory Colony*, 4^a ed., New Haven (1945).
STEMMLER et MORATH, *Brutpflege bei Schlangen leben um Umwelt*, 1, 177 (1945).
G. BRANDES, *Buschi vom Orangsäugling zum Backenwülster*, Lipsia 1939.
DOLLMANN GUY, *Postnatal development of Kangaroos*, « Proc. Linn. Soc. », London, 151^a Sess., 19 (1938-39).
KENNETH J. H., *Gestation. Periods*, Edimburg 1947.
G. CHIARUGI, *Trattato di embriologia*. Soc. Ed. Libraria, Milano 1944.
M. CANELLA, *Antropobiologia*, Sansoni, Ed. Scient., Firenze 1943.

Fisiologia. — *Soppressione dell'atonia fastigiale del Gatto decerebrato mediante sezione del N. VIII contralaterale* (*). Nota di GIUSEPPE MORUZZI e OTTAVIO POMPEIANO, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Possiamo schematicamente distinguere tre tipi di rigidità da decerebrazione, come segue.

a) La rigidità sherringtoniana, del preparato che ha conservato tutte le sue afferenze [Sherrington ⁽¹⁾].

b) La rigidità vestibolare, che si osserva negli arti anteriori deafferentati, quando l'inibizione tonica che la nascondeva viene eliminata con la sezione post-toracica del midollo spinale [Liljestrand e Magnus ⁽²⁾, Stella ⁽³⁾], o la cerebellectomia totale ovvero la topectomia del *lobus anterior* [Stella ⁽³⁾]. Occorre precisare che la deafferentazione miotatica, acuta o cronica, non abolisce tutte le componenti estravestibolari del tono, riflesses [Magnus e de Klein ⁽⁴⁾] o automatiche [Cardin ⁽⁵⁾, Terzian e Terzuolo ⁽⁶⁾]. Il termine di rigidità vestibolare appare tuttavia giustificato, oltre che dalle necessità di schematizzare nella trattazione di meccanismi complessi, anche dal fatto che tale rigidità è abolita con la sezione ipsilaterale del N. VIII [Stella ⁽³⁾]. Questa operazione non sopprime invece la rigidità sherringtoniana [Sherrington ⁽¹⁾].

c) La rigidità miotatica, che si osserva dopo sezione bilaterale del N. VIII. Anche qui restano altre sorgenti riflesses, oltre a quelle miotatiche; ma il termine è giustificato dal fatto che la rigidità del Cane decerebrato, dopo sezione bilaterale del N. VIII e cerebellectomia, non è abolita dalla radico-

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Pisa e di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) C. S. SHERRINGTON, « J. Physiol. », XXII, 319 (1897-98).

(2) G. LILJESTRAND u. R. MAGNUS, « Pflüger's Arch. », CLXXVI, 168 (1919).

(3) G. STELLA, « Atti Soc. med. chir., Padova », XXIII, 5 (1944).

(4) R. MAGNUS, u. A. de KLEIN, « Pflüger's Arch. », CXLV, 455 (1912).

(5) A. CARDIN, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVIII, 368 (1952).

(6) H. TERZIAN e C. TERZUOLO, « Arch. Fisiol. », LIV, 37 (1954).

tomia dorsale dei primi quattro nervi cervicali [Stella ⁽⁷⁾]. Come è noto, non esistono apprezzabili componenti automatiche del tono, nel preparato acuto [Terzian e Terzuolo ⁽⁶⁾].

Le ricerche che vengono qui esposte sono state eseguite su 16 Gatti decerebrati, che presentavano atonia fastigiale crociata [Moruzzi e Pompeiano ⁽⁸⁾]. Esse sono state dedicate al problema dei rapporti fra efferenze fastigiali e afferenze miotatiche e vestibolari nella regolazione del tono posturale. La tecnica e la nomenclatura da noi usate si trovano in altre note [Moruzzi e Pompeiano ^(8,9)].

1. La rigidità sherringtoniana viene abolita da una lesione del polo caudale del nucleo del tetto contralaterale (atonia fastigiale crociata), ma riappare in tutta la sua intensità dopo deafferentazione dell'arto omologo contralaterale [Moruzzi e Pompeiano ⁽⁹⁾]. Le presenti ricerche dimostrano che la recisione unilaterale del N. VIII ha effetti crociati analoghi a quelli prodotti dalla radicotomia dorsale. Su uno sfondo di rigidità sherringtoniana si produceva il fenomeno dell'atonia fastigiale crociata e si procedeva quindi alla sezione del nervo del lato « spastico »; la rigidità ricompariva nel lato « atonico ». Diversi erano invece gli effetti ipsilaterali che su questo tipo di rigidità producono rispettivamente la deafferentazione miotatica e quella vestibolare, come già Sherrington ⁽¹⁾ aveva dimostrato: la deafferentazione miotatica provocava totale flaccidità, mentre la deafferentazione laberintica aveva scarsi effetti.

2. La rigidità vestibolare di arti anteriori acutamente o cronicamente (da 2 a 24 giorni) deafferentati veniva fatta palese con la sezione postbrachiale del midollo spinale, eseguita subito dopo, ovvero due giorni avanti, la decerebrazione. L'atonia fastigiale crociata era prodotta costantemente su questo sfondo d'ipertono estensore. Essa scompariva, e in sua vece ricompariva la tipica rigidità vestibolare, quando si sezionava il N. VIII del lato opposto. Ipsilateralmente a tale sezione, si osservava al contrario scomparsa della rigidità vestibolare, venendo così confermate precedenti osservazioni di Stella ⁽³⁾.

3. La componente miotatica della rigidità sherringtoniana era isolata con la sezione bilaterale acuta del N. VIII, previa o non sezione postbrachiale del midollo spinale. Su questo sfondo di rigidità miotatica era possibile produrre costantemente l'atonia fastigiale crociata. La deafferentazione acuta d'un arto « spastico » ne produceva la totale flaccidità, mentre la rigidità ricompariva nell'arto contralaterale « atonico ».

(7) G. STELLA, « Atti Soc. med. chir., Padova », XXIII, 17 (1944).

(8) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Rendiconti Accad. Lincei », XVIII, 420 (1955).

(9) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Rendiconti Accad. Lincei », in stampa.

4. Il rovesciamento dell'atonia fastigiale crociata, descritto nei paragrafi 1, 2 e 3, era un fenomeno costante e duraturo: era possibile seguirlo per tutta la durata della vita del preparato decerebrato (parecchie ore). Quando la lesione fastigiale era simmetrica, non si aveva atonia ma rigidità estensoria bilaterale.

Risulta dunque da queste ricerche, e da altre in precedenza comunicate [Moruzzi e Pompeiano ^(8,9)], che: *a*) l'atonia fastigiale crociata si osserva indifferentemente su uno sfondo di rigidità sherringtoniana, vestibolare o miotattica; *b*) essa è legata a una inibizione riflessa tonica, il cui punto di partenza è rappresentato dai recettori miotattici e laberintici del lato opposto; *c*) questi stessi recettori, pur essendo senza dubbio tonicamente attivi, non riescono a inibire il tono posturale del lato opposto, quando la lesione fastigiale è simmetrica, come è comprovato dalla rigidità intensa e bilaterale che si osserva in questa condizione sperimentale.

Un tentativo d'interpretazione deve muovere da questi dati di fatto.

Si può pensare innanzi tutto che le fibre fastigio-bulbari crociate (fascio di Russell) esercitino un'azione tonica di rinforzo sul tono estensorio, mentre le fibre fastigio-bulbari dirette, o le collaterali emesse eventualmente dal fascio di Russell prima dell'incrociamiento, avrebbero un'azione inibitrice. Veramente, questa è più che un'ipotesi, essendo avvalorata dai risultati degli esperimenti di stimolazione del polo caudale del nucleo del tetto, che inibisce ipsilateralmente e aumenta contralateralmente la rigidità estensoria. Non si esclude l'esistenza di sistemi fastigio-bulbari diretti ad azione facilitante [cfr. Sprague e Chambers ⁽¹⁰⁾, Moruzzi e Pompeiano ⁽¹¹⁾], ma per quanto concerne il polo caudale del nucleo del tetto essa non è stata finora provata.

La seconda ipotesi consiste nell'ammettere che la soppressione di una azione tonica facilitante renda i centri nervosi più sensibili all'inibizione riflessa. Quest'ipotesi è a sua volta avvalorata, per quanto indirettamente, dal marcatissimo aumento dell'intensità e della durata dell'inibizione del riflesso rotuleo, che si osserva nello *shock* spinale [Fulton, Liddell e Rioch ⁽¹²⁾]. Non si può del resto escludere che la liberazione dal freno inibitorio di neuroni vestibolari e dei motoneuroni α e γ [cfr. Rossi ⁽¹³⁾, Granit ⁽¹⁴⁾], ipsilaterali alla lesione fastigiale, si traduca in un aumento dell'inibizione crociata. I due meccanismi potrebbero coesistere e rinforzarsi a vicenda.

La terza ipotesi è un corollario delle precedenti. La rigidità da decerebrazione principierà a cedere nel lato privato dell'azione fastigiale (« atonico »); ciò porterà a una diminuzione dell'inibizione riflessa crociata che si esercita nel lato opposto (« spastico »), con conseguente aumento dell'attività dei nuclei

(10) J. M. SPRAGUE e W. W. CHAMBERS, « J. Neurophysiol. », XVI, 451 (1953).

(11) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper », XXX, 493 (1954).

(12) J. F. FULTON, E. G. T. LIDDELL e D. McK. RIOCH, « Brain », LIII, 311 (1930).

(13) G. ROSSI, « Arch. Fisiol. », XXV, 146 (1927).

(14) R. GRANIT, *Receptors and sensory perception*. New Haven, Yale University Press,

vestibolari e della scarica tonica dei recettori miotatici di questo stesso lato. Il lato « atonico » verrà allora più intensamente inibito, creandosi in tal modo un vero circolo vizioso che porterà alla totale scomparsa, o alla marcatissima riduzione, della rigidità estensoria di un lato (arto « atonico »). Se ora viene eseguita una lesione fastigiale nel punto simmetrico, tutto il cammino sarà percorso a ritroso, finché il tono posturale estensorio apparirà di un medesimo grado in entrambi i lati. Il livellamento avverrà in ipertono, non in ipotonia, a conferma della nozione classica che la rigidità da decerebrazione non è subordinata alla presenza di una facilitazione cerebellare [Sherrington ⁽¹⁾, Beritoff e Magnus ⁽¹⁵⁾].

Se questo modo di vedere è esatto, l'atonia fastigiale sarebbe legata a inibizione riflessa crociata. Interazioni crociate inibitrici fra arti omologhi sono verosimilmente sempre presenti [Stella ⁽³⁾, Cardin ⁽¹⁶⁾] e la lesione fastigiale asimmetrica non fa che metterle in evidenza, accentuandole da un lato e riducendole dall'altro.

Restano da discutere gli effetti crociati prodotti dalla sola sezione del N. VIII, che si osservano non solo sullo sfondo di una rigidità vestibolare, ma anche su quello di una rigidità sherringtoniana. La presenza di tali effetti è innanzi tutto in accordo coi risultati di ricerche recenti [De Vito, Brusa e Arduini ⁽¹⁷⁾], le quali dimostrano che un'unità deitersiana, da cui si registra con un microelettrodo, risponde in modo reciproco alla stimolazione galvanica del laberinto ipsilaterale e contralaterale. È probabile che la spiccata unilateralità degli effetti prodotti dalla sezione del N. VIII sulla rigidità vestibolare [Stella ⁽³⁾] non sia dovuta al fatto che la deafferentazione laberintica equivalga all'inattivazione funzionale dei nuclei vestibolari dello stesso lato, i quali sarebbero pertanto incapaci di mantenere un'attività spontanea o sostenuta da altre sorgenti neurali. Una tale interpretazione sarebbe fra l'altro incompatibile col fatto che la deitersectomia riduce in modo marcatissimo la rigidità sherringtoniana dello stesso lato [Thiele ⁽¹⁸⁾, Bernis e Spiegel ⁽¹⁹⁾, Fulton, Liddell e Rioch ⁽²⁰⁾, Martin ⁽²¹⁾, Bach e Magoun ⁽²²⁾, Sprague e Chambers ⁽²⁰⁾], mentre la sezione del N. VIII ipsilaterale non ha importanti effetti [Sherrington ⁽¹⁾, Fulton, Liddell e Rioch ⁽²⁰⁾]. L'ipotesi che segue, ci sembra spiegare meglio i fatti. Se la deafferentazione laberintica di un lato aumenta l'attività dei nuclei vestibolari del lato opposto, il reciproco sarà probabilmente vero e i nuclei vestibolari dello stesso lato verranno ulteriormente depressi, nella loro attività residua, per il giuoco dell'inibizione crociata. Anche qui

(15) J. S. BERITOFF u. R. MAGNUS, « Pflüger's Arch. », CLIX, 249 (1914).

(16) A. CARDIN, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXII, 81, 607, 609 (1946).

(17) R. V. DE VITO, A. BRUSA e A. ARDUINI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », in stampa.

(18) F. H. THIELE, « J. Physiol. », XXXII, 358 (1904-05).

(19) W. J. BERNIS u. E. A. SPIEGEL, « Arb. neurol. Inst. (Inst. Anat. Physiol. Zent.Nerv.) Univ. Wien », 197 (1925).

(20) J. F. FULTON, E. G. T. LIDDELL a. D. McK. RIOCH, « Brain », LIII, 327 (1930).

(21) P. MARTIN, « Arch. int. Méd. exp. », VII, 1 (1932).

(22) L. M. N. BACH a. H. W. MAGOUN, « J. Neurophysiol. », X, 331 (1947).

nascerebbe un vero circolo vizioso, destinato a dare il massimo risalto agli effetti della sezione unilaterale del N. VIII sulla rigidità vestibolare.

Gli effetti sull'atonia fastigiale nel preparato sherringtoniano saranno ovviamente assai più complessi, per il giuoco delle afferenze miotatiche. La sezione del N. VIII eseguita ipsilateralmente all'arto « spastico », dovrebbe agire anche aumentando le attività vestibolo-spinali del lato opposto, che tendono a rinforzare il tono dell'arto « flaccido ». Il rovesciamento dell'asimmetria tonica fastigiale, prodotta dalla sezione unilaterale del N. VIII, potrebbe dunque spiegarsi, almeno in parte, con meccanismi miotatici.

Con altri esperimenti ⁽²³⁾ verrà indagato il problema se anche l'atonia fastigiale cronica ed eventualmente la stessa atonia di Luciani siano legate a questi meccanismi d'inibizione crociata.

Fisiologia. — *Effetti della stricnina sulla risposta della corteccia cerebrale isolata alla stimolazione singola e a quella iterativa* ^(*). Nota di FRANCESCO INFANTELLINA, presentata ^(**) dal Socio G. C. PUPILLI.

L'applicazione locale di stricnina sulla corteccia cerebrale determina nella zona stricninizzata [Gozzano ⁽¹⁾, Bremer ⁽²⁾, Dusser de Barenne e McCulloch ⁽³⁾, Adrian e Moruzzi ⁽⁴⁾, Dusser de Barenne, Marshall, Nims e Stone ⁽⁵⁾] e in tutte le altre zone corticali direttamente connesse con quella stricninizzata [Dusser de Barenne ^(6,7,8), Gozzano ⁽¹⁾, Dusser de Barenne e McCulloch ⁽⁹⁾, Dusser de Barenne, McCulloch e Ogawa ⁽¹⁰⁾], la comparsa di ampie onde (« onde stricniniche ») fortemente sincronizzate, isolate o a gruppi. Nel lembo isolato di corteccia cerebrale trattato con stricnina, la stimolazione iterativa provoca la comparsa di onde stricniniche ritmiche, la cui frequenza massima

(23) C. BATINI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », in stampa.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bolcna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) M. GOZZANO, « Riv. Neurol. », VIII, 212 (1935).

(2) F. BREMER, « C. r. Soc. Biol. », CXXIII, 90 (1936).

(3) J. G. DUSSER DE BARENNE a. W. S. MCCULLOCH, « Proc. Soc. exp. Biol. », N. Y., XXXV, 329 (1936).

(4) E. ADRIAN a. G. MORUZZI, « J. Physiol. », XCVII, 153 (1939).

(5) J. G. DUSSER DE BARENNE, C. MARSHALL, L. F. NIMS a. W. E. STONE, « Amer. J. Physiol. », CXXXII, 776 (1941).

(6) J. G. DUSSER DE BARENNE, « Proc. roy. Soc. », London (B), XCVI, 272 (1924).

(7) J. G. DUSSER DE BARENNE, « Dtsch. Z. Nervenheilk. », LXXXIII, 273 (1924).

(8) J. G. DUSSER DE BARENNE, « Amer. J. Physiol. », CXIX, 265 (1937).

(9) J. G. DUSSER DE BARENNE a. W. S. MCCULLOCH, « J. Neurophysiol. », I, 69 (1938).

(10) J. G. DUSSER DE BARENNE, W. S. MCCULLOCH a. T. OGAWA, « J. Neurophysiol. », I, 436 (1938).

è 3,5 al secondo indipendentemente dalla cadenza degli impulsi della stimolazione; il quale effetto invece mancherebbe nella corteccia intatta stricninizzata [Wright, Andrew e Jacobson ⁽¹¹⁾].

Soluzioni di nitrato di stricnina al 5 p. 100, applicate sul giro soprasilviano del Gatto, secondo Chang ⁽¹²⁾ provocano accorciamento della latenza e aumento dell'ampiezza delle componenti superficie-negative della complessa risposta locale corticale a uno stimolo elettrico; in competizione con tale effetto potenziante l'attività corticale, si manifesterebbe un'azione depressiva sulla funzione sinaptica [Chang ⁽¹³⁾].

Con le presenti indagini ho preso in esame gli effetti che la stricnina, applicata localmente, esercita sulle risposte isolate e sull'attività pulsatoria provocata del lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto. In alcuni esperimenti, l'applicazione di stricnina è stata effettuata su preparati di lembo precedentemente trattati con eserina; sull'azione che questa sostanza esercita sul lembo, si veda una mia Nota precedente [Infantellina ⁽¹⁴⁾].

Il preparato, allestito nel Gatto secondo la tecnica descritta da Burns ⁽¹⁵⁾ e da Burns e Grafstein ⁽¹⁶⁾, comprende un breve tratto del giro soprasilviano o del giro ectosilviano medio; la sua superficie è circa mm 20×10 e lo spessore circa mm 7. Un pozzetto, ottenuto coi lembi sollevati della cute del cranio dell'animale, permette di mantenere sotto olio di vaselina la corteccia messa allo scoperto e tenuta alla temperatura di $37^{\circ},5-38^{\circ}\text{C}$ mediante una lampada a raggi infrarossi.

Per la stimolazione ho usato uno stimolatore Grass: lo stimolo isolato e i singoli impulsi della stimolazione iterativa, erano onde rettangolari della durata di msec 0,5. Come elettrodi di stimolazione mi sono servito di fili di platino del diametro di mm 2×10^{-2} , le cui estremità sferiformi distano tra loro mm 0,5 circa. L'attività elettrica del preparato era registrata mediante un oscillografo a doppio raggio Du Mont 322 e una camera Grass; l'amplificazione veniva effettuata mediante un preamplificatore differenziale, ad accoppiamento diretto mod. Tönnies ⁽¹⁷⁾. La derivazione era monopolare, l'elettrodo critico essendo una micropipetta riempita di soluzione di NaCl al 0,9 p. 100; l'elettrodo indifferente era una sfera di Ag-AgCl.

Ho adoperato soluzioni di stricnina (nitrato) al 0,1 e all'1 e 2 p. 100, e di eserina (salicilato) all'1 p. 100, in liquido di Krebs-Henseleit o in quello di Ringer-Locke per Mammiferi. L'applicazione delle sostanze sul preparato veniva effettuata mediante il procedimento di Baglioni e Magnini ⁽¹⁸⁾, utiliz-

(11) M. K. WRIGHT, W. K. ANDREW a. J. JACOBSON, « EEG clin. Neurophysiol. », VI, 635 (1954).

(12) H. T. CHANG, « J. Neurophysiol. », XIV, 23 (1951).

(13) H. T. CHANG, « J. Neurophysiol. », XVI, 221 (1953).

(14) F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », XXXIX, 209 (1955).

(15) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXII, 156 (1951).

(16) B. D. BURNS a. B. GRAFSTEIN, « J. Physiol. », CXVIII, 412 (1952).

(17) J. F. TÖNNIES, « Rev. sci. Instrum. », IX, 95 (1938).

(18) S. BAGLIONI e M. MAGNINI, « Arch. Fisiol. », VI, 240 (1909).

zando dischetti di carta da filtro del diametro di mm 5; il trattamento locale (2-15 min) era effettuato nel tratto di corteccia interposto tra l'elettrodo di stimolazione e quello di derivazione e tutt'intorno a quest'ultimo.

Com'è noto [Burns⁽¹⁵⁾, Burns e Grafstein⁽¹⁶⁾, Infantellina⁽¹⁴⁾], la stimolazione del lembo di corteccia privo di attività spontanea, con uno stimolo elettrico di sufficiente voltaggio, provoca un'onda superficie-negativa rapida, la quale è seguita da un'onda lenta, superficie-positiva; su quest'ultima s'inscrivono onde difasiche di piccolo voltaggio. L'onda iniziale superficie-negativa può mancare, quando la distanza tra punto stimolato e punto di derivazione supera i 5-10 mm. I valori medi di ampiezza, durata e frequenza delle componenti della risposta a uno stimolo di voltaggio liminale, sono i seguenti: ampiezza dell'onda iniziale superficie-negativa, μV 250 (μV 50-750); ampiezza massima della deflessione positiva, μV 740 (μV 360-

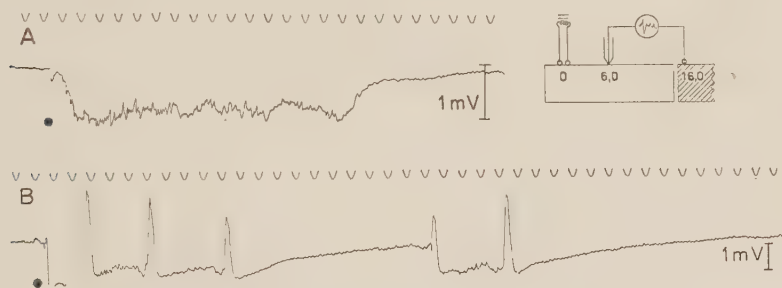


Fig. 1. — Effetti della stricnina sul lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto: modificazioni della risposta a stimoli elettrici isolati, di voltaggio liminale.

La deflessione verso l'alto corrisponde a una variazione negativa del potenziale. Lo schema a destra e in alto rappresenta la posizione degli elettrodi di stimolazione e di quelli di derivazione, e inoltre i valori (in millimetri) della loro rispettiva distanza. Il cerchio pieno indica la stimolazione. Tempo = 0,1 sec. Tra A e B il lembo è stato trattato per 5 min con una soluzione di stricnina all'1 p. 100. A, avanti il trattamento. B, 3 min dopo l'inizio del trattamento: la soglia è del 12 p. 100 inferiore a quella determinata in A.

1300); durata della risposta superficie-positiva, sec 0,5-1, 1; frequenza delle componenti inscritte sulla deflessione positiva, 65 Hz; ampiezza di queste pulsazioni, μV 25-350. Nei preparati di lembo isolato in cui è presente un'attività spontanea, questa si palesa con scariche che hanno caratteri molto simili a quelli delle risposte provocate dallo stimolo elettrico [cfr. Infantellina⁽¹⁴⁾].

I risultati ottenuti possono così riassumersi.

1° Nei preparati di lembo isolato privi di attività elettrica spontanea, l'applicazione locale di soluzione di stricnina nelle concentrazioni indicate non provoca di per sé la comparsa di onde corticali. L'azione del farmaco modifica profondamente, rispetto alla norma, i caratteri della risposta del preparato allo stimolo elettrico isolato (fig. 1); la deflessione superficie-positiva è notevolmente prolungata, fino a oltre 10 sec, e su di essa s'inscrivono ampie onde stricniniche isolate o più spesso unite in gruppi di 2-4 onde e talora anche di 10. L'ampiezza di queste oscillazioni è mV 2-5

ma non sono infrequenti potenziali superiori a 10 mV; le singole onde o i gruppi di onde stricniniche sono separati da un'attività asincrona, costituita da onde difasiche, la cui ampiezza (μ V 50-500) e frequenza (65 Hz) sono essenzialmente le medesime che contraddistinguono le componenti della scarica asincrona inscritta nella risposta superficie-positiva del preparato normale. Le onde stricniniche sono generalmente difasiche, più raramente monofasiche; nelle onde difasiche la componente positiva è quasi sempre più ampia, ma tanto l'onda isolata quanto la prima oscillazione di ogni singolo gruppo di pulsazioni s'iniziano per lo più con una deflessione negativa. Il trattamento locale con soluzione di stricnina al 0,1, e 1 p. 100, abbassa la soglia della risposta allo stimolo elettrico (fig. 1): la variazione della soglia è in genere scarsa (del 15 p. 100, in media) ed è costante per effetto della soluzione di stricnina al 0,1 p. 100, mentre fa talora difetto per il trattamento della corteccia con la soluzione del farmaco all'1 p. 100. La stricninizzazione corticale con soluzione al 2 p. 100, innalza (del 18 p. 100, in media) il valore della soglia della risposta provocata.

2° Nel lembo privo di attività spontanea, la stimolazione iterativa della durata di 3-5 sec ed effettuata con stimoli ripetuti alla cadenza di 100 al secondo, usando un voltaggio pari a 1,5-2 volte quello dello stimolo singolo liminale, provoca di norma la comparsa di una o poche scariche di onde corticali nel corso stesso della stimolazione e talora nei primi 1-2 sec che seguono il suo cessare; solo in pochi casi si palesa invece un'attività pulsatoria che si mantiene fino a circa 30 sec. Le stimolazioni iterative di durata più breve ovvero effettuate con impulsi di frequenza e tensione minori di quelle dianzi indicate, sono di norma inefficaci. Il trattamento del lembo con stricnina all'1 p. 100, prolunga costantemente la durata dell'attività elettrica corticale destata con la stimolazione iterativa: le pulsazioni della corteccia possono permanere per 60-120 sec. Inoltre, nei casi in cui l'applicazione di stimoli ripetuti ha provocato nel preparato normale la comparsa di un'attività pulsatoria persistente oltre la fine della stimolazione, dopo il trattamento col farmaco si ottiene lo stesso effetto mediante una stimolazione iterativa che rispetto a quella utilizzata avanti la stricninizzazione del lembo è di durata più breve ovvero costituita da impulsi di frequenza e tensione minori. I preparati di lembo privi di attività spontanea e che siano stati più volte sottoposti a stimolazione ripetitiva, trattati con stricnina presentano scariche ritmiche di tipo stricninico, che si manifestano senza l'applicazione di stimoli elettrici.

3° Nei preparati di lembo corticale completamente isolato, in cui sia presente un'attività elettrica spontanea, il trattamento con soluzioni di stricnina trasforma le scariche asincrone in onde e complessi di onde stricniniche, la cui frequenza non è sostanzialmente modificata rispetto a quella delle scariche spontanee del lembo prima del trattamento. La soglia della risposta allo stimolo isolato presenta, per le tre diverse concentrazioni delle soluzioni di stricnina usate, le medesime variazioni descritte a proposito dei preparati privi di attività spontanea.

4° Su un preparato che non palesi un'attività spontanea e sia stato precedentemente trattato con eserina all'1 p. 100, l'applicazione di stricnina all'1 p. 100 determina la comparsa di un'attività pulsatoria corticale costituita da onde o gruppi di onde stricniniche (fig. 2), le cui caratteristiche sono simili a quelle delle onde che compaiono per effetto del trattamento con sola stricnina nei preparati di lembo provvisti di attività spontanea. Tale effetto non si osserva mai per l'azione della sola eserina, la quale per altro riduce notevolmente l'eccitabilità del preparato [cfr. Infantellina⁽¹⁴⁾]; né compare, come ho detto precedentemente, per l'applicazione di sola stricnina. Se il lembo prima del trattamento è spontaneamente attivo, l'applicazione successiva di eserina e stricnina ne accresce l'attività pulsatoria: aumentano la frequenza delle scariche e l'ampiezza delle singole oscillazioni

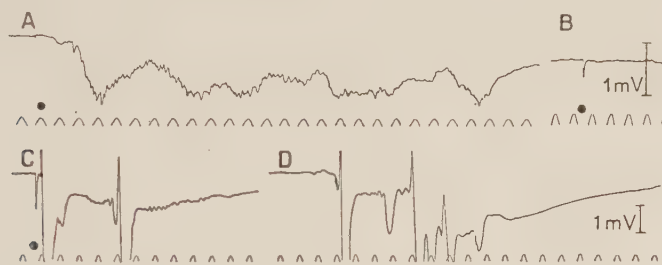


Fig. 2. — Effetti della stricnina sul lembo isolato di corteccia cerebrale (Gatto) pretrattato con eserina.

L'amplificazione indicata in B si riferisce anche ad A, quella indicata in D anche a C. Per le altre indicazioni si veda la leggenda della fig. 1.

Tra A e B il lembo è stato trattato per 5 min con eserina all'1 p. 100; tra B e C, trattamento per 5 min con stricnina all'1 p. 100. A, prima del trattamento: risposta a uno stimolo di voltaggio liminale. B, subito dopo la fine del trattamento con eserina: manca la risposta per uno stimolo di voltaggio pari al doppio di quello usato in A. C, 7 min dopo B e 6 min dopo l'inizio del trattamento con stricnina: il valore della soglia è del 5 p. 100 superiore rispetto a quello determinato in A. D, 5 min dopo C: attività pulsatoria, manifestatasi senza l'applicazione di stimoli elettrici.

e inoltre compaiono gruppi di onde molto complessi e irregolari. La durata delle singole scariche o delle risposte allo stimolo isolato, è molto prolungata, fino a 10 sec in alcuni casi. Tanto le scariche quanto le risposte provocate, sono costituite da un'ampia deflessione superficie-positiva su cui s'inscrivono ampie onde difasiche di frequenza pari a 15-20 al secondo. La soglia della risposta è innalzata.

Convorrà rilevare come dai miei esperimenti risulti innanzi tutto che la stricnina, applicata localmente sul lembo corticale privo di attività elettrica spontanea, non provoca di per sé l'insorgenza di onde stricniniche; le quali compaiono solo come risposte allo stimolo elettrico isolato. Questo dato sperimentale e il fatto che per il trattamento del lembo con soluzioni di stricnina al 2 p. 100 la soglia della risposta allo stimolo è innalzata, mi sembra dimostrino a evidenza come l'azione convulsivante dell'alcaloide

non debba riferirsi a una modificazione della eccitabilità dei neuroni della corteccia. Che d'altra parte l'applicazione di soluzioni del farmaco di più debole concentrazione (al 0,1 e 1 p. 100) provochi un abbassamento della soglia corticale, non può ritenersi un dato che invalidi tale argomento, giacché il tipo della risposta è in ogni caso apparso il medesimo, e quindi senza alcuna dipendenza dalla concentrazione della soluzione di stricnina utilizzata.

I risultati ottenuti mostrano inoltre che la durata dell'attività elettrica provocata nel lembo dalla stimolazione iterativa, dopo trattamento con stricnina è costantemente maggiore di quella che si determina nel preparato non trattato. Circa agli effetti della stimolazione ripetuta, giova rammentare che le pulsazioni prolungate derivabili dal lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto per l'applicazione di una serie di stimoli, sono secondo Burns ^(19,20) provocate dalla differente velocità di restauro del potenziale di membrana alle due estremità delle cellule di tipo B [cfr. Burns e Grafstein ⁽¹⁶⁾], le estremità profonde di tali neuroni presentando una ripolarizzazione più lenta rispetto a quelle superficiali: fra queste ultime e le terminazioni neuroniche profonde si stabilisce così un flusso di corrente, che per un certo valore liminale di caduta di potenziale determina la scarica del neurone. Ciò ammesso, è verosimile che la durata del fenomeno elettrico dovuto a questa differenza della velocità di ripolarizzazione delle due estremità del neurone si faccia maggiore per azione della stricnina. Le ricerche di Fuortes ⁽²¹⁾ e di Brooks e Fuortes ⁽²²⁾ sul midollo spinale e di McCulloch ⁽²³⁾ sulla corteccia cerebrale, mostrano infatti che la stricnina influenza sia il livello di polarizzazione sia i processi medesimi della ripolarizzazione dei neuroni.

Non è cosa semplice dare un significato preciso all'effetto facilitante dell'eserina: basti considerare la complessità stessa dell'azione del farmaco. Ciò nonostante si può pensare che il fenomeno descritto dipenda sostanzialmente dall'azione che l'eserina esercita sulla permeabilità cellulare [cfr. letteratura in Crepax e Infantellina ⁽²⁴⁾] e che si manifesta nettamente con un aumento della medesima. Il che sarà discusso nel lavoro *in extenso*.

(19) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXXXV, 427 (1954).

(20) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXXXVII, 168 (1955).

(21) M. G. F. FUORTES, « J. Physiol. », CXII, 42 P (1951).

(22) C. MCC. BROOKS a. M. G. F. FUORTES, « J. Neurophysiol. », XV, 257 (1952).

(23) W. S. MCCULLOCH, « EEG clin. Neurophysiol. », I, 19 (1949).

(24) P. CREPAX e F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », in corso di stampa.

Fisiologia. — *Effetti della morfina applicata localmente sul lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto* ^(*). Nota di PAOLO CREPAX e FRANCESCO INFANTELLINA, presentata ^(**) dal Socio G. C. PUPILLI.

I dati sperimentali che concernono gli effetti della morfina sulla eccitabilità della corteccia cerebrale, sono contrastanti. Nel Cane secondo Bubnoff e Heidenhain ⁽¹⁾, dosi di morfina cospicue, ma subconvulsivanti, provocherebbero un innalzamento della soglia corticale; secondo Amantea ^(2,3), la morfina all'opposto esalterebbe l'eccitabilità della corteccia cerebrale. In esperimenti eseguiti sul Gatto si è visto che il farmaco, iniettato sia nella corteccia sia per via intraperitoneale, non provoca variazioni dell'eccitabilità corticale alla stimolazione faradica [Massermann ⁽⁴⁾]; e anche nel Coniglio, esso lascerebbe immodificata l'eccitabilità della corteccia cerebrale [Tainter, Tainter, Lawrence, Neuru, Lackey, Luduena, Kirtland e Gonzalez ⁽⁵⁾]. Ci è parso che condizioni assai opportune per l'analisi degli effetti esercitati dalla morfina sugli aggregati neuronici corticali, fossero offerte dall'impiego del lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto.

Il preparato veniva approntato secondo la tecnica descritta da Burns ⁽⁶⁾ e da Burns e Grafstein ⁽⁷⁾ [cfr. anche Infantellina ⁽⁸⁾]. I potenziali elettrici corticali venivano registrati con derivazione monopolare, essendo l'elettrodo critico costituito da una micropipetta (diametro esterno della punta tra 50 e 100 μ ; resistenza tra 0,3 e 3 $M\Omega$) riempita di soluzione di NaCl al 0,9 p. 100; l'elettrodo indifferente, una piccola sfera di Ag-AgCl, era posto su una zona di corteccia necrotizzata, a 1 cm circa dall'elettrodo critico. Ci siamo serviti di un oscillografo a doppio raggio Du Mont mod. 322 e di un preamplificatore ad accoppiamento diretto mod. Tönnies ⁽⁹⁾. Per la stimolazione del preparato abbiamo adoperato uno stimolatore Grass mod. S-4; la durata dello stimolo isolato, costituito da un'onda rettangolare, era msec 0,5. Nella stimolazione iterativa, la frequenza degli stimoli era 100 Hz, rimanendo costante la durata del singolo stimolo (msec 0,5); il voltaggio della corrente utilizzata per la stimolazione iterativa era 1, 5-2 volte quello dello

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) N. BUBNOFF u. R. HEIDENHAIN, « Pflüger's Arch. », XXVI, 137 (1881).

(2) G. AMANTEA, « Atti R. Accad. Med. Roma », L, 11 (1923-24).

(3) G. AMANTEA, « Atti R. Accad. Med. Roma », L, 414 (1923-24).

(4) J. H. MASSERMANN, « Proc. Soc. exp. Biol. Med. », XLII, 315 (1939).

(5) M. I. TAINTER, E. G. TAINTER, W. S. LAWRENCE, E. N. NEURU, R. W. LACKEY, F. P. LUDUENA, H. B. KIRTLAND Jr. a. R. I. GONZALEZ, « J. Pharmacol. », LXXIX, 42 (1943).

(6) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXI, 50 (1950).

(7) B. D. BURNS a. B. GRAFSTEIN, « J. Physiol. », CXVIII, 412 (1952).

(8) F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », XXXIX, 209 (1955).

(9) J. F. TÖNNIES, « Rev. sci. Instrum. », IX, 95 (1938).

stimolo singolo liminale. Gli elettrodi di stimolazione erano fili di platino del diametro di mm 2×10^{-2} e aventi le estremità sferiformi.

La morfina è stata applicata localmente, secondo il procedimento di Baglioni e Magnini⁽¹⁰⁾: si usava una soluzione all'1 p. 100 di cloridrato di morfina in soluzione di NaCl al 0,9 p. 100 (pH = 6,6). Il trattamento locale, mantenuto per min 4-11, era effettuato nel tratto di corteccia interposto tra l'elettrodo di stimolazione e quello di derivazione e tutt'intorno a quest'ultimo.

1° Il trattamento del lembo corticale con morfina provoca, sebbene non costantemente, la comparsa di pulsazioni corticali, che indipendentemente da ogni stimolazione elettrica si manifestano in preparati che ne erano in precedenza privi; ovvero intensifica l'attività preesistente, per quanto concerne sia la frequenza delle pulsazioni elettriche sia l'ampiezza degli accidenti che le compongono. L'attività provocata dalla morfina si manifesta dapprima sotto forma di scariche di onde difasiche inscritte su una o più deflessioni positive, di aspetto non dissimile da quelle destinate, nel prepa-

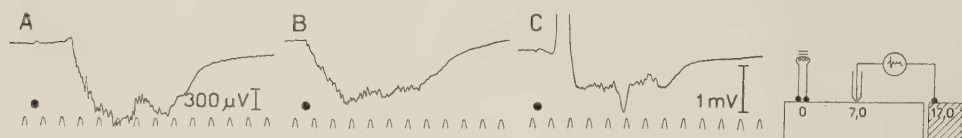


Fig. 1. - Effetti della morfina sul lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto: modificazioni della risposta a stimoli elettrici isolati di voltaggio liminale.

La deflessione verso l'alto corrisponde a una variazione negativa del potenziale. Lo schema a destra rappresenta la posizione degli elettrodi di stimolazione e di quelli di derivazione e inoltre i valori (in millimetri) della loro rispettiva distanza. Il cerchio pieno indica la stimolazione. L'amplificazione di B è uguale a quella indicata in C. Tempo = 0,1 sec.

Tra A e B il lembo è stato trattato per 10 min con una soluzione di morfina all'1 p. 100. A, avanti il trattamento; B, subito dopo la fine del trattamento: la soglia è del 13 p. 100 inferiore a quella determinata in A. C, 17 min dopo B, la soglia è la medesima che in B.

rato trattato con morfina, dallo stimolo elettrico singolo e che descriveremo: siffatta attività può conservarsi inalterata per tutto il tempo in cui è manifesta (15-45 min) ovvero assumere in modo temporaneo l'aspetto di onde difasiche non molto ampie ($150 \mu V$), della frequenza di 5-6 Hz, che si succedono in modo continuo ovvero raggruppate in treni più o meno prolungati (1-8 sec) e variamente distanziati tra loro (da pause di 1-3 sec).

2° Com'è noto^(6,7,8), la stimolazione del lembo isolato di corteccia, mediante uno stimolo elettrico di sufficiente voltaggio, provoca un'onda superficie-negativa rapida, seguita da un'onda superficie-positiva lenta; su quest'ultima s'inscrive una scarica asincrona, costituita da onde di 25-350 μV e della frequenza media di 65 Hz. Quando la distanza tra punto stimolato e punto di derivazione supera i 5-10 mm, l'onda negativa iniziale è spesso assente.

Dopo trattamento con morfina, il valore del voltaggio liminale si riduce (fig. 1): l'effetto è assolutamente costante, mentre il grado della modificazione dipende essenzialmente dall'eccitabilità del preparato. E precisamente, se al momento dell'applicazione del farmaco tale eccitabilità è elevata (vol-

(10) S. BAGLIONI e M. MAGNINI, « Arch. Fisiol. », VI, 240 (1909).

taggi liminali compresi tra 3 e 5 V), l'abbassamento della soglia è del 20-30 p. 100; l'importanza della variazione diventa più cospicua (40-80 p. 100) nei preparati per i quali i valori degli stimoli liminali sono 6-10 V. Quando la morfina sia fatta agire su lembi di corteccia che a stimoli di tensione superiore a 10 V non rispondono affatto o presentano scarsa reazione, una discreta eccitabilità dei neuroni corticali si manifesta come effetto immediato e poi si conserva a lungo.

Nella risposta del lembo trattato con morfina si nota, innanzi tutto, che l'ampiezza della deflessione lenta positiva è costantemente aumentata, sia pure in misura diversa da caso a caso. In condizioni normali, l'ampiezza media dell'onda superficie-positiva è 740 μ V (i valori estremi riscontrati sono 360 e 1300 μ V): dopo trattamento con morfina, le variazioni percentuali più notevoli (fino ad aumenti del 300 p. 100) si osservano generalmente in quei casi in cui l'ampiezza dell'onda, avanti l'applicazione del farmaco, è scarsa; le variazioni sono invece piccole (del 10 p. 100 circa), quando i valori di voltaggio dell'onda positiva sono inizialmente elevati. La deflessione superficie-positiva presenta una fase discendente assai rapida; le onde asincrone che abitualmente ne frastagliano i contorni, si riducono di ampiezza e frequenza nel primo tratto della deflessione stessa, fino a scomparire del tutto, mentre nell'ulteriore progredire dell'onda sono sostituite da oscillazioni di potenziale, che si succedono con un ritmo alquanto irregolare e la cui ampiezza raggiunge spesso valori elevati (600 μ V).

Nei casi in cui la risposta normale presenta la componente rapida negativa, l'ampiezza di questa è aumentata per effetto della morfina; quando tale componente manca, la morfina ne provoca la comparsa (dopo 15-20 min). Per effetto del trattamento locale col farmaco, la durata complessiva della risposta a uno stimolo isolato risulta più spesso diminuita, talora immutata; in ogni caso la variazione non è mai cospicua, superando raramente il 20 p. 100.

3° La stimolazione iterativa, effettuata per la durata di 5 sec, d'ordinario provoca nel lembo la comparsa di una o poche scariche di onde corticali, nel corso stesso della stimolazione o immediatamente dopo; solo in pochi casi si palesa un'attività pulsatoria che si mantiene fino a circa 30 sec. Tale attività risulta di onde elettriche riunite in complessi variamente costituiti e che si susseguono separati da pause di durata varia: il complesso più semplice è formato da una serie di deflessioni superficie-positive, le quali considerate singolarmente sono identiche a quelle destinate dallo stimolo elettrico isolato; in altri casi l'attività è costituita da treni di onde difasiche di contorno liscio, simmetricamente sviluppate nelle due fasi. Il trattamento con morfina modifica profondamente l'attività elettrica provocata dalla stimolazione iterativa: aumenta fortemente l'ampiezza delle deflessioni lente su cui s'inscrivono le singole scariche (per esempio da 400 μ V fino a 3 mV) e così pure l'ampiezza delle onde inscritte (da 50-150 μ V si passa a valori di 300-600 μ V); all'aumento di ampiezza delle onde asincrone si accompagna una diminuzione della loro frequenza. Il che, unitamente alla mag-

giore rapidità delle deflessioni lente, vale a conferire a ciascuna scarica un carattere più raccolto (dovuto a maggiore sincronismo?). La durata dell'attività corticale destata con la stimolazione iterativa, risulta prolungata per azione del farmaco.

4° In ricerche collaterali abbiamo indagato l'azione della morfina sul lembo previamente trattato con eserina (fig. 2). Gli effetti dell'applicazione di questo farmaco sul lembo stesso [Infantellina⁽⁸⁾] possono così riassumersi: abbassamento della eccitabilità del preparato e diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni che compongono la risposta corticale allo stimolo singolo, segnatamente della deflessione superficie-negativa e delle

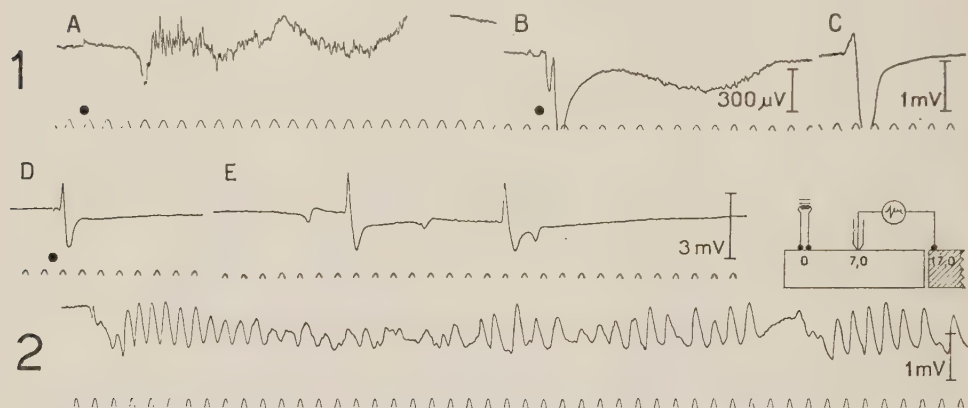


Fig. 2. - Effetti della morfina sul lembo isolato di corteccia cerebrale (Gatto) pretrattato con eserina.

L'amplificazione indicata in B si riferisce anche ad A, quella indicata in E anche a D. Per le altre indicazioni si veda la leggenda della fig. 1.

1) Tra A e B il lembo è stato trattato per 6 min con eserina all'1 p. 100 e successivamente per 8 min con morfina all'1 p. 100; tra C e D, trattamento per 8 min con atropina al 0,4 p. 100. A, prima del trattamento: risposta a uno stimolo di voltaggio liminale. B, 2 min dopo la fine del trattamento con eserina e morfina: risposta a uno stimolo di voltaggio liminale; il valore della soglia è del 13 p. 100 inferiore rispetto a quello determinato in A. C, 4 min dopo B: oscillazione di potenziale manifestatasi in modo apparentemente spontaneo. D, 15 min dopo C e 2 min dopo la fine del trattamento con atropina: risposta a uno stimolo di voltaggio liminale; il valore della soglia è aumentato del 10 p. 100 rispetto a quello determinato in A. E, 10 min dopo D: attività del preparato non provocata da stimoli elettrici.

2) Attività ritmica manifestatasi in un preparato trattato con eserina (soluzione all'1 p. 100 per 7 min) e successivamente con morfina (soluzione all'1 p. 100 per 10 min), 21 min dopo la fine del trattamento con quest'ultimo farmaco.

scariche asincrone; come effetto tardivo, in preparati spontaneamente attivi può osservarsi un succedersi ravvicinato di scariche più ampie e per lo più precedute da un'onda rapida negativa.

Il trattamento con morfina di preparati privi di attività elettrica e precedentemente trattati con eserina (all'1 p. 100 in soluzione di NaCl al 0,9 p. 100), dapprima aumenta l'eccitabilità corticale, che l'eserina aveva depresso; poi modifica l'aspetto della reazione corticale allo stimolo unico, sovrapponendosi gradualmente i caratteri propri dell'azione morfina a quelli assunti dalla risposta per effetto dell'eserina; infine provoca la comparsa di scariche assai simili a quelle che costituiscono la risposta del preparato alla stimolazione elettrica. Tali scariche insorgono in modo apparentemente spontaneo, succedendosi a intervalli via via più brevi (da 8 a

1 sec); col crescere della frequenza delle scariche si viene modificando pure il loro aspetto, nel senso che esse si trasformano gradualmente in oscillazioni difasiche, le quali presentano eguale sviluppo nelle due fasi e senza alcuna pausa si succedono per 10–30 min (fig. 2, 2). Questi effetti sono simili a quelli ottenuti sul lembo trattato con sola morfina; per altro, il pretrattamento con eserina li fa costanti.

L'attività elettrica del lembo corticale, destata con l'applicazione di morfina ovvero di eserina e morfina, non è rimossa (fig. 2, 1. D, E) per effetto del successivo trattamento con atropina (al 0,4–1 p. 100 in soluzione di NaCl al 0,9 p. 100, lasciata *in situ* per 6–8 min).

I risultati degli esperimenti riferiti dimostrano l'azione diretta della morfina sui neuroni della corteccia cerebrale. Taluni effetti del farmaco, e in particolare il manifestarsi di un'attività corticale contraddistinta da oscillazioni ritmiche e difasiche, presentano, sotto l'aspetto morfologico, stretta analogia con quelli prodotti nel lembo dall'acetilcolina [Infantellina⁽⁸⁾]. Il che potrebbe indurre a collegare gli effetti della morfina con le sue proprietà anticolinesterasiche [cfr. letteratura in Jacob⁽¹¹⁾]; ma l'atropina, come si è visto, non rimuove l'attività elettrica destata dalla morfina, mentre esercita una netta azione inibitoria su quella provocata dall'acetilcolina [Infantellina⁽⁸⁾]. Gli effetti della morfina sul lembo non dipendono pertanto da un accumulo locale di acetilcolina.

Embriologia. — *Caudalizzazione di materiale neurale prosencefalico indotta dall'area posteriore della placca neurale in Anfibi Urodeli*^(*). Nota di MARIO SALA, presentata^(**) dal Corrisp. U. d'ANCONA.

Per spiegare le differenze qualitative e quantitative nel sistema nervoso centrale, indotte dal sottostante tetto dell'archenteron durante il processo di gastrulazione (Spemann 1931)⁽¹⁾, è stata prospettata, tra le altre ipotesi, l'esistenza di due influenze induttrici (influenza *attivante* ed influenza *caudalizzante* o *trasformante*) specificamente distinte, distribuite secondo gradienti, nel tetto dell'archenteron (Nieuwkoop and oth. 1952)⁽²⁾.

Varie esperienze, eseguite con metodi diversi, hanno confermato l'esistenza di tali influenze e rilevato il loro differente modo di azione (Rollhäuser-ter Horst 1953⁽³⁾; Eyal-Giladi 1954⁽⁴⁾; Nieuwkoop e v. Nigte-

(11) J. JACOB, « Actualités pharmacologiques », VII, 127 (1954).

(*) Ricerche eseguite all'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Padova e al Laboratorio Hubrecht di Embriologia di Utrecht.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) H. SPEMANN, « Roux' Arch. », 123, 389 (1931).

(2) P. D. NIEUWKOOP and oth., « J. Exp. Zool. », 120, 1 (1952).

(3) J. ROLLHAUSER-ter HORST, « Roux' Arch. », 146, 182 (1953).

(4) H. EYAL-GILADI, « Arch. Biol. », 65, 179 (1954).

vecht 1954⁽⁵⁾. Nieuwkoop and coll. 1955⁽⁶⁾; Hori e Nieuwkoop 1955⁽⁷⁾; Sala 1955⁽⁸⁾.

La distribuzione dell'intensità di entrambe le influenze nella zona mediana del tetto dell'archenteron, in direzione cranio-caudale, è stata studiata negli Urodeli mediante l'innesto autoplastico di pieghe neuroectodermiche, tagliate in successivi momenti della gastrulazione, in embrioni a stadi diversi (Eyal-Giladi 1954)⁽⁴⁾ e mediante espianti di ectoderma competente contenenti come induttori pezzi di tetto dell'archenteron prelevati da aree diverse lungo l'asse mediano cranio-caudale (Sala 1955)⁽⁸⁾.

Si è così rilevata l'intensità dell'influenza attivante e caudalizzante nella piastra precordale e nelle aree cordale anteriore e media della zona mediana del tetto dell'archenteron. Però nell'area cordale posteriore, dove l'intensità dell'influenza attivante è molto bassa, non è stato possibile determinare l'intensità dell'influenza caudalizzante.

Per determinare tale intensità nell'area cordale posteriore del tetto dell'archenteron sono state iniziate le presenti ricerche, che, rilevando l'influenza caudalizzante presente nella parte posteriore della placca neurale, indicano pure la sua intensità nella corrispondente area induttrice del tetto dell'archenteron.

MATERIALE E METODO.

Come materiale sono state usate giovani neurule di *Ambystoma mexicanum* (allo stadio di cercini midollari). Come metodo è stato adottato l'innesto autoplastico, che consente più sicuri controlli dell'area di espianto.

Striscie di neuroectoderma, esenti da mesoderma, prese dalla parte anteriore della placca neurale, tagliate trasversalmente, sono state isolate e poi piegate all'interno, lungo la linea mediana, in modo da costituire una doppia piega di materiale neuroectodermico (cfr. Nieuwkoop and oth. 1952⁽²⁾ (fig. 1 A). Dopo circa mezz'ora, avvenuta l'unione delle due superfici interne e la perfetta saldatura dei margini della piega, detta piega venne inserita in posizione verticale sulla linea mediana della placca neurale, a contatto con il tetto dell'archenteron (scoperto per breve tratto mediante un'incisione), in prossimità del blastoporo (fig. 1 A, B). Avvenuta la saldatura dell'innesto, gli embrioni vennero tenuti in soluzione fisiologica per qualche giorno e poi allevati in acqua di fonte fino al completo riassorbimento del tuorlo.

Gli esemplari, fissati in liquido di Lenhossek, e colorati *in toto* col carminio boracico, vennero sezionati trasversalmente, e le sezioni furono colorate con un metodo Azan semplificato.

(5) P. D. NIEUWKOOP, and G. v. NIGTEVECHT, « J. Embr. exp. Morph. », 2, 175 (1954).

(6) P. D. NIEUWKOOP and coll., « Kon. Akad. Wet. A'dam », C. 58, 219 e 356 (1955).

(7) R. HORI and P. D. NIEUWKOOP, « Proc. Kon. Akad. Wet. A'dam », C 58, 266 (1955).

(8) M. SALA S. J., « Comm. Pont. Acad. Sc. », 16, 241 (1955).

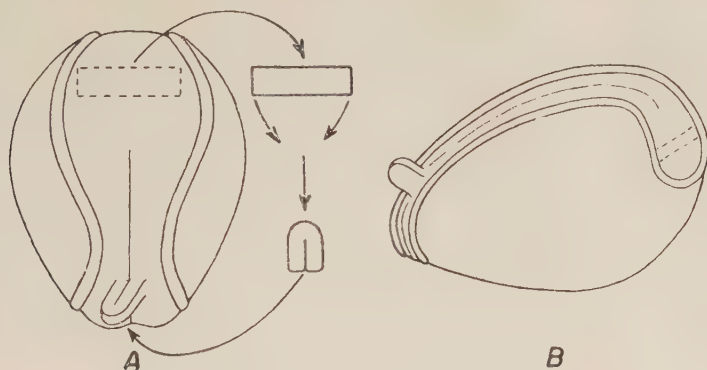


Fig. 1. - Schema dell'operazione d'innesto.

A) Asportazione di una striscia di neuroectoderma prosencefalico, che, in forma di piega, viene inserito nella regione posteriore della placca neurale.

B) Un esemplare (C 15) poche ore dopo l'operazione.

ESAME DEL MATERIALE.

Vennero operati 15 embrioni: di essi 3 degenerarono prima del riassorbimento del tuorlo. Vennero esaminati i 12 esemplari rimasti.

Esame esterno. — Lo sviluppo del corpo è pressoché normale dal punto di vista morfologico. Vi è qualche leggera variazione nella pigmentazione, più o meno accentuata. In 2 esemplari in cui difetti di tecnica operatoria apportarono lesioni al mesoderma della regione cefalica, si ebbero notevoli malformazioni della testa. Negli altri casi la conformazione della testa appare normale: nella maggior parte degli esemplari si osserva la riduzione o assenza completa dei globi oculari ed una riduzione più o meno pronunciata della parte anteriore del sistema nervoso. La piega innestata è inglobata nella radice della pinna caudale che è spesso incurvata, consentendo agli embrioni di eseguire solamente movimenti di maneggio (fig. 2).

Esame interno. — Le riduzioni del sistema nervoso sono ordinariamente localizzate nell'area prosencefalica, che spesso si presenta quasi normale per fenomeni di intensa regolazione.

In 5 esemplari sono leggermente ridotti i placodi olfattivi e gli emisferi telencefalici, in 1 caso mancano ambedue le formazioni, in 1 caso mancano gli emisferi telencefalici soltanto, negli altri 5 casi emisferi telencefalici e placodi olfattivi appaiono normali.

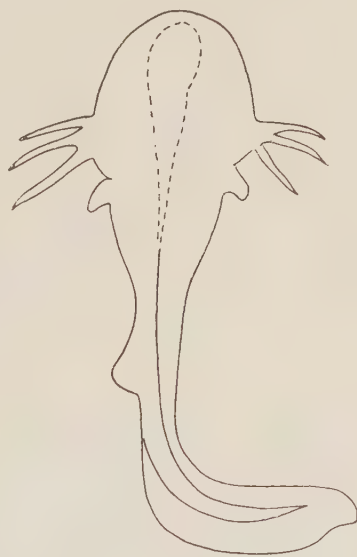


Fig. 2. - Un esemplare C 15 al momento della fissazione (schema).

Il diencefalo si presenta leggermente ridotto in 6 casi, più ridotto in 4 casi e rudimentale in 2 casi. Gli occhi sono presenti entrambi, e ridotti, solo in 2 esemplari; in 1 esemplare, oltre ad un occhio sviluppato normalmente è rilevabile solo un piccolo rudimento di tapetum; in 5 casi c'è un solo occhio laterale, che, in 2 casi, è molto ridotto, ed in 3 è rudimentale; in 2 casi vi è un abbozzo di occhio impari e mediano; negli altri 2 casi non vi è traccia di formazioni oculari.

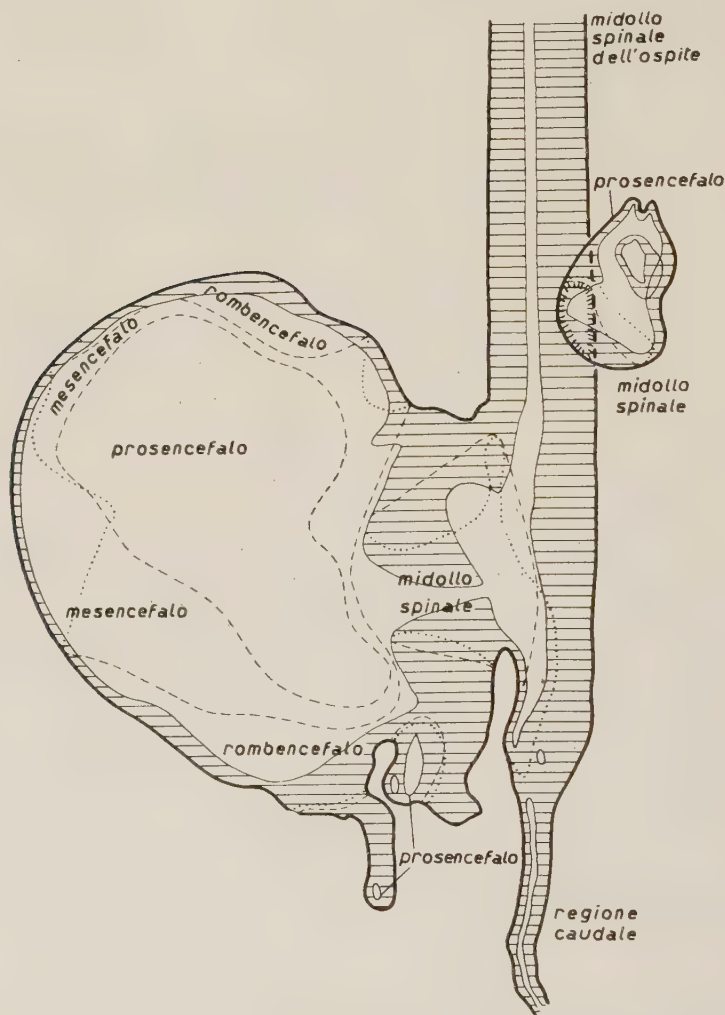


Fig. 3. - Ricostruzione grafica di un innesto visto dal lato dorsale. La base dell'innesto, molto ispessita, ha carattere spinale. La parete ventrale, a contatto con i miotomi, è pure ispessita ed ha carattere rombencefalico. La parete dorsale, a contatto col tessuto connettivo della coda, è sottile e presenta una zona a carattere prosencefalico, circondata da un'area a carattere mesencefalico. Esemplare C 13.

— limite esterno delle formazioni neurali; — limite della cavità ependymale;
 --- limite delle diverse regioni neurali nel lato dorsale dell'innesto; ···· limite delle
 diverse regioni neurali nel lato ventrale dell'innesto.

In alcuni embrioni nell'operazione d'innesto sono state danneggiate, in parte, anche altre aree della neurula, posteriori alla zona presuntiva del prosencefalo, cosicch , nello sviluppo successivo di tali embrioni, si osservano riduzioni pi  o meno estese della regione mesencefalica (4 esemplari) e della parte anteriore della regione rombencefalica (2 esemplari).

Il materiale neurale, asportato per essere innestato sulla parte posteriore della neurula, ha quindi, in prevalenza, carattere prosencefalico e in particolare della regione diencefalica e oculare.

Esame istologico. — L'innesto, all'esame istologico, presenta un aspetto simile in tutti gli esemplari. La piega neurale si   dilatata cos  da costituire



Fig. 4. — Rappresentazione schematica di una sezione trasversale della zona d'innesto.

(t. c. tessuto connettivo; cr. cromatofori; m. s. midollo spinale; m. s. i. struttura spinale dell'innesto; r. struttura rombencefalica; o. r. formazione oculare rudimentale; n. o. nervo ottico; m. miotomi; c. corda dorsale; i. intestino).

una vescicola allungata. In essa si pu  distinguere una parte basale d'innesto, a contatto con la corda dorsale o col midollo spinale, che si prolunga in una parete a contatto con i miotomi, mentre l'altra parete, separata e distinta dalla parte basale,   immediatamente a contatto col tessuto connettivo della pinna caudale, e si unisce per un'estremit  alla parete a contatto coi miotomi, in modo da chiudere completamente la vescicola.

La parte basale rappresenta la maggior quantit  di materiale, ed appare sempre a carattere spinale o rombencefalico; la parete a contatto coi miotomi   ispessita e presenta carattere rombencefalico, mentre la parete a contatto col connettivo caudale   sottile, ha tendenza a separarsi nettamente

dalla parte basale e dalla parete a contatto coi miotomi, e contiene strutture che, pur rivelando tendenze prosencefaliche, spesso non raggiungono la tipica differenziazione citologica che l'aspetto morfologico prosencefalico richiederebbe (fig. 3). In questa parte spesso si possono distinguere uno strato sottile a carattere mesencefalico, formazioni oculari come cellule retiniche, pezzi di tapetum, formazioni del peduncolo e nervo ottico, abbozzi dei plessi corioidei, della commessura posteriore (?), frequenti evaginazioni a carattere telencefalico con annessa parafisi, emisferi e placodi olfattivi rudimentali ed atipici: tutte queste formazioni sono ordinariamente ridottissime e spesso si presentano in forme atipiche che ne rendono ardua la determinazione.

Attorno alla piega si trovano spesso gruppi di cellule gangliari (forse normali gangli spinali, forse indotti secondariamente dall'innesto) e in tutti gli esemplari, una grande quantità di cromatofori che formano uno strato continuo attorno al materiale neurale innestato (fig. 4).

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Il materiale neurale usato per l'innesto ha insita la tendenza, allo stadio di neurula, a formare strutture prosencefaliche. L'autonomia di tale tendenza è stata studiata osservando l'ulteriore differenziazione del materiale neuroectodermico anteriore o in condizioni normali di sviluppo (Vogt 1929 ⁽⁹⁾, Hassa 1955 ⁽⁶⁾), o isolato in espianti (Gallera 1948 ⁽¹⁰⁾, Mangold e v. Woellwarth 1950 ⁽¹¹⁾), o innestato in area priva di influenze induttrici (Gallera 1947 ⁽¹²⁾, Eyal-Giladi 1954 ⁽⁴⁾). Tale materiale, innestato sulla regione posteriore della neurula, ha assunto, durante lo sviluppo, carattere rombencefalico e spinale.

All'iniziale tendenza prosencefalica si è perciò sovrapposta una seconda influenza che ne ha modificato il carattere regionale. Il che conferma l'esistenza di due influenze induttrici del sistema nervoso (*attivante e caudalizzante*), distinte tra loro anche quanto a tempo di azione. (Nieuwkoop and oth. 1952) ⁽²⁾. Tali influenze agiscono successivamente sull'ectoderma competente, poiché l'influenza caudalizzante richiede per la sua azione la previa attivazione dell'ectoderma verso strutture prosencefaliche. (Cfr. Eyal-Giladi 1954 ⁽⁴⁾, Nieuwkoop e v. Nigtevecht 1954 ⁽⁵⁾, Jonhen 1955 ⁽⁶⁾).

I risultati perciò dimostrano che nella regione caudale della neurula persiste, a gastrulazione finita, attiva l'influenza caudalizzante. (Cfr. Nieuwkoop and oth. 1952 ⁽²⁾).

I risultati ottenuti mediante il metodo degli innesti di pieghe ectoderliche sulla piastra neurale coincidono dal punto di vista qualitativo e, in

(9) W. VOGT, « Roux'Arch. », 120, 384 (1929).

(10) J. GALLERA, « Rev. Suisse Zool. », 55, 295 (1948).

(11) O. MANGOLD und C. v. WOELLWARTH, « Naturwiss. », 16, 367 e 17, 390 (1950).

(12) J. GALLERA, « Arch. Biol. », 58, 221 (1947).

gran parte quantitativo, con quelli ottenuti mediante induzione diretta del tetto dell'archenteron su ectoderma competente espiantato. Il metodo degli innesti di pieghe ectodermiche su diverse regioni della placca neurale ha inoltre provato che entrambe le influenze induttrici (attivante e trasformante) pur adattandosi alle particolari condizioni sperimentali, esplicano la loro azione sul materiale innestato in modo identico a quello che si riscontra nel normale processo di induzione dell'ectoderma ad opera del sottostante tetto dell'archenteron.

Questi risultati soprariportati permettono di attribuire direttamente all'influenza del tetto dell'archenteron la modificazione regionale avvenuta secondariamente, in seguito all'innesto, nel materiale neurale studiato nella presente ricerca. Si può quindi concludere che, allo stadio di neurula, l'area cordale posteriore del tetto dell'archenteron, sottostante e corrispondente alla parte posteriore della placca neurale su cui è stato fatto l'innesto, possiede un'attiva influenza caudalizzante.

Tale influenza è distribuita tanto nel materiale mediano (corda dorsale) quanto in quello laterale (miotomi), e, con un'intensità minore, nell'ambiente circostante (tessuto connettivo della regione caudale).

La corda dorsale, ed il materiale neurale da essa indotto (midollo spinale), hanno un'azione caudalizzante completa, tanto che il materiale innestato, originariamente a tendenza prosencefalica, diviene, nella parte basale, a loro contatto, midollo spinale e rombencefalo.

L'influenza caudalizzante si diffonde lungo tutta la piega con un'intensità sempre minore, tanto che nella parte più lontana dalla regione d'innesto le tendenze prosencefaliche, insite nel materiale, precedentemente attivato, possono manifestarsi in strutture a carattere prosencefalico.

Però negli innesti, nella parete a contatto coi miotomi, anche nella zona più distante dall'area di innesto, il materiale ha carattere rombencefalico. Questo indica che anche ai miotomi va assegnata un'influenza caudalizzante che favorisce la caudalizzazione del materiale neurale a tendenza prosencefalica, iniziata nell'area basale dell'innesto, a contatto con la corda dorsale e col midollo spinale.

Poiché le strutture prosencefaliche, presenti nella parete a contatto col tessuto connettivo della regione caudale non sono mai completamente sviluppate e spesso sono atipiche, anche nell'ambiente circostante l'innesto (connettivo caudale) è presente l'influenza caudalizzante, ma con un'intensità minore che nel tetto dell'archenteron, che si esplica soltanto con l'inibire lo sviluppo normale di strutture prosencefaliche vicine.

La presenza di un gran numero di cromatofori intorno al materiale innestato è un segno dell'azione dell'influenza caudalizzante su singoli elementi cellulari d'origine neurale, nella zona più periferica della sua influenza.

Esaminando dal punto di vista quantitativo il materiale neurale innestato si rileva come le strutture a carattere spinale e rombencefalico rispetto a quello a carattere prosencefalico sono molto più estese e sviluppate.

In precedenti ricerche (Sala 1955) ⁽⁸⁾ si è constatato che nell'area precordale del tetto dell'archenteron è presente soltanto l'influenza attivante che, con intensità molto elevata, induce nell'area corrispondente della neurula strutture prosencefaliche. Ora, proprio tale area della neurula, innestata nella regione posteriore della placca neurale, a contatto con l'area cordale posteriore del tetto dell'archenteron, ha assunto carattere rombencefalico e spinale, nella maggior parte della sua estensione. Dal punto di vista quantitativo si può concludere, in forma preliminare, che l'intensità dell'influenza caudalizzante, che nell'innesto, si è sovrapposta all'iniziale intensa influenza prosencefalica (influenza attivante) è molto elevata. Nuove esperienze, eseguite su un maggior numero di esemplari, con innesti quantitativamente omogenei, eseguiti a diversi livelli della regione posteriore della neurula, e confrontati con i risultati ottenuti con il metodo degli espianti, permetteranno una determinazione più esatta.

La presente ricerca, sia pure in forma preliminare dal punto di vista quantitativo, indica con certezza che l'influenza caudalizzante, nell'area cordale posteriore del tetto dell'archenteron, in embrioni di *Ambystoma mexicanum*, allo stadio di neurula, è presente e con intensità molto elevata.

L'autore ringrazia sentitamente il dott. P. D. Nieuwkoop per l'ospitalità e la preziosa assistenza offerta al Laboratorio Hubrecht di Utrecht, durante la preparazione della presente Nota.

CONCLUSIONI.

1° In embrioni di *Ambystoma mexicanum*, mediante innesti omoplastici di materiale neuroectodermico, prelevato dalla parte cefalica della placca neurale, si constata che la parte posteriore della placca neurale, e, di conseguenza, l'area cordale posteriore del tetto dell'archenteron, conserva la capacità di caudalizzare le tendenze prosencefaliche del materiale neurale innestato anche allo stadio di neurula.

2° La zona mediana (corda dorsale e midollo spinale) ha un'intensa influenza caudalizzante, che dirige a strutture spinali e rombencefaliche il neuroectoderma attivato, che inizialmente tendeva verso formazioni prosencefaliche. La regione laterale (miotomi) ha pure un'influenza caudalizzante che favorisce l'ulteriore formazione di strutture rombencefaliche in aree lontane dalla zona d'innesto, mentre nell'ambiente circostante (connettivo caudale) l'intensità dell'influenza caudalizzante è minore; non giunge a caudalizzare il materiale neurale prosencefalico presuntivo, ma inibisce la formazione di tipiche strutture prosencefaliche nelle zone periferiche dell'innesto ove l'influenza caudalizzante si è propagata con un'intensità decrescente, e trasforma singoli elementi cellulari in materiale di cresta neurale a carattere caudale.

Biologia. — *Risultati di asportazione di territori vegetativi nella blastula e nella gastrula di Anfibi Anuri* ^(*). Nota di GIOVANNA FISCHIAROLO, presentata ^(**) dal Socio G. COTRONEI.

I.

La meccanica dello sviluppo dei derivati entodermici, rispetto a quella dei derivati degli altri due foglietti embrionali, è stata assai poco analizzata. Le acquisizioni migliori attuali sono limitate ai seguenti punti.

A) Localizzazione dei territori presuntivi.

Le conoscenze si riferiscono in gran parte agli Anfibi; sono molto frammentarie ed esclusivamente ristrette agli stadi di bottone codale, di neurula e di gastrula. I metodi che ci permisero di ottenerli, oltre quelli classici primitivi, furono quelli delle colorazioni vitali, tipo Vogt; quelli micrurgici dell'asportazione; e quelli della coltivazione *in vitro*, fino al differenziamento di porzioni determinate isolate. Richiamo le ricerche di Dalcq ⁽¹⁾, in *Disco-glossus* (stadio di bottone codale); di Balinsky ⁽²⁾ (1947), negli Urodeli; di Nakamura e Tahara ⁽³⁾ (1953-1954), negli Anuri (stadio di neurula), con i coloranti vitali; quelli di Kemp ⁽⁴⁾ (1946) e di Okada ⁽⁵⁾ (1953-1954) negli Urodeli con le asportazioni; quelli di Dürken ⁽⁶⁾ (1925), di Kusche ⁽⁷⁾ (1929), di Mangold ⁽⁸⁾ (1936), di Holtfreter ⁽⁹⁾ (1934-1939), di Nicholas ⁽¹⁰⁾ (1948), di Stableford ⁽¹¹⁾ (1948), negli Anuri e Urodeli allo stadio di gastrula giovane o in stadi più tardivi, con le coltivazioni *in vitro*.

Allo stadio presente delle indagini la topografia degli organi entodermici presuntivi si riferisce esclusivamente a qualche abbozzo, ed è ancora malsicura.

(*) Ringrazio il prof. Reverberi per aver guidato le presenti ricerche e per la concessione di una borsa di studio del C.N.R. Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Palermo.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) A. DALCQ, « Arch. Biol. », 54, 477 (1943).

(2) B. J. BALINSKY, « Roux' Arch. », 143, 126 (1947).

(3) O. NAKAMURA e J. TAHARA, « Mem. Osaka Univ. », 2, 1 (1953); « Mem. Osaka Univ. », 3, 77 (1954).

(4) E. KEMP, « Univ. Calif. Pubbl. Zool. », 51, 159 (1946).

(5) T. S. OKADA, « Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto », 20, 3 (1953); « Zool. Magazine », 62, 287 (1953); « Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto », 21, 1 (1954).

(6) B. DÜRKEN, « Anat. Anz. », Suppl. 1-5, 84 (1925).

(7) W. KUSCHE, « Roux' Arch. », 120, 192 (1929).

(8) O. MANGOLD, « Naturwiss. », 24, 753 (1936); « Arztl. Forsch. », 4, 1 (1950); Acta Gen. Med. Gemell. », 2, 49 (1953);

(9) J. HOLTFRETER, « Roux' Arch. », 132, 307 (1934); « Roux' Arch. », 138, 522 (1938); « Roux' Arch. », 139, 110-227 (1939).

(10) J. S. NICHOLAS, « Ann. N. Y. Acad. Sci. », 49, 801 (1948).

(11) L. S. STABLEFORD, « J. Exp. Zool. », 109, 385 (1948).

B) *Fenomeni di induzione e di reazione.*

a) Le capacità di indurre dell'entoderma sono state anch'esse poco analizzate. Stöhr ⁽¹²⁾ (1931) ha mostrato che in assenza di entoderma vitellino non si formano né cuore né branchie. Holtfreter ⁽⁹⁾ (1938; 1939) combinando frammenti di ectoderma con frammenti di mesoderma ottenne scarso differenziamento di questo (piccole quantità di connettivo): aggiungendo però nelle combinazioni anche entoderma ottenne differenziamento e organizzazione del mesoderma. Nieuwkoop ⁽¹³⁾ (1946) asportando tutta la massa entodermica vitellina, e lasciando intatto il mesoderma, ottenne embrioni difettosi di branchie, di cuore e di splancnopleura; il sistema muscolare è invece normale: non si differenzia però la muscolatura liscia dell'intestino; questa si trasforma in muscolatura striata di arti supplementari. La capacità induttiva dell'entoderma è dimostrata anche dalle esperienze di Bacon ⁽¹⁴⁾ (1945): frammenti di mesoderma di gastrula giovane danno origine a formazioni cardiache solo se unite con frammenti di entoderma.

b) Le capacità di differenziamento dell'entoderma sotto l'influenza del mesoderma possono dedursi dalle esperienze di Holtfreter ⁽⁹⁾ (1934; 1938; 1939), Stableford ⁽¹¹⁾ (1948), Takaya ⁽¹⁵⁾ (1952), Mikami e Murakawa ⁽¹⁶⁾ (1952, 1953) e soprattutto di Okada ⁽⁵⁾ (1953; 1954). Secondo quest'ultimo Autore, che ha operato espianti di entoderma presuntivo puro o di entoderma presuntivo associato con mesoderma, un differenziamento ottimale dell'entoderma si ha solo in associazione col mesoderma.

C) *Situs viscerum.*

Le conoscenze delle cause che determinano il normale o invertito *situs viscerum*, come compare dalla letteratura più recente sull'argomento (Woellwarth ⁽¹⁷⁾ (1950). Mikami et al. ⁽¹⁶⁾ (1954)) sono lungi dall'essere esaurienti. Nulla, poi, è conosciuto dei meccanismi che determinano la forma e le dimensioni delle diverse parti del sistema digerente.

D) *Origine delle cellule germinali.*

Sono ben note le esperienze di Bonoure ⁽¹⁸⁾ (1937; 1950; 1954) sugli Anfibii Anuri. Questo Autore, irradiando con raggi U. V. il polo vegetativo di uova al principio dello sviluppo, ha ottenuto individui con gonadi completamente sprovviste di cellule germinali.

(12) STÖHR P., « Roux' Arch. », 124, 707 (1931).

(13) NIEUWKOOP P. D., « Arch. Néerl. Zool. », 8, 1 (1946).

(14) BACON R. L., « J. Exp. Zool. », 98, 87 (1945).

(15) TAKAYA H., « Annot. Zool. Jap. », 25 (1952).

(16) MIKAMI J. e MURAKAWA S., « Annot. Zool. Jap. », 25 (1952); et al., « Acta Med. Biol. Jap. », 1-2, 163 (1953).

(17) WOELLWARTH C., « Roux' Arch. », 144, 178 (1950).

(18) BONOURE L., « C. R. Acad. Sci. Paris », 204, 1837 (1937); « Arch. Anat. Micr. », 39, 247 (1950); « J. Embryol. Exp. Morph. », 2, 245 (1954).

L'Autore ritiene che al polo inferiore dell'uovo indiviso esiste un plasma germinale, che, successivamente verrebbe ripartito in alcune cellule entodermiche, che si convertirebbero in cellule germinali.

Secondo lo stesso Autore il plasma germinale, nelle successive divisioni dell'uovo, si porta, con un moto ascensionale, verso l'alto.

Dell'argomento si sono occupati anche Monroy ⁽¹⁹⁾ (1939) e Nieuwkoop ⁽¹³⁾ (1946). Un moto ascensionale dei blastomeri vegetativi è stato notato con l'impiego delle marche colorate da Schechtman ⁽²⁰⁾ (1934-1937), da Nicholas ⁽¹⁰⁾ (1945) e da Nieuwkoop ⁽¹³⁾ (1946): una marca colorata posta al polo vegetativo dell'uovo indiviso si rinviene nella blastula, nella porzione centrale del pavimento del blastocele.

Secondo le ricerche di Ballard ⁽²¹⁾ (1955), l'ingressione non si compirebbe esclusivamente in senso unipolare ma sarebbe multipolare: la colorazione nel pavimento del blastocele comparirebbe soltanto all'inizio della gastrulazione.

II.

A) *Ricerche personali.*

Allo stadio di blastula e di gastrula (*Discoglossus*; *Bufo*) con una puntura di ago fu operata una breccia al polo vegetativo: sotto la pressione delle membrane ovariali, venne espulso abbondante materiale entodermico vitellino: la quantità di questo venne aumentata con pressione manuale; fu valutato un'espulsione di materiale equivalente a circa 1/3 della massa totale dell'uovo. Ulteriore perdita di entoderma vitellino si ebbe in tempi successivi all'operazione, per processo spontaneo.

I risultati derivati dalla lesione furono seguiti lungo tutto lo sviluppo: alcuni embrioni furono portati oltre metamorfosi. Furono presi in esame: l'intestino e i suoi derivati, il *situs viscerum*, le gonadi.

B) *I risultati.*

B₁) Quando l'operazione fu eseguita su blastule, si notarono spesso anomalie alla gastrulazione: la mortalità risultò elevata. In alcuni casi però gli animali operati furono condotti alla metamorfosi. In particolare, lo studio di questi dette i seguenti risultati:

1° sempre presenti i derivati entodermici: polmoni, apparato digerente, fegato con cistifellea, pancreas; il loro aspetto e la loro ubicazione risultò normale;

2° il *situs viscerum* risultò anche normale, con cuore e stomaco a sinistra, duodeno e fegato a destra;

(19) MONROY A., « Arch. It. Anat. e Embr. », 41, 368 (1939).

(20) SCHECHTMAN A. M., « Proc. Soc. Exp. Biol. e Med. », 32, 1072 (1934); « Science », 35, 222 (1937).

(21) BALLARD W. W., « J. Exp. Zool. », 129, 77 (1955).

3° le gonadi si presentarono di aspetto e grandezza normale. All'esame istologico non fu notata alcuna riduzione del numero dei gonociti.

Il sistema digerente, misurato nelle sue singole parti, si dimostrò di costituzione e rapporti normali.

In conclusione, all'asportazione di significanti porzioni di entoderma vitellino allo stadio di blastula, non fa seguito alcuna anomalia: tutti gli organi entodermici sono normali e le stesse porzioni dell'apparato digerente risultano di forma e proporzioni consuete.

B₁₁) Nei casi in cui l'operazione fu eseguita su gastrule giovani, la mortalità risultò molto elevata e nessun individuo poté essere portato fino alla metamorfosi. Furono studiati gli embrioni che soppravvissero dieci o quindici giorni dopo l'operazione.

L'esame eseguito *in vivo* e lo studio istologico di sezioni trasversali di embrini diedero i seguenti risultati:

1° anomalie notevoli a carico della regione cefalica: in particolare, deformazioni delle diverse parti dell'encefalo;

2° alterazioni della regione boccale e talvolta, assenza completa della apertura relativa;

3° presenza di un solo occhio, talvolta non ben differenziato. In un solo caso gli occhi erano completamente assenti;

4° riduzione delle spire intestinali.

C) *Discussione.*

Come fu descritto, gli individui derivanti da uova operate allo stadio di blastula, furono capaci di svilupparsi lungamente, e si presentarono per tutte le loro strutture, particolarmente quelle entodermiche, completamente normali. Gli individui, invece, derivanti da uova operate allo stadio di gastrula si presentarono profondamente anomali sia per le strutture cefaliche che per quelle entodermiche.

La presenza di tutti gli organi di origine entodermica negli individui derivati da uova operate allo stadio di blastula, trova spiegazione nella supposizione, confortata dalle ricerche di numerosi Autori, che la determinazione del territorio entodermico all'epoca in cui fu eseguita l'operazione, non è ancora avvenuta; e che quindi a spese del materiale rimasto *in situ* abbia potuto differenziarsi un apparato digerente completo in tutti i suoi segmenti e nei suoi derivati. La presenza costante delle gonadi e la loro normale struttura morfologica e istologica, trova spiegazione nell'ipotesi, già avanzata da Nieuwkoop, che il plasma vegetativo dell'uovo non è essenziale alla formazione delle cellule germinali.

Alcune delle anomalie osservate negli individui derivati da uova operate allo stadio di gastrula possono spiegarsi, come fu del resto verificato, con alterazioni dei processi gastrulari e conseguentemente dei processi di induzioni; le altre anomalie (riduzione delle spire intestinali) possono spiegarsi come esiti dell'asportazione di particolari porzioni dell'entoderma, a quest'epoca (gastrulazione) già irreversibilmente determinato.

Biologia. — *Una nuova sottospecie di «Musca domestica» L. della regione etiopica*^(*). Nota di GIUSEPPE SACCÀ e LEO RIVISECCHI, presentata^(**) dal Socio D. MAROTTA.

Dal dicembre 1954, il nostro Istituto ha ricevuto numerosi esemplari vivi di *Musca domestica* (sensu lato) da varie località africane. Lo studio di questo materiale ha rivelato la presenza di una sottospecie non ancora conosciuta⁽¹⁾, alla quale è stato imposto il nome di *Musca domestica curviforceps* subsp. nova, poiché il suo carattere diagnostico principale è quello di avere dei forcipi particolarmente ricurvi, muniti di un processo terminale sporgente in basso e alquanto ristretto verso la estremità distale, tale da conferire all'organo la forma di un becco adunco (fig. 1 a e fig. 3). Da tutte le altre forme di *M. domestica* s.l. essa si distingue in base a tale carattere; infatti il forcipe di *vicina*, *domestica*, *nebulo*, *cuthbertsoni* termina costantemente con un processo spatoliforme a margine arrotondato (fig. 1 a e fig. 2). Particolarmente interessante è il confronto tra la nuova forma e la simpa-

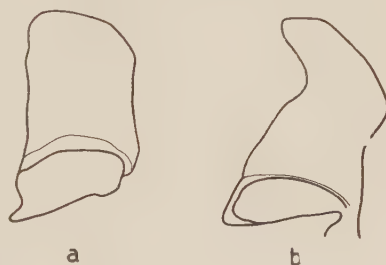


Fig. 1. — *Musca domestica cuthbertsoni* (a) e *Musca domestica curviforceps* (b): profilo dei forcipi, distaccati dall'ipopigio.

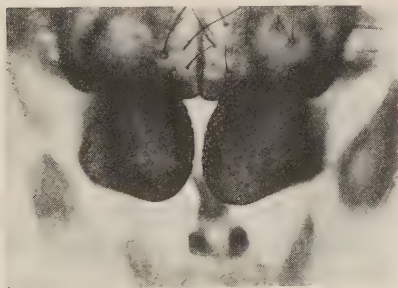


Fig. 2. — *M. domestica cuthbertsoni*, forcipi in situ.



Fig. 3. — *M. domestica curviforceps*, forcipi in situ.

trica *cuthbertsoni*, dalla quale essa si distingue per una numerosa serie di caratteri tra cui i più importanti riguardano la biometria del capo, del torace, delle ali, del pupario, la pigmentazione dell'addome, la lunghezza delle prime setole dorso-centrali posteriori, la forma dei palpi, dell'ultimo articolo delle antenne, dei forcipi (figg. 1, 2, 3), del quinto sternite, delle spermateche.

(*) Roma. Istituto Superiore di Sanità. Laboratorio di Parassitologia.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) « Rend. Ist. Sup. Sanità », vol. XIX (in corso di stampa).

Biologicamente le due forme differiscono per il fototropismo, accentuato in *cuthbertsoni*, scarso in *curviforceps*, per le esigenze di spazio richiesto per la copula, massime, in *cuthbertsoni*, ridotte in *curviforceps*, per il tempo occorrente per la maturità sessuale, tardiva in *cuthbertsoni*, precoce in *curviforceps*, per la domesticità, scarsa in *cuthbertsoni*, marcata in *curviforceps*. Nelle prove di laboratorio è emerso un isolamento sessuale completo fra maschio *cuthbertsoni* e femmina *curviforceps* e un isolamento solo parziale fra maschio *curviforceps* e femmina *cuthbertsoni*. Gli incroci ottenuti in quest'ultimo caso danno luogo a ibridi lussureggianti.

Musca domestica curviforceps è stata riscontrata in quasi tutte le località della regione etiopica da cui fino ad oggi abbiamo potuto ricevere materiale. Essa sembra largamente distribuita dal Sud Africa alla Somalia e alla Liberia. È anche importante notare che la nuova sottospecie, la cui facies è molto simile a quella di *Musca domestica domestica*, era passata finora del tutto inosservata, nonostante che vari Autori, avessero studiato il genere *Musca*, anche sulla base della morfologia degli organi genitali. Nel ricco materiale messo recentemente a nostra disposizione dalla Direzione del Commonwealth Institute of Entomology, abbiamo riscontrato la presenza di numerose *curviforceps*, spesso classificate come *vicina* o *domestica*.

Gli Autori tengono ad esprimere la loro gratitudine alla Direzione del Commonwealth Institute of Entomology e particolarmente al dott. F. van Emden, nonché al dott. R. Foster (Colonial Insecticides Research. Arusha, Tanganica), al dott. D. J. H. Rose (Dept. of Research and Specialist Service, Salisbury, South Rhodesia) e al dott. H. E. Paterson (South African Institute for Medical Research, Johannesburg).

Biologia. — *Studi sul determinante germinale (d. g.) nei Chetognati: Effetti della centrifugazione delle uova e azione del LiCl ed NaSCN (*)*.
Nota di ELVEZIO GHIRARDELLI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

In alcuni miei precedenti lavori (1953)⁽¹⁾, (1954)⁽²⁾, ho riferito di esperienze tendenti a dimostrare la natura e l'azione del determinante germinale (d. g.) nelle uova dei Chetognati e particolarmente nelle uova di *Spadella cephaloptera*.

La lesione di uno dei due primi blastomeri mediante micropuntura conduce alla formazione di un numero notevole di gastrule prive di cellule germinali; numero superiore a quello previsto teoricamente, ciò che potrebbe far supporre che la presenza del d. g. sia indispensabile per la formazione

(*) Ricerche eseguite presso il Centro di Studio per la Biologia del C.N.R., alla Stazione Zoologica di Napoli e l'Istituto di Zoologia della Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

(1) E. GHIRARDELLI, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», vol. XXIV, fasc. 3 (1953).

(2) E. GHIRARDELLI, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», vol. XXV, fasc. 3 (1954).

delle cellule germinali primitive, ma anche che il d. g. a sua volta possa essere la espressione visibile di uno stato particolare di una determinata regione del plasma ovulare (Ghirardelli, 1954) ⁽³⁾.

Risulta comunque da queste osservazioni che le uova di *Spadella cephaloptera* sono a determinazione assai precoce; ciò sembra del resto essere confermato dai risultati ottenuti centrifugando le uova di *Spadella* a 20.000 g. Si ottiene nelle uova insegmentate una netta stratificazione dei materiali. Ad uno dei poli dell'uovo si osserva una regione ialina, al centro, in corrispondenza della regione equatoriale una larga fascia costituita prevalentemente di granuli lipidici seguita da un'altra regione ialina, ma di aspetto più opaco della precedente. Al polo opposto, quello cioè in cui si raccolgono i materiali più pesanti, si nota un piccolo ammasso di granuli che si colorano intensamente con il verde Janus.

In queste uova non è possibile osservare il d. g. che come è noto compare spesso un poco più tardi.

Del resto il piccolo numero di uova trattate non mi ha fino ad ora permesso di provare su di esse tutte le reazioni istochimiche necessarie a mettere in evidenza le piccole granulazioni ribonucleiche che costituiscono il d. g. in questo stadio.

Granulazioni pironinofile frammiste ai materiali stratificati e particolarmente ai granuli di vitello non sono identificabili con sicurezza come elementi del d. g.

Queste uova sono ancora capaci di segmentarsi, tuttavia la segmentazione si arresta ben presto quasi sempre dopo la seconda o terza divisione.

Le uova centrifugate allo stadio di due blastomeri, se il primo solco è completo, di solito non progrediscono oppure si segmentano dando luogo ad una massa più o meno caotica di blastomeri; se il primo solco è incompleto si ottiene una stratificazione dei materiali molto simile a quella che si osserva in uova non segmentate.

Al di sotto di 20.000 g. non si ha alcun effetto apprezzabile per quanto riguarda le uova di *Spadella* che possono anche segmentare con una certa regolarità; più sensibili sembrano essere le uova di *Sagitta inflata* che già 7-8.000 g. e talvolta anche a meno per 20', danno larve tutte con coda piegata ad angolo.

Le esperienze di centrifugazione non si sono potute eseguire che su una cinquantina di uova date le grandissime difficoltà che si incontrano per avere le uova stesse al momento desiderato e nello stadio voluto; difficoltà alle quali ho fatto cenno nei miei lavori citati in precedenza e che in questo caso sono aumentate dalle esigenze tecniche inerenti alla preparazione del materiale da centrifugare. Questo veniva allestito secondo la tecnica indicata da Harvey (1932) ⁽⁴⁾.

(3) E. GHIRARDELLI, « Boll. Zool. », vol. XXI, fasc. 2 (1954).

(4) E. B. HARVEY, « Biol. Bull. », vol. 62, fasc. 2 (1932).

Avendo osservato che la tecnica della centrifugazione delle uova non mi ha permesso fino ad ora di risolvere in modo definitivo i problemi che mi ero proposto, ho ritenuto utile trattare le uova con agenti chimici la cui azione è già stata largamente sperimentata su altri organismi, particolarmente Anfibi ed Echinodermi, alludo al LiCl ed al NaSCN.

Per quanto riguarda l'ampia bibliografia sull'argomento rimando ai recenti lavori di Ranzi (1954)⁽⁵⁾ e di Lallier (1955)⁽⁶⁾.

Tenendo presente l'assunto cui ho accennato in precedenza secondo il quale il d. g. può essere la espressione di uno stato particolare del citoplasma ovulare ed i risultati delle ricerche di Ranzi e coll., era da supporre che l'azione dei sali suddetti modificando la struttura delle proteine ovariali avrebbe anche forse potuto avere qualche conseguenza sulla formazione del d. g. e sullo sviluppo delle cellule germinali primitive. Anche se i risultati delle mie esperienze non si possono per ora considerare definitivi, ritengo tuttavia opportuno esporli in breve, anche perché i Chetognati non sono mai stati oggetto di ricerche in questo senso.

È evidente pertanto che numerosi tentativi infruttuosi sono stati compiuti prima di ottenere qualche risultato tangibile.

Ho utilizzato per queste ricerche uova di *Spadella cephaloptera* ed uova di *Sagitta inflata* raccolte utilizzando le deposizioni di individui isolati in Boveri e tenuti a 18° (Ghirardelli, 1953⁽¹⁾).

Furono usate soluzioni di LiCl ed NaSCN in acqua di mare filtrata, varianti da 0,1 M a 0,02 M. Concentrazioni superiori a 0,1 M si dimostrarono sempre tossiche. I migliori risultati si ottennero usando concentrazioni di 0,05-0,06 M tanto per il Litio che per l'NaSCN. A queste concentrazioni la mortalità risultò assai alta, d'altra parte concentrazioni minori si dimostrarono del tutto senza effetto.

Le prime esperienze fatte riguardano le uova non fecondate. Poiché esse vengono deposte dopo la penetrazione dello spermatozoo, tentai di fare agire i sali su individui prossimi a deporre. I risultati furono negativi perché le concentrazioni più alte ebbero effetto letale sugli animali adulti, mentre le concentrazioni più basse erano del tutto senza effetto anche dopo trattamenti prolungati. In un caso una *Spadella* sopravvisse per 18 giorni in LiCl 0,02 M e depose otto uova che si svilupparono regolarmente sempre nella stessa soluzione, dando larve normali che vissero per 20 giorni dopo la schiusa nelle soluzioni indicate.

Lo stadio in cui l'azione del Li alle concentrazioni di 0,05-0,06 M fu più manifesto, fu quello di gastrula. Uova trattate per 3 ore in questo stadio diedero un certo numero di larve anomale che si differenziavano dalle larve normali soprattutto per la forma della coda che risultò spesso piegata e più o meno ritorta e per la lunghezza generalmente minore. Anche per quanto

(5) S. RANZI, *Problemi di sviluppo*, «Seminario Biol. Fac. Scienze Milano», p. 65 (1954).

(6) R. LALLIER, «Arch. Biol.», vol. LXVI, fasc. 2 (1955).

riguarda l'NaSCN, l'azione più spiccata si notò alle concentrazioni indicate. Pure in questo caso osservai anomalie della coda che generalmente si presentava raccorciata. In un caso essa era del tutto assente. Data la opacità del corpo delle *Spadelle* non si possono rilevare con sicurezza anomalie delle cellule germinali primitive, almeno con osservazioni *in vivo*. In qualche caso però esse appaiono spostate rispetto alla sede abituale. Mi riservo però di dare maggiori dettagli a questo proposito non appena ultimato l'esame istologico delle sezioni.

Più sensibili sia all'azione del Li che a quella dell'NaSCN sembrano essere le uova di *Sagitta inflata*. Infatti ottenni larve mostruose anche trattando uova all'inizio della segmentazione sempre con le concentrazioni e per i tempi indicati. Il numero delle larve anomale è anche superiore a quello osservato in *Spadella*. Le larve al Li generalmente sono più corte di quelle normali, in compenso il tronco si presenta un poco più allargato, e la coda più sviluppata, spesso piegata a spirale. Le cellule germinali primitive di un lato del corpo, qualche volta, per lo meno al binoculare non sono visibili.

Dato l'andamento stagionale non mi fu possibile avere un grande numero di esemplari maturi di *S. inflata* per cui il numero di uova sul quale sperimentai non è risultato troppo alto. Pertanto i dati riassuntivi riportati nelle tabelle seguenti potranno anche venir modificati da ricerche ulteriori.

TABELLA I.

«*Spadella cephaloptera*». Uova trattate con LiCl

Totale	Embrioni morti	Larve normali	Larve anomale
192	100	79	13
%	52,08	41,14	6,78

TABELLA II.

«*Spadella cephaloptera*». Uova trattate con NaSCN

Totale	Embrioni morti	Larve normali	Larve anomale
69	44	16	9
%	63,77	23,19	13,04

TABELLA III.

« *Sagitta inflata* ». Uova trattate con LiCl.

Totale	Embrioni morti	Larve normali	Larve anomale
63	50	1	12
%	79,36	1,59	19,05

TABELLA IV.

« *Sagitta inflata* ». Uova trattate con NaSCN.

Totale	Embrioni morti	Larve normali	Larve anomale
20	18	—	2
%	90	—	10

Faccio rilevare che solo un certo numero di uova, circa il 10% complessivamente, furono assoggettate alle concentrazioni massime e minime. Il resto fu sempre trattato con soluzioni 0,05–0,06 M. È curioso rilevare che nella maggior parte dei casi l'azione dei sali o è senza alcun effetto o causa la morte degli embrioni in stadi più o meno precoci dello sviluppo o appena dopo la schiusa. Spesso poi tutte le uova della medesima ovatura reagiscono nello stesso modo. Mi è capitato di osservare che due o tre ovature deposte naturalmente da individui diversi nello stesso Boveri reagivano una in modo differente dall'altra pur essendo sottoposte allo stesso trattamento e pur osservandosi come ho detto lo stesso comportamento da parte delle uova della medesima ovatura. Tutto ciò farebbe quasi pensare ad una diversa suscettibilità individuale all'azione dei sali da parte di ciascuno degli individui che hanno deposto le uova.

Una interpretazione dei fatti accennati non è per ora possibile o per lo meno mi sembra assai prematura. Mi basta in questa sede di segnalare che anche i Chetognati sono sensibili all'azione del LiCl ed NaSCN riservandomi di tornare sull'argomento non appena completato l'esame delle numerose sezioni di larve normali e di larve anomale. Nella stessa occasione conto di poter pubblicare anche qualcuna delle numerose fotografie e disegni fino ad ora eseguiti.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Mario Tenani

Tenuta (*) dal Corrisp. PIETRO CALOI

Il 28 aprile di quest'anno, all'età di 69 anni, spirava il Socio Nazionale prof. Mario Tenani. Ad un anno e mezzo di distanza dalla perdita del compianto prof. Vercelli, la Geofisica italiana era nuovamente in lutto. I geofisici delle nuove generazioni non potevano non avvertire quel senso di smarrimento, che prende una comunità – comunque impegnata nella lotta dello scibile – quando vien meno una guida, cui era solita rivolgersi nelle situazioni difficili.

La responsabilità per i continuatori si faceva vieppiù impegnativa: erede di una nobilissima tradizione, bruscamente privata da esemplare saggezza, temprata in durissima esperienza.

Non è facile fissare, nel volgere di pochi periodi, i frutti dell'attività di una persona laboriosissima, quale fu il prof. Tenani. Del resto, in generale riesce estremamente difficile, in un giudizio complessivo, per quanto parziale, graduare il valore intrinseco delle opere di un ricercatore. Nel campo dello spirito, il tempo assolve quella funzione che spetta alla distanza nel mondo tridimensionale: collocare i valori e le forme nella giusta prospettiva. Così, accade sovente che, pagine passate per qualche tempo inosservate, assumano d'improvviso la loro intrinseca importanza, che le rende innovatrici, precludendo a nuove vie d'indagine.

Ad ogni modo, poiché un sommario va pur fatto, riassumerò i capitali dell'attività scientifica del prof. Tenani. Non mi soffermerò sulla brillantissima carriera scolastica, culminata con la laurea in Fisica, conseguita presso l'Università di Pisa a pieni voti assoluti e lode.

Nel periodo trascorso presso l'Istituto di Fisica della Università di Pisa (1907-1910), il Tenani si è interessato specialmente del fenomeno Zeeman e di alcune sue anomalie, della scomposizione magnetica delle linee spettrali e di un nuovo metodo di studio del campo magnetico.

Gli studi compiuti dal Tenani presso l'Osservatorio Aerologico di Vigna di Valle vertono sopra tutto su questioni meteorologiche (1915-1923) e riguardano in particolare l'uso dei palloni frenati nei sondaggi dell'alta atmosfera e nella previsione del tempo, la misura della velocità del vento in quota e il calcolo dell'energia del vento.

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

Durante la guerra 1915–1918 il prof. Tenani tenne numerosi corsi di istruzione al personale aerologico specializzato e al personale navigante. Nel 1918 fu chiamato alla Direzione del servizio aerologico presso il Comando Supremo, occupandosi dell'organizzazione dei servizi in zona di operazioni e di speciali stazioni per l'artiglieria.

Dal 1919 al 1923 tenne corsi di costruzioni aeronautiche presso il Politecnico di Torino (1919 e 1920) e insegnò aerologia, astronomia e navigazione al personale navigante nella Scuola superiore di Capua (1921–1923).

L'attività più intensa il prof. Tenani ebbe a svolgerla presso l'Istituto Idrografico della Marina, dove prestava servizio dal 1924. La sua attenzione fu portata in particolar modo verso questioni di magnetismo terrestre, ricerche mareografiche, problemi di meteorologia marittima; gli scandagli acustici, ecc. I suoi manuali sul magnetismo terrestre, sulla meteorologia nautica, sulle maree e correnti di marea si distinguono per chiarezza di esposizione e per rigore scientifico.

Specie il volume sulle *Maree e correnti di marea*, edito nel 1940, costituisce un modello del genere: completezza di trattazione – frutto di lunga, meditata esperienza – ricchezza di contributi originali, sobrietà ed efficacia dell'algoritmo, sono i pregi che fanno di questo libro un'opera fondamentale per quanti si avvincono allo studio dei movimenti del mare.

L'attenzione del prof. Tenani fu portata, a più riprese, alla risoluzione di alcuni problemi, concernenti la registrazione di particolari fenomeni. Degne di nota, per semplicità e genialità di concezione ed efficacia di risultati, furono le ricerche sperimentali che lo condussero all'ideazione di un nuovo tipo di correntometro e ad un termobatigrafo, ausilio preziosissimo nello studio della termologia del mare e dei laghi.

Nel campo del magnetismo terrestre e navale, istituì e diresse l'Osservatorio magnetico permanente del Forte Castellaccio in Genova, primo e – per lungo tempo – unico in Italia. Studiò con estrema perizia il problema delle bussole navali e i risultati delle sue ricerche espose nella pubblicazione *Principi costruttivi delle bussole magnetiche della Marina e dell'Aeronautica*. Per la Marina, in particolare, ideò un geniale tipo di bussola, insensibile alle sollecitazioni ambientali e quindi particolarmente adatto per piccole navi e per aerei.

Nel 1936 riuscì vincitore nel concorso per la cattedra di Fisica Terrestre presso l'Università di Napoli. Un anno dopo vinse pure il concorso per la cattedra di Meteorologia e Oceanografia dell'Istituto Superiore Universitario Navale di Napoli. Rinunciò ad entrambe, per conservare la sua preziosissima opera all'Istituto Idrografico, meritando per questo l'alto elogio della Marina.

Notevoli furono pure le sue benemeritenze nel campo didattico, come professore di Geofisica nell'Istituto Idrografico della Marina, direttore dell'Osservatorio magnetico di Genova e docente nell'Università e nella Scuola d'Ingegneria navale di Genova.

L'ultima guerra – specie il suo tragico epilogo – aveva profondamente scosso il prof. Tenani; non lo aveva però domo. Egli continuò ad operare,

anche se la salute era ormai malferma, Del dopoguerra appunto è uno dei Suoi lavori più impegnativi, dal titolo *Nozioni teoriche fondamentali sulla formazione e trasformazione delle onde*. In questo lavoro l'Autore affronta il poderoso problema del complesso ondoso, in mare mosso dal vento. Notevoli i capitoli dedicati alla generazione delle onde e alla loro propagazione in acqua profonda e in acqua bassa (avente cioè profondità minore di mezza lunghezza d'onda); alle vicende cui è soggetto un sistema di onde che si presenta davanti ad una costa, provenendo da una direzione determinata; alla rottura delle onde (frangenti e mareggiate). Viene provato come, dalla topografia del fondo in prossimità di una costa e dalla direzione, dal periodo e dall'altezza in acqua profonda delle onde in arrivo, sia possibile pervenire alla previsione della distanza dalla spiaggia dei frangenti più esterni, della lunghezza dell'onda nella regione di rottura, della direzione di provenienza del mare vivo o dell'onda morta, dell'angolo compreso fra la linea dei frangenti e la linea di costa, della velocità dei frangenti, ecc. Un lavoro insomma di estremo interesse, sia dal punto di vista scientifico che da quello delle applicazioni (specie per quanto si riferisce alla salvaguardia delle opere portuali).

Questa, in rapidissima sintesi, l'attività scientifica del prof. Tenani, che si compendia in circa 110 pubblicazioni.

L'attività del prof. Tenani naturalmente non si esaurì nella ricerca scientifica e nell'insegnamento. La Sua profonda preparazione, la vasta cultura, l'intelligenza versatilissima ebbero modo di esplicarsi in direzioni molteplici, dovunque portando contributi preziosissimi. Fu membro attivissimo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, della Commissione Geodetica e Geofisica Italiana, della Commissione Internazionale per le Maree, del Comitato di Esperti all'Unesco per l'Oceanografia Fisica e la Biologia Marina, della Commissione per la Talassografia e Limnologia, del Comitato Italiano per l'Anno Geofisico Internazionale (1926-1929-1931), ecc. Rappresentò l'Italia – nel campo dell'Oceanografia e Meteorologia – in numerose conferenze internazionali.

Sostituì il compianto prof. Vercelli alla Presidenza dell'Associazione Geofisica Italiana.

Ebbe numerosi riconoscimenti onorifici in Patria e fuori. Fra gli altri, per le sue innumeri benemerenze nell'incremento degli studi navali, il Ministero della Marina gli conferì una prima medaglia d'oro nel 1931, una seconda nel 1943 ed una terza d'argento nel 1953.

Ma io tengo qui a fissare, oltre e più che i meriti dello scienziato, alcuni degli aspetti dell'uomo – quelli che più ce l'hanno reso caro e che maggiormente ci hanno fatto rimpiangere la Sua scomparsa.

Il prof. Tenani ebbe il dono – dono che sovente è una conquista – di una grande umana semplicità. Era forse questa Sua caratteristica che faceva sentire sempre a loro agio quanti si trovavano con lui, perché da lui si era sempre accolti con quel sorriso aperto che invitava a serena comprensione ad amicizia. La Sua conversazione risentiva della spontaneità dei sentimenti, espressione di un animo limpido, incorrotto: una corrente di simpatia,

di umana solidarietà si stabiliva subito con l'interlocutore, anche il più riservato.

Questa serenità era autentica sostanza del Suo spirito, se si è potuta conservare intatta nella sorte avversa. È vivo, nella mia memoria, lo scambio di corrispondenza che ebbi con Lui nel 1944, quando rappresentavo al Nord il Comitato Nazionale per la Geodesia e la Geofisica.

Si stava combattendo la disperata lotta della sopravvivenza. All'incombente minaccia dello smembramento dell'Istituto Idrografico, il prof. Tenani - che già aveva perduto la casa nei bombardamenti di Genova - non pensava alle conseguenze che potevano riguardarlo personalmente; Sua vivissima preoccupazione era che venisse disperso oltre confine il frutto di tanti anni di lavoro, la continuità di una lunghissima serie di osservazioni.

Questo disinteresse del resto è alla base della Sua posizione nei confronti della Scienza.

È opinione diffusa fra la gente, anche colta, che chi si occupa oggi di Geofisica sappia odor di petrolio. In questi accostamenti è evidente una grossolana confusione. È vero, il geofisico, come scienziato, ha fornito i primi metodi per la prospezione del sottosuolo, ma è passato subito oltre. Fa sorridere pensare a Gutenberg o a Jeffreys attardati nella ricerca mineraria. È il problema della conoscenza che muove il loro spirito; essi non possono non essere nella zona d'avanguardia, fra il noto e l'ignoto, a meno di pensare ad una loro diserzione. I limiti dell'Universo particolare dell'uomo non possono essere trascendentalmente superati che in un'atmosfera di disinteresse: lo scienziato deve coltivare la curiosità intellettuale per sé stessa e non per ciò che può trarne di vantaggi, in quanto animale.

Si sente spesso accusare la scienza pura di inutilità. Cosa serve investigare sul calcolo assoluto, sugli spazi hilbertiani? Che importa conoscere l'origine del sistema solare, sapere se l'Universo è, oppure no, in espansione? Che vantaggi possono venire all'Umanità dalla conoscenza delle caratteristiche fisiche del nucleo centrale terrestre?

Giudizi ingiusti quanto sbrigativi. Tutte le grandi scoperte sono scaturite da ricerche compiute nell'ambito della cosiddetta scienza pura. Senza le basi stabilite dalla scienza, col lavoro insonne, e spesso ignorato, di generazioni di ricercatori, il progresso non avrebbe significato.

La scienza è come una grande fioritura nelle stagioni dell'umanità: la tecnica, l'industria ne sono i frutti. Quella condiziona queste, come il frutto presuppone il fiore.

Non tutti i fiori, è vero, si trasformano in frutti. La fioritura però ha già in sé una funzione, un profondo significato, indipendentemente dalla sua trasformazione in frutti: un significato estetico, una fresca sorgente di emozioni, un richiamo alla bellezza disinteressata.

È con gioia che io ho trovato il prof. Tenani in questa convinzione. Convinzione suffragata dalla Sua opera, che è sempre stata orientata verso una superiore visione delle cose: anche quando ripercorreva strade note, era per

prendere lo slancio che gli consentisse di andare, sia pure di pochissimo, oltre l'ultimo estremo raggiunto.

La scienza aveva per Tenani – come non può non avere – una missione altissima anche nel puro campo della speculazione, conduca questa o non conduca affatto a ritrovati tecnici.

Ciò significa essere nel pieno della tradizione italiana. In uno dei momenti più felici della sua storia culturale, l'Italia iniziò l'Europa alla scienza per mezzo dell'arte; anzi – come dice Stefanini – porse la scienza quale arte. Nell'inevitabile evoluzione di tempi e di costumi, nella redistribuzione di responsabilità, di compiti e di finalità, resta comunque titolo di onore essere in quel solco. E in esso si pose umilmente anche Mario Tenani per il quale scienza significava soprattutto offerta: offerta per i non iniziati di nuove impronte di Dio nell'Universo, di qualche nuovo lineamento della complessa architettura del Creato.

Mi piace terminare addittandolo ad esempio a quanti s'incamminano per le ardue vie di quel ramo della Scienza, da lui tanto nobilmente percorse, affinché il loro impegno stia tra l'agonismo e la missione, scevro da ogni misura venale e polemica; il resto – per dirla con un inciso di sapore evangelico – tutto il resto verrà loro dato per soprappiù.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica che i Colleghi Perucca, Dore e Solaini, impossibilitati ad intervenire alla commemorazione del Socio Mario Tenani, che avrà luogo nella presente seduta, hanno inviato messaggi di adesione, così come hanno fatto i Rettori delle Università di Genova e di Pisa.

Il Sindaco e l'Amministrazione Comunale di Pisa hanno delegato, quale loro rappresentante, il Socio Pistolesi; il Direttore dell'Istituto Idrografico della Marina, il prof. G. B. Pacella; il Presidente dell'Associazione Geofisica Italiana, il prof. Giorgi.

Il Socio Pietro Caloi rievoca, con commosse parole, la figura e l'opera del compianto prof. Tenani.

Il Presidente ringrazia il prof. Caloi per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del Socio scomparso, presenti alla commemorazione, la espressione del vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la perdita del valoroso scienziato.

Il Presidente comunica la dolorosa notizia della morte del Socio Corrispondente prof. Pietro Redaelli, ordinario di anatomia patologica nell'Università di Milano, spentosi nell'ottobre scorso, e invia alla memoria dell'illustre Collega, che sarà degnamente rievocato dall'Accademia, il reverente saluto della Classe e suo personale.

Il Presidente comunica che, avendo il prof. Pantaleo, Direttore Generale al Ministero della P. I., chiesto alla Presidenza dell'Accademia l'autorizzazione ad illustrare, in una seduta accademica, l'ultima lettera di Albert Ein-

stein, la Presidenza stessa ha ritenuto di sottoporre tale richiesta all'approvazione della Classe competente. Invita pertanto i Colleghi a prendere la parola.

Il Socio Armellini è senz'altro favorevole all'accoglimento della richiesta.

Il Socio Signorini rileva che la lettera di Einstein è già nota, in quanto pubblicata nel volume « Cinquant'anni di relatività 1905-1955 », presentato all'Accademia nella seduta del 13 giugno c. a., e anche ricorda di avere accennato egli stesso sia al volume che alla lettera in occasione del Giubileo della Relatività svoltosi nel luglio scorso a Berna, al quale egli prese parte proprio come rappresentante dell'Accademia.

Il Socio Signorini osserva però che la Classe non ha ancora commemorato Einstein e ritiene che, salvo diverso avviso dei Colleghi, il prof. Pantaleo potrebbe essere invitato a illustrare la lettera di Einstein in occasione della commemorazione accademica, quale occasione conveniente e opportuna per una comunicazione di tale genere. Propone frattanto che la Presidenza provveda a designare un Socio cui affidare il compito di pronunciare il discorso commemorativo.

La proposta del prof. Signorini è approvata ad unanimità.

COMUNICAZIONI VARIE

Il prof. Levi informa la Classe che, nella presente seduta, il Socio Edoardo Amaldi terrà una comunicazione d'importanza fondamentale sull'esistenza del così detto antiprotone e invita il predetto Socio a prendere la parola.

Il prof. E. Amaldi comunica alcuni risultati preliminari di una ricerca sull'annichilamento dei protoni negativi fatta in collaborazione da un gruppo di fisici dell'Università di California (Berkeley) con a capo Emilio Segrè, e da un gruppo dell'Università di Roma con a capo lo stesso E. Amaldi.

Nella primavera scorsa il gruppo romano aveva dato notizia di un evento osservato nella emulsione sensibile di lastre esposte alla radiazione cosmica, che poteva corrispondere all'annichilamento dovuto ad urto tra protone ed antiprotone. Più recentemente il gruppo di Berkeley ha annunciato la produzione, col sussidio del bevatrone colà esistente, di particelle corrispondenti al protone, ma con carica elettrica negativa. I due gruppi poi, lavorando d'accordo, hanno potuto osservare un evento, simile a quello prodotto dalla radiazione cosmica, in emulsioni sensibili esposte all'azione del bevatrone di Berkeley. L'importante scoperta resta così confermata da vari punti di vista, attraverso una collaborazione scientifica che fa ancora una volta onore ai sentimenti di umana solidarietà.

Il Socio E. Amaldi desidera porgere, a nome del gruppo universitario di Roma, il più vivo ringraziamento a tutti coloro che hanno costruito il bevatrone e lo mantengono attualmente in funzionamento. In particolare, al dott. E. J. Lofgren, il quale, nel soprintendere a tale funzionamento, ha cooperato in maniera essenziale al successo di questi esperimenti.

L'oratore, infine, conclude esprimendo il piacere personale che egli ha avuto nello svolgere questa ricerca in collaborazione con il prof. E. Segrè, vent'anni dopo il periodo in cui essi avevano lavorato insieme alla radioattività provocata dai neutroni, sotto la guida di Enrico Fermi.

Il Prof. E. Amaldi chiede quindi al Presidente il permesso di aggiungere qualche considerazione, di carattere generale, tendente a fare il punto della situazione delle ricerche nel campo della Fisica nucleare in Italia, limitata-mente però alla parte riguardante la ricerca fondamentale e non quella applicata. Dopo aver ricordato il contributo essenziale portato dai gruppi delle Università di Milano, Padova e Genova allo studio del così detto G-stack, i risultati ottenuti dal gruppo di Torino sui così detti eventi alla Schein, lo studio dell'urto dei pioni contro protoni o nuclei, fatto dal gruppo della Università di Bologna e quello della fotoproduzione dei pioni, fatto da un gruppo dell'Università di Milano, ha osservato che la radice di questi ottimi risultati sta nella scuola, che si è mantenuta ad un buon livello ed è anzi in netto miglioramento, e allo spirito di collaborazione che, già elevatissimo, si consolida di anno in anno sempre di più, creando collegamenti più stretti tra i vari centri universitari.

L'oratore desidera mettere in evidenza che allo sviluppo e al rafforzamento di questo spirito di collaborazione hanno grandemente contribuito due organismi; la Società Italiana di Fisica che, sotto la guida del suo instancabile Presidente prof. Polvani, è andata acquistando un'importanza sempre maggiore per la perfezione con cui vengono organizzati i congressi nazionali e internazionali, per il numero e l'entità dei premi e borse di studio e per la pubblicazione del « Nuovo Cimento », che rappresenta oggi una delle migliori riviste europee nel campo della fisica; l'altro organismo è l'Istituto Nazionale di Fisica nucleare che, articolato in quattro Sezioni e numerosi gruppi aggregati, distribuiti presso diverse Università, stimola, e, si può dire, impone la collaborazione in un clima di continua e vivace evoluzione, animata dal Presidente dell'Istituto prof. Bernardini.

Il Socio E. Amaldi osserva però che in tutte le ricerche italiane è palese un difetto, dovuto non alle persone, ma ai mezzi disponibili, difetto consistente nel fatto che le ricerche stesse riguardano esclusivamente l'osservazione o eventualmente la rivelazione dei fenomeni e dei corpuscoli, mai la loro produzione. Per questa, si impone la costruzione di macchine acceleratrici assai dispendiosa, cosa, sino a pochi anni or sono, praticamente impossibile in Italia. Si è cercato di rimediare negli ultimi due anni, da un lato con la costruzione, oggi ormai avanzata, di un sincrotrone nazionale, dall'altra con la partecipazione del nostro Paese al C.E.R.N., Centre Européenne pour la Recherche Nucléaire. La situazione sta dunque migliorando anche da questo punto di vista, ma non bisogna nascondere che uno sviluppo di questi studi che sia veramente adeguato alla loro importanza e alle necessità del Paese, richiede uno sforzo economico sensibilmente maggiore di quanto non sia stato fatto fino ad ora.

Il Presidente ringrazia il prof. E. Amaldi e la Classe si associa con un vibrante applauso.

Il Presidente, riferendosi al voto formulato dall'Accademia, inteso ad ottenere che i Premi Ministeriali per le Scienze Morali e per le Scienze Fisiche vengano conferiti annualmente e che l'onere finanziario relativo gravi sul Ministero della P. I., dà lettura del foglio della Direzione Generale delle Accademie e Biblioteche n. 10070 del 19 novembre c. a., con il quale il Ministero comunica che una riforma dei premi sembra per ora quanto meno prematura e che, comunque, il Ministero stesso, nonostante la più favorevole disposizione, non ha alcuna possibilità di reperire nei propri limitati stanziamenti la somma necessaria per i premi.

PLICHI SUGGELLATI

Viene presentato alla Classe un plico suggellato del prof. R. Cestari dal titolo «L'ultimo teorema di Fermat dimostrato» che l'autore ha consegnato all'Accademia in data 3 c. m. e la Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia consegnato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

CONGRESSI

Il Socio Giovanni Sansone presenta gli «Atti del Convegno Internazionale sulle Equazioni lineari alle derivate parziali» del 25-28 agosto 1954 a Trieste, e ne parla.

Il Convegno fu promosso da quella Università e organizzato con la massima perfezione dal prof. Gaetano Fichera.

Tredici lavori costituiscono il volume: preminente è il loro valore costruttivo che dà la misura dell'alto livello di perfezione oggi raggiunto dalla teoria delle equazioni lineari alle derivate parziali.

La stampa del volume è stata curata dallo stesso prof. Fichera e a lui va il grazie di tutti gli studiosi.

Il volume è edito dall'Unione Matematica Italiana e ne è stata resa possibile la stampa dal generoso contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

L'Unione Matematica Italiana deve anche rivolgere un grazie alla Casa editrice Cremonese che presenta ora al pubblico un volume di gran pregio anche dal punto di vista tipografico.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Margaria presenta il vol. I della 3ª edizione aggiornata dell'opera sua e del prof. Luigi De Caro, dal titolo «Principi di fisiologia umana», mettendo in evidenza che tale edizione è sensibilmente ampliata rispetto alla prima, uscita nel 1947, a causa del forte impulso subito negli ultimi anni dalla fisiologia, grazie all'aumentata popolarità della materia e all'aumentato

numero di ricercatori che vi si dedicano e grazie, soprattutto, al miglioramento e all'affinamento di alcune tecniche che hanno permesso di compiere ricerche di importanza fondamentale come, in particolare, la tecnica elettronica nella costruzione degli apparecchi di misura e di registrazione e quella degli isotopi nella ricerca biochimica.

Il Socio De Blasi presenta il volume XXVIII dell'« Archivio Italiano di Anatomia e Istologia Patologica », contenente scritti in onore di Guido Sotti, che vuol essere un omaggio reso da Colleghi, ammiratori, amici e discepoli al predetto Professore, maestro dell'anatomia patologica italiana nel suo settantacinquesimo compleanno.

Il Socio De Blasi presenta anche un volume del prof. Gaetano Bompiani, Direttore dell'Istituto di Anatomia e Istologia Patologica dell'Università di Roma, dal titolo « Lineamenti di anatomia patologica », nel quale l'Autore, con l'ausilio dell'Aiuto Prof. Ascenzi e dell'Assistente Dott. Benedetti, ha raccolto gli appunti delle sue lezioni, dedicandoli agli studenti come una traccia per meglio intendere alcuni gruppi di alterazioni.

Il Socio Vardabasso presenta il fascicolo III, anno VII, ottobre 1955, della « Rassegna speleologica italiana » edito in occasione del VII Congresso Nazionale di Speleologia, svoltosi in Sardegna dal 3 all'8 ottobre c. a. Il fascicolo contiene, tra l'altro, uno studio dello stesso prof. Vardabasso sulla « Sardegna speleologica » che inquadra, dal punto di vista geologico, il complesso fenomeno dei paleocarsismi dell'isola.

Il Socio Polvani presenta il supplemento al vol. II, serie X, del « Nuovo Cimento », contenente gli Atti del 40° Congresso Nazionale di Fisica e del Convegno Internazionale di studi sull'infrarosso, svoltosi a Parma dal 3 al 7 settembre 1954, nel quadro delle onoranze a Macedonio Melloni nel primo centenario della morte. Il fascicolo è diviso in tre parti: nella prima figurano documenti e cimeli melloniani, nella seconda le relazioni generali e le comunicazioni del Convegno Internazionale sull'infrarosso, nella terza le relazioni generali e i sunti delle comunicazioni presentate al 40° Congresso Nazionale di Fisica.

Il Socio Boaga presenta la Carta di Roma alla scala 1:10.000 con le seguenti parole:

« La Carta di Roma alla scala 1:10.000 che ho l'onore di presentare è stata disegnata con ogni dettaglio e col maggior rigore metrico dalla Direzione Generale del Catasto, dopo di aver ridisegnato nella scala 1:5000 la recente mappa rilevata alla scala 1:1000, opportunamente sfollata, e ridotta fotomeccanicamente alla scala anzidetta.

« La Carta comprende quattro fogli del formato di cm. 52 × 58; la superficie interessata è di 500 chilometri quadrati. La proiezione è quella attualmente in uso alla Direzione Generale del Catasto; ellissoide di riferimento quello internazionale (di Hayford).

« I quattro fogli contengono i quartieri: Salario - Nomentano, quelli dell'Esquilino - Appio - Prenestino, il Centro di Roma, il Gianicolo e l'Ostiense; infine la zossa Flaminia, Parioli e Monte Mario.

« I fabbricati sono indicati in terra di Siena adottando tonalità più scura per gli edifici pubblici, mentre le antichità ed i ruderi sono stati delineati in seppia.

« Per l'altimetria a curve di livello e per i parchi e giardini, terreni agrari si è fatto uso rispettivamente della tinta neutra e del verde. Con tratto rosso si è indicata la rete filotramviaria.

« Per mantenere il rigore tecnico della carta si sono evitati quegli accorgimenti in uso nella cartografia a media e piccola scala per rendere più regolari le sedi stradali, i corsi d'acqua, ecc. che indubbiamente sono di nocumento per la fedeltà di rappresentazione.

« Si è ottenuta così una Carta rigorosamente aderente alla realtà atta a conservare per i tempi futuri la vera conformazione planimetrica ed altimetrica della Roma odierna ».

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno presentato pubblicazioni in omaggio.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Natta, Segre, Tonzig, D'Ancona, Cotronei, Bonino, Armellini, Scorza Dragoni, Fantappiè e Pupilli.

Il Socio Picone presenta una Memoria del prof. G. Fichera dal titolo: « Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine ».

Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione composta dal predetto Socio Picone e dal Collega Sansone.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

MARRÈ E. e LAUDI G. – Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. – XVI. Aumento dell'acido deidroascorbico ed inibizione della crescita in parti isolate di piante superiori in seguito al trattamento con acido ascorbico (pres. dal Socio S. TONZIG).

MARRÈ E. e SERVETTAZ O. – Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti. – I. Sul limite di resistenza all'inattivazione termica dei sistemi fotosintetico e respiratorio di alghe di acque termali (pres. dal Socio S. TONZIG).

TREZZI F. e BALIN L. – Ricerche spettrofotometriche sull'azione della colchicina su estratti proteici *in vitro* (pres. dal Socio S. TONZIG).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 dicembre 1955

- ALLODI Federico. — *La storia e la conoscenza dei linfatici del cuore nelle opere di Paolo Mascagni*. Firenze, Olschki, 1955. Pp. 86, in 8°, con figg. (Biblioteca della « Rivista di Storia delle Scienze Mediche e Naturali », VII).
- « *Archivio Italiano di Anatomia e Istologia Patologica* ». Vol. XXVIII, 1954 (Scritti in onore di Guido Sotti).
- BOEV S. N. — *Gel'mintozy ovec i merv bor'by s nimi*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1935. Pp. 41, in-8°, con figg. (Zoologičeskaja Nauka – Sel'skomy Hozjajstvu, 3).
- BOEV S. N. — Vedi: CELIŠČEV A. A. i BOEV S. N.
- BOK I. I. — *Agronomičeskie rudy*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Kazahskij Gornometallurgičeskij Institut Mvo SSSR, 1955. Pp. 177, in-8°, con figg.
- BOMPIANI Gaetano. — *Lineamenti di anatomia patologica*. Roma, Abbruzzini Editore, 1952. Pp. 374, in-8°, con figg.
- BUKREEVA N. E. — *Puti povyšeniya urožaja i saharistosti saharnoj svekly*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1954. Pp. 29, in-8°.
- CELIŠČEV A. A. i BOEV S. N. — *Bor'ba s parazitarnymi zabolevanijami sel'skohozjajstvennyh životnyh pri otgonnopastbiščnom soderžanii*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1951. Pp. 128, in-8°, con figg.
- Convegno Internazionale sulle equazioni lineari alle derivate parziali promosso dalla Università degli Studi di Trieste. Trieste, 25-28 agosto 1954. Roma, Edizioni Cremonese, 1955. Pp. XIII-233, in-8°.
- ČUVAKOV K. Č. — *Perelivanie krovi pri javlenijah belkovej nedostatočnosti*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1951. Pp. 169, in-8°, con figg.
- DARKANBAEV T. B. — *Biokhimičeskaja harakteristika jarovyh pšenice Kazahstana*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Botaniki, 1955. Pp. 192, con figg.
- DE CARO Luigi. — Vedi: MARGARIA Rodolfo e DE CARO Luigi.
- D'ERASMO Geremia. — *Sopra un molare di «Teleoceras» del giacimento fossilifero di Sahabi in Cirenaica*. Estr. da « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei XL » s. 4ª, vol. IV-V, 1953-54.
- DRAGHETTI Alfonso. — *Aspetto e significato bio-agronomico delle lavorazioni e della fertilizzazione dei terreni argillosi*. Estr. da « Atti del Convegno Nazionale sulla lavorazione dei terreni argillosi di pianura », Rovigo, 6-7 nov. 1954.
- *Indirizzi fondamentali dell'irrigazione con particolare riguardo alle terre argillose*. Estr. da « Annali della Facoltà di Agraria », s. 2ª (Pubblicazioni dell'Università Cattolica del Sacro Cuore, n. s., vol. LII).
- *L'irrigazione razionale come fattore agronomico dell'incremento della produzione*. Estr. da « Vomer », numero unico.
- *Le lavorazioni profonde ed il loro avvicendamento nell'azienda*. Estr. da « Annali della Facoltà di Agraria », s. 2ª (Pubblicazioni dell'Università Cattolica del Sacro Cuore, n. s., vol. LII).
- *Il letame artificiale: importanza e tecnica di preparazione*. Estr. da « Genio Rurale », a. XVII, 1954, n. 7-8.
- *Premessa per l'impiego razionale del perfosfato minerale*. Estr. da « Mondo Agricolo », 1953, n. 45.
- *I sistemi dell'irrigazione di soccorso estiva con particolare riguardo alla irrigazione delle terre argillose*. Estr. da « Atti del 2º Convegno Internazionale per la irrigazione a pioggia », Verona, 11-12 agosto 1953.
- Eidgenössische Technische Hochschule 1855-1955 in Zürich*. Zürich 1955. Pp. XIX-723, in-8°, con tavv.
- GALUZO J. G. — *Cesotka ovec i novejšie metody bor'by s nej*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1954. Pp. 78, in-8°, con figg. (Zoologičeskaja Nauka – Sel'skomy Hozjajstvu, 2).

- GLIELMO Armando. — *Metodo per la risoluzione del triangolo*. Parte I. Pp. 34, in-8° (In ciclostile).
- Issledovanija osnovnyh proizvodstvennyh processov na kounradskom rudnike*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1955. Pp. 170, in-8°, con tavv.
- KONOBICKAJA E. M. — *Karagandinskaja oblast'*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1954. Pp. 256, in-8°, con figg.
- KUSOV V. N. — *Kleševoj paralič ovec i mery bor'by s nim*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1954. Pp. 33, in-8°, con figg. (Zoologičeskaja Nauka - Sel'skomu Hozjajstvu, 1).
- LAZZARI Antonio. — *Aspetti geologici dei fenomeni verificatisi nel Salernitano in conseguenza del nubifragio del 25-26 ottobre 1954*. Estr. da « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli », vol. LXIII, 1954.
- *Le condizioni geo-idrologiche del bacino del Basso Sinello*. Estr. da « Geotecnica », 1955, n. 4.
- *Nuova ipotesi per una interpretazione strutturale della Sicilia*. Estr. da « Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli », s. 4^a, vol. XX, 1953.
- *Primi risultati dell'indagine geofisica con il metodo sismico a riflessione nella Piana di Catania*. Estr. da « Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli », s. 4^a, vol. XX, 1953.
- *La sedimentazione dei terreni in facies di flysch secondo le antiche osservazioni di R. Zuber (con alcune considerazioni sul flysch dell'Italia Meridionale)*. Estr. da « Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli », s. 4^a, vol. XXI, 1954.
- *Segnalazioni di un livello di pomici in Grotta Romanelli, presso Castro (prov. di Lecce)*. Estr. da « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli », vol. LXIV, 1955.
- *Stratigrafia di un pozzo di ricerca acquifera perforato in località Carmito, presso il margine sud-orientale della Piana di Catania*. Estr. da « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli », vol. LXII, 1953.
- LEONOVA N. M. — *Griby - razrušiteli derevjannoj krepj v podzemnyh vyrabotkah, i mery bor'by s nimi*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1954. Pp. 55, in-8°, con figg.
- LEVIT A. V. — *Ptič'i klešči i bor'ba s nimi*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1954. Pp. 32, in-8°, con figg. (Zoologičeskaja Nauka - Sel'skomu Hozjajstvu, 4).
- LJAPIČEV G. F. — *Intruzionnye komplekxy dopaleozoja i kembrija boščekul'skogo rajona*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1955. Pp. 135, in-8°, con figg. e tavv.
- MAĆZAK Antoni. — *Sukiennictwo wielkopolskie XIV-XVII wiek*. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1955. Pp. 324, in-8° (Prace Instytutu Historycznego Uniwersytetu Warszawskiego).
- MARGARIA Rodolfo e DE CARO Luigi. — *Principi di fisiologia umana*. 3^a ed. Vol. I. Milano, Francesco Vallardi, 1955. Pp. XIX-1002, in-8°, con figg.
- MINIERI Vincenzo. — *Aspetti geochimici di una particolare trasformazione del carbonato in fosfato di calcio nella grotta della « Zinzulusa » (Lecce)*. Estr. da « Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli », s. 4^a, vol. XXI, 1954.
- *Ricerche geochimiche su alcune bauxiti di terra d'Otranto*. Estr. da « Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli », s. 4^a, vol. XXI, 1954.
- *Il significato paleoclimatico a l'età della « crosta calcarea » nell'area del foglio 175 (Cerignola)*. Estr. da « Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli », s. 4^a, vol. XXII, 1955.
- *Su alcuni ittioliti miocenici dei tripoli di Mondaino (Forlì)*. Estr. da « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli », vol. LXI, 1952.
- MONSCHARMONT ZEI Maria. — *I foraminiferi della scogliera a « Cladocora caespitosa » della Punta delle Pietre Nere presso il lago di Lesina, in provincia di Foggia*. Estr. da « Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli », s. 4^a, vol. XXI, 1954.

- MONSCHARMONT ZEI Maria. — *Sopra una nuova specie di « Parastrophia » del Quaternario della punta delle Pietre Nere (Foggia)*. Estr. da « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli », vol. LXIII, 1954.
- *Sulla presenza del gen. « Globotruncana » Cushman in una serie calcareo-marnosa a liste di selce presso Rodi Garganico (Foggia)*. Estr. da « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli », vol. LXIII, 1954.
- NUSUPBEKOV A. — *Ob'edinenie Kazahskich zemel' v Kazahskoj Sovetskoj Socialističeskoj Respublike*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1953. Pp. 99, in-8°.
- Paraziticheskie prostejšie Kazahstana*. Voll. I, IV, V. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1946-51. Voll. 3, in-8°.
- PATRIK N. P. — *Kiščinye protozoižnye zabolėvanija čeloveka*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Kraevoj Patologii, 1955. Pp. 109, in-8°, con figg.
- PONTE Maurice. — *L'electronique, facteur de culture universel: point de vue d'un latin*. Communication au « Convegno Internazionale delle Comunicazioni », Gênes, 8-12 Octobre 1955. Pp. 12, in-8°.
- Prirodnaja Očagovost' zaraznyh boleznėj v Kazahstane*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1954. Pp. 243, in-4°, con figg.
- PROTASOV A. M. — *Lesnye pitomniki v uslovijah Kazahskana*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1951. Pp. 208, in-8°, con figg.
- Reports of the Swedish Deep-Sea Expedition 1947-1948*. Vol. IV, fasc. 1; vol. VI, fasc. 1; vol. VII, fasc. 2; vol. X, fasc. 1. Göteborg, Kungl. Vetenskaps-och Vitterhets-Samhälle, 1954-1955. Fasc. 4, in-4°, con tavv.
- ŠARAPOV N. G. — *Himizm rastenij i klimat*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1948. Pp. 115, in-8°, con figg.
- STOROŽENKO D. M. — *Počvy melkosopčoinika central'nogo Kazahstana*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1952. Pp. 125, in-8°, con figg. e tavv.
- Sul rilevamento geologico del F° Cerignola (175) quadrante III*. Estr. da « Bollettino del Servizio Geologico d'Italia », vol. LXXV, 1953, n. 2.
- SUŠKOV K. L. — *Cvetovodstvo*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1954. Pp. 224, in-8°, con figg.
- TIHOV G. A. — *Astrobotanika*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1949. Pp. 23, in-8°, con tavv.
- *Osnovy vizual'noj i fotografičeskoj fotometrii*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1950. Pp. 90, in-8°, con figg. e tavv.
- VARDABASSO Silvio. — *Sardegna speleologica*. Estr. da « Rassegna Speleologica Italiana », a. VII, 1955, fasc. 3.
- VSEVOLODOV B. P. — *Patologičeskaja morfologija važnejših gel'mintozov domašnih i promyslovnyh životnyh*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1953. Pp. 109, in-8°, con figg.

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

ALIBRANDI G., Sulla determinazione del grado di disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa, 178.

— Colina e sviluppo sessuale del pollo, 324.

AMALDI E., vedi CHAMBERLAIN O.

ANGOLETTA M., vedi MALATESTA L.

ARCHETTI I., FELICI A., MIGLIORI V. e RUSSI F., Sulla etiologia virale di una meningo-encefalite benigna riscontrata nelle Marche, 180.

ARMELLINI G., Sopra un limite inferiore della densità massima di una massa gassosa ruotante, 102.

ARRIGONI O., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XIV. Sulla capacità dell'acido deidroascorbico di legarsi alle proteine mitocondriali e sulla sua conseguente maggior stabilità, 156.

ARRIGONI O., vedi MARRÈ E.

ATTARDO C., Effetti dell'azide sodico sulle uova di « Bithynia codiella », 83.

B

BARONI G., vedi CHAMBERLAIN O.

BASSI I. W., vedi NATTA G.

BERNARDINI C., Sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio di un filo, percorso da corrente, in campo magnetico, 297.

BOMPIANI E., Sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo, 207.

BOMPIANI E., Ancora sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo, 361.

BONINO G. B. e FABBRI G., Sullo spettro di assorbimento nell'ultravioletto del ferrocianuro di potassio, 386.

— e MARINANGELI A. M., Ricerche preliminari sullo spettro ultravioletto di assorbimento di derivati carbonilici del pirrolo, 222.

— e MARINANGELI A. M., Sullo spettro ultravioletto di assorbimento della 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide e della 2·4·dimetil·3·etil·5·pirrolaldeide, 393.

BOURGIN D. G., Un indice dei punti uniti. Nota I, 435.

BOVET D., GATTI G. L. e VIRNO M., Azione dei farmaci simpatolitici sulla circolazione cerebrale: ergotamina, diidroergotamina e derivati dell'amminometilbenzodiossano, 67.

C

CALOI P., Commemorazione del Socio Mario Tenani, 503.

CARRANO F., L'azione del γ -dinitrofenolo sulle uova di « Tubifex rivulorum », 85.

CASTAGNOLI C., vedi CHAMBERLAIN O.

CHAMBERLAIN O., CHUPP W. W., GOLDBABER G., SEGRÈ E., WIEGAND C., AMALDI E., BARONI G., CASTAGNOLI C., FRANZINETTI C. e MANFREDINI A., Su di una stella provocata da un antiprotone osservata in emulsioni nucleari, 381.

CHUPP W. W., vedi CHAMBERLAIN O.

CIARRAPICO L., Sulla permutabilità di due trasformazioni della contiguità negli spazi topologici, 267.

CLAUSER E., Geometrizzazione della dinamica dei sistemi a vincoli mobili, 33.

COLOMBO B., Contributo statistico ad un tentativo di discriminazione biometrica di popolazioni o razze geografiche di teleostei del genere « Bregmaceros », 74.

CONTI R., Sulla t -similitudine tra matrici e la stabilità dei sistemi differenziali lineari, 247.

CORRADINI P. e PASQUON I., Sulla forma geometrica delle catene spiralizzate dei polimeri isotattici cristallini, 453.

CORRADINI P., vedi NATTA G.

COSSU A., Sulle connessioni tensoriali integrabili, 258.

— Connessioni tensoriali per tensori doppi misti, 421.

CREPAX P. e FADIGA E., Modificazioni dell'elettroencefalogramma di Cane per effetto dell'applicazione di stimoli chimici sulla corteccia degli emisferi cerebellari, 331.

CREPAX P. e INFANTELLINA F., Effetti della morfina applicata localmente sul lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto, 481.

CROCCO G. A., Formulazioni di Meccanica astronautica, 3.

D

DEBEVER R., Sur un théorème de B. Segre 26.

DENNISTON R.H.F., Sui numeri di Betti delle varietà razionali, 418.

DURANTE M., Su trapianti xenoplastici di arto, 185.

F

FABBRİ G., vedi BONINO G. B.

FADIGA E., vedi CREPAX P.

FANTAPPIÈ L., Costruzione di un sistema fondamentale di operatori fisici differenziali, per ogni universo a gruppo base semplice, 213.

— Deduzione autonoma dell'equazione generalizzata di Schrödinger, nella teoria di relatività finale, 367.

FAVINI G. e PIOZZI F., Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer: influenza dei sostituenti all'anello benzenico sulla formazione delle isonitrosoacetanilidi. Nota II, 44.

FELICI A., vedi ARCHETTI I.

FICHERA G., Su un principio di dualità per talune formole di maggiorazione relative alle equazioni differenziali, 411.

FINZI C. M. e GIANNUZZI M. A., Sul sistema binario λ Ophiuci (A.D.S. 10087), 125.

FISCHIAROLO G., Risultati di asportazione di territori vegetativi nella blastula e nella gastrula di Anfibi Anuri, 493.

FORTINI T., La fase decrescente dell'ultimo ciclo solare, secondo le misure effettuate nell'Osservatorio Astronomico di Roma. Nota I, 131.

— La fase decrescente dell'ultimo ciclo solare secondo le misure effettuate nell'Osservatorio Astronomico di Roma, 272.

FRANZINETTI C., vedi CHAMBERLAIN O.

G

GATTI G. L., vedi BOVET D.

GHERARDELLI F., Alcune osservazioni sui sistemi canonici e pluricanonici di una varietà algebrica, 28.

GHIRARDELLI E., Studi sul determinante germinale (d.g.) nei Chetognati: Effetti della centrifugazione delle uova e azione del LiCl ed NaSCN, 498.

GHIZZETTI A., vedi PICONE M.

GIANNINI U., vedi NATTA G.

GIANNUZZI M. A., Sulla variabilità del raggio solare, 277.

— vedi FINZI C. M.

GODEAUX L., Il teorema di Picard sulla regolarità del sistema aggiunto, 265.

GOLDHABER G., vedi CHAMBERLAIN O.

GUALTIEROTTI T. e MARGARIA R., Variazione del tempo nervoso totale del riflesso patellare nell'uomo durante ipossia, 23.

I

IANDELLI A., Sui composti intermetallici SrGa_2 e BaGa_2 , 39.

— Legami covalenti nei composti intermetallici. I composti PrGe e CaGe , 307.

INFANTELLINA F., Analisi degli effetti provocati dall'acetilcolina nella corteccia cerebrale isolata, 335.

— Effetti della stricnina sulla risposta della corteccia cerebrale isolata alla stimolazione singola e a quella iterativa, 475.

— vedi CREPAX P.

K

KRALL G., Sul problema centrale della dinamica sui ponti. Nota I, 373.

KRANJC A., Sul profilo strumentale teorico d'uno spettrografo astronomico, 301.

L

LABORDE G., vedi MICHARD R.

LAUDI G., Dimostrazione dell'esistenza, in tessuti caratteristici di piante superiori ed in piante inferiori, della via ossidoriduttiva trifosfopiridinucleotide-glutatione-ascorbico, 164.

— vedi MARRÈ E.

LAUWERIER H. A., Alcuni aspetti della Matematica del Mare del Nord, 116.

M

MAJORANA Q., Sulla grande importanza delle radio-onde emesse dal pianeta Giove, 17.

— Su di una nuova teoria della gravitazione, 95.

MALARODA R., Contributo alle conoscenze paleontologiche del Pliocene dei dintorni

di Strongoli, nel Crotonese (Catanzaro), 50.

MALATESTA L. e ANGOLETTA M., Composti di Pd^0 e Pt^0 con le fosfine aromatiche e gli esteri arilici fosforosi, 43.

MALTESE C. e POLLICITA M., Azione di frazioni di estratti embrionali di « Bufo » su larve ed espianti di Urodeli e di « *DiscoGLOSSUS* », 181.

MANCUSO V., Azione del cianuro di potassio sullo sviluppo di « *Physa rivularis* Ph. », 71

MANFREDINI A., vedi CHAMBERLAIN O.

MARGARIA R., vedi GUALTIEROTTI T.

MARINANGELI A. M., vedi BONINO G. N.

MARRÈ E. e ARRIGONI O., Auxine, Antiauxine e ossidazione dell'acido ascorbico in preparati mitocondriali di « *Pisum sativum* », 320.

— LAUDI G. e ARRIGONI O., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XV. Azione inibente dell'acido deidroascorbico sull'attività deidrogenasica di preparati enzimatici vegetali, 460.

MARUSSI A., In risposta ad una Nota di Corradino Mineo, 294.

MARTIN E. L., Orbite anapsidali in sistemi binari di massa variabile, 449.

MARTINI A. e MASANI A., Sul gradiente adiabatico di un miscuglio di elio e radiazione, 292.

MASANI A., vedi MARTINI A.

MATSCHINSKI M., Deux hypothèses sur les causes de la formation de la bifeuille de Popoff. Nota I, 63.

— Deux hypothèses sur les causes de la formation de la bifeuille de Popoff. Nota II, 142.

MAZZANTI G., vedi NATTA G.

MELCHIOR P. J., Sur l'amortissement du mouvement libre du pôle instantané de rotation à la surface de la Terre 137.

MESSERI E., Nascita ed adattamento all'ambiente. Nota I, 340.

— Le cure parentali in relazione all'ambiente. Nota II, 466.

MICHARD R. e LABORDE G., Spectrophotométrie des raies d'émission intenses de la chromosphère solaire. — La raie H_{α} , 283.

MIGLIORI V., vedi ARCHETTI I.

MORUZZI G. e POMPEIANO O., La inibizione propriocettiva riflessa come causa dell'atonia fastigiale, 326.

— Soppressione dell'atonia fastigiale del Gatto decerebrato mediante sezione del N. VIII contralaterale, 471.

N

NATTA G. e CORRADINI P., Polimeri cristallini del butadiene e struttura del 1-2-poli-butadiene, 229.

— BASSI I. W., Struttura cristallina di alcune poli-alfa-olefine isotattiche, 404.

— PINO P., MAZZANTI G., CORRADINI P. e GIANNINI U., Sintesi e proprietà di alti polimeri cristallini di alcune α -olefine a catena ramificata, 397.

P

PASQUON I., vedi CORRADINI P.

PELLIZZER R., Sulla identità della hartite con la bombicite. Determinazione della cella elementare e del gruppo spaziale. Nota I, 58.

— Sulla identità della hartite con la bombicite. Determinazione della cella elementare e del gruppo spaziale. Nota II, 150.

PERRI T., Induzione di arti soprannumerari in « *Bufo vulgaris* » mediante sostanze citolitiche (trapianti da embrioni di « *Rana esculenta* », impianti di frammenti di rene cotto), 345.

PICONE M. e GHIZZETTI A., Integrazione dei sistemi degeneri di equazioni differenziali ordinarie lineari e coefficienti costanti, 195.

PINI B., Osservazioni sopra un problema generalizzato di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine ellittiche e paraboliche, 237.

PINO P., vedi NATTA G.

PIOZZI F., vedi FAVINI G.

POLLICITA M., vedi MALTESE C.

POMPEIANO O., vedi MORUZZI G.

R

RANZOLI F., Osservazioni preliminari sulle cellule vitelline e gli ovociti di « Fasciola hepatica » L., 171.

— Rigenerazione e azione toracizzante nel polichete ermafrodita « *Salmacina incrustans* », 313.

RIVOCCHI L., vedi SACCA G.

RUSSI F., vedi ARCHETTI I.

S

SABAN G., Sul teorema dei quattro vertici, 251.

SACCÀ G. e RIVOSECCHI L., Una nuova sottospecie di « *Musca domestica* » L. della regione etiopica, 497.

SALA M., Caudalizzazione di materiale neurale prosencefalico indotta dall'area posteriore della placca neurale in Anfibi Urodeli. 485.

SCORZA DRAGONI G., Un'osservazione sul lemma di Sperner, 204.

SEGRE B., Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota I, 200.

— Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota II, 357.

SEGRÈ E., vedi CHAMBERLAIN O.

SERGI S., I caratteri della mandibola neandertaliana Circeo II, 108.

U

URBANI E., Le attività enzimatiche nello sviluppo embrionale e larvale degli Anfibi. Considerazioni su Anuri ed Urodeli, 89.

V

VÁLCOVICI V., Sur les principes de Hamilton et de la moindre action, 441.

VESENTINI E., Sugli jacobiani di funzioni meromorfe sopra una varietà complessa compatta, 428.

VIRNO M., vedi BOVET D.

W

WIEGAND C., vedi CHAMBERLAIN O.

Z

ZAGAR F., Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana. Nota II, 13.

— Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana. Nota III, 217.

ZORZOLI G. C., Ricerche istochimiche sul pigmento delle cellule nervose del « Thalamus » di Uomo, 189.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi. — Sulla t -similitudine tra matrici e la stabilità dei sistemi differenziali lineari. CONTI R., 247.

Analisi matematica. — Integrazione dei sistemi degeneri di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti. PICONE M. e GHIZZETTI A., 195.

— Osservazioni sopra un problema generalizzato di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine ellittiche e paraboliche. PINI B., 237.

Antropologia. — I caratteri della mandibola neandertaliana Circeo II. SERGI S., 108.

Astrofisica. — Sulla grande importanza delle radio-onde emesse dal pianeta Giove. MAJORANA Q., 17.

— Sul gradiente adiabatico di un miscuglio di elio e radiazione. MARTINI A. e MASANI A., 292.

Astronomia. — Sul sistema binario λ Ophiuci (A.D.S. 10087). FINZI C. M. e GIANNUZZI M. A., 125.

— La fase decrescente dell'ultimo ciclo solare, secondo le misure effettuate nell'Osservatorio Astronomico di Roma. Nota I, FORTINI T., 131.

— La fase decrescente dell'ultimo ciclo solare secondo le misure effettuate nell'Osservatorio Astronomico di Roma. FORTINI T., 272.

— Sulla variabilità del raggio solare. GIANNUZZI M. A., 277.

— Spectrophotometrie des raies d'émission intenses de la chromosphere solaire. — La raie H_{α} . MICHARD R. e LABORDE G., 283.

Astronomia geodetica. — Sur l'amortissement du mouvement libre du pôle instantané de rotation à la surface de la Terre. MELCHIOR P. J., 137.

B

Biologia. — Effetti dell'azide sodico sulle uova di « *Bithynia codiella* ». ATTARDO C., 83.

Biologia. — L'azione del γ -dinitrofenolo sulle uova di « *Tubifex rivulorum* ». CARRANO F., 85.

— Su trapianti xenoplastici di arto. DURANTE M., 185.

— Risultati di asportazione di territori vegetativi nella blastula e nella gastrula di Anfibi Anuri. FISCHIAROLO G., 493.

— Studi sul determinante germinale (d. g.) nei Chetognati: Effetti della centrifugazione delle uova e azione del LiCl ed NaSCN. GHIRARDELLI E., 498.

— Azioni di frazioni di estratti embrionali di « *Bufo* » su larve ed espunti di Urodeli e di « *Discoglossus* ». MALTESE C. e POLLICITA M., 181.

— Induzione di arti soprannumerari in « *Bufo vulgaris* » mediante sostanze citolitiche (trapianti da embrioni di « *Rana esculenta* », impianti di frammenti di rene cotto). PERRI T., 345.

— Una nuova sottospecie di « *Musca domestica* » L. della regione etiopica. SACCÀ G. e RIVOSECCHI L., 497.

— Le attività enzimatiche nello sviluppo embrionale e larvale degli Anfibi. Considerazioni su Anuri ed Urodeli. URBANI E., 89.

Biometria. Contributo statistico ad un tentativo di discriminazione biometrica di popolazioni o razze geografiche di teleostei del genere « *Bregmaceros* ». COLOMBO B., 74.

C

Chimica. — Sullo spettro di assorbimento nell'ultravioletto del ferrocianuro di potassio. BONINO G. B. e FABBRI G., 386.

— Ricerche preliminari sullo spettro ultravioletto di assorbimento di derivati carbonilici del pirrolo. MARINANGELI A. M., 222.

— Sullo spettro ultravioletto di assorbimento della 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide e della 2·4·dimetil·3·etil·5·pirrolaldeide. MARINANGELI A. M., 393.

Chimica. — Sulla forma geometrica delle catene spiralizzate dei polimeri isotattici cristallini. CORRADINI P. e PASQUON I., 453.

— Legami covalenti nei composti intermetallici. I composti PrGe e CaGe , IANDELLI Q., 307.

— Polimeri cristallini del butadiene e struttura del 1-2-polibutadiene. NATTA G. e CORRADINI P., 229.

— Struttura cristallina di alcune poli- α -olefine isotattiche. NATTA G., CORRADINI P. e BASSI I. W., 404.

— Sintesi e proprietà di alti polimeri cristallini di alcune α -olefine a catena ramificata. NATTA G., PINO P., MAZZANTI G., CORRADINI P. e GIANNINI U., 397.

Chimica fisica. — Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer: influenza dei sostituenti all'anello benzenico sulla formazione delle isonitrosoacetanilidi. Nota II. FAVINI G. e PIOZZI F., 44.

Chimica inorganica. — Sui composti intermetallici SrGa_2 e BaGa_2 . IANDELLI A., 39.

— Composti di Pd^0 e Pt^0 con le fosfine aromatiche e gli esteri arilici fosforosi. MALATESTA L. e ANGOLETTA M., 43.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Mario Tenani. CALOI P., 503.

Comunicazioni varie. 349, 508.

Congressi. 350, 510.

Cosmogonia. — Sopra un limite inferiore della densità massima di una massa gassosa ruotante. ARMELLINI G., 102.

— Orbite anapsidali in sistemi binari di massa variabile. MARTIN E. L., 449.

Cosmologia. — Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana. Nota II. ZAGAR F., 13.

— Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana. Nota III. ZAGAR F., 217.

Cristallografia fisica. — Deux hypothèses sur les causes de la formation de la bifeuille de Popoff. Nota I. MATSCHINSKI M., 63.

— Deux hypothèses sur les causes de la formation de la bifeuille de Popoff. Nota II. MATSCHINSKI M., 142.

E

Embriologia. — Azione del cianuro di potassio sullo sviluppo di « *Physa rivularis*. Ph. », MANCUSO V., 71.

Embriologia. — Caudalizzazione di materiale neurale prosencefalico indotta dall'area posteriore della placca neurale in Anfibi Urodeli. SALA M., 485.

F

Farmacologia. — Azione dei farmaci simpatolitici sulla circolazione cerebrale: ergotamina, diidroergotamina e derivati dell'amminometilbenzodiossano. BOVET D., GATTI G. L. e VIRNO M., 67.

Fisica. — Sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio di un filo, percorso da corrente, in campo magnetico. BERNARDINI C., 297.

— Su di una stella provocata da un antiprotone osservata in emulsioni nucleari. CHAMBERLAIN O., CHUPP W. W., GOLDBABER G., SEGRÈ E., WIEGAND C., AMALDI E., BARONI G., CASTAGNOLI C., FRANZINETTI C., MANFREDINI A., 381.

— Su di una nuova teoria della gravitazione. MAJORANA Q., 95.

Fisiologia. — Sulla determinazione del grado di disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa. ALIBRANDI G., 178.

— Colina e sviluppo sessuale del pollo. ALIBRANDI G., 324.

— Modificazioni dell'elettroencefalogramma di Cane per effetto dell'applicazione di stimoli chimici sulla corteccia degli emisferi cerebellari. CREPAX P. e FADIGA E., 331.

— Effetti della morfina applicata localmente sul lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto. CREPAX P. e INFANTELLINA F., 481.

— Variazione del tempo nervoso totale del riflesso patellare nell'uomo durante ipossia. GUALTIEROTTI T. e MARGARIA R., 23.

— Analisi degli effetti provocati dall'acetilcolina nella corteccia cerebrale isolata. INFANTELLINA F., 335.

— Effetti della stricnina sulla risposta della corteccia cerebrale isolata alla stimolazione singola e a quella iterativa. INFANTELLINA F., 475.

— Nascita ed adattamento all'ambiente. Nota I. MESSERI E., 340.

— Le cure parentali in relazione all'ambiente. Nota II. MESSERI E., 466.

Fisiologia. — La inibizione propriocettiva riflessa come causa dell'atonía fastigiale. MORUZZI G. e POMPEIANO O., 326.

— Soppressione dell'atonía fastigiale del Gatto decerebrato mediante sezione del N. VIII contralaterale. MORUZZI G. e POMPEIANO O., 471.

Fisiologia vegetale. — Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XIV. Sulla capacità dell'acido deidroascorbico di legarsi alle proteine mitocondriali e sulla sua conseguente maggior stabilità. ARRIGONI O., 156.

— Dimostrazione dell'esistenza, in tessuti caratteristici di piante superiori ed in piante inferiori, della via ossidoriduttiva: trifosfopiridinucleotide-glutatione-ascorbico. LAUDI G., 164.

— Auxine, Antiauxine e ossidazione dell'acido ascorbico in preparati mitocondriali di « *Pisum sativum* ». MARRÈ E. e ARRIGONI O., 320.

— Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XV. Azione inibente dell'acido deidroascorbico sull'attività deidrogenasica di preparati enzimatici vegetali. MARRÈ E., LAUDI G. e ARRIGONI O., 460.

G

Geodesia. — In risposta ad una Nota di Corradino Mineo. MARUSSI A., 294.

Geologia. — Contributo alle conoscenze paleontologiche del Pliocene dei dintorni di Strongoli, nel Crotonese (Catanzaro). MALARODA R., 50.

Geometria. — Sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo. BOMPIANI E., 207.

— Ancora sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo. BOMPIANI E., 361.

— Sulla permutabilità di due trasformazioni della contiguità negli spazi topologici. CIARRAPICO L., 267.

— Sulle connessioni tensoriali integrabili. COSSU A., 258.

— Connessioni tensoriali per tensori doppi misti. COSSU A., 421.

— Sui numeri di Betti delle varietà razionali. DENNISTON R. H. F., 418.

— Alcune osservazioni sui sistemi canonici e pluricanonici di una varietà algebrica. GHERARDELLI F., 28.

Geometria. — Il teorema di Picard sulla regolarità del sistema aggiunto. GODEAUX L., 265.

— Sul teorema dei quattro vertici. SABAN G., 251.

— Sugli jacobiani di funzioni meromorfe sopra una varietà complessa compatta. VESSENTINI E., 428.

I

Idrodinamica. — Alcuni aspetti della Matematica del Mare del Nord. LAUWERIER H. A., 116.

Istologia. — Ricerche istochimiche sul pigmento delle cellule nervose del « Thalamus » di Uomo. ZORZOLI G. C., 189.

M

Matematica. — Sur un théorème de B. Segre. DEBEVER R., 26.

— Su un principio di dualità per talune formole di maggiorazione relative alle equazioni differenziali. FICHERA G., 411.

— Un'osservazione sul lemma di Sperner. SCORZA DRAGONI G., 204.

— Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota I. SEGRE B., 200.

— Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota II. SEGRE B., 357.

Meccanica. — Geometrizzazione della dinamica dei sistemi a vincoli mobili. CLAUSER E., 33.

— Formulazioni di Meccanica astronautica. CROCCO G. A., 3.

— Sul problema centrale della dinamica sui ponti. Nota I. KRALL G., 373.

— Sur les principes de Hamilton et de la moindre action. VÂLCOVICI V., 441.

Meccanica quantica. — Costruzione di un sistema fondamentale di operatori fisici differenziali, per ogni universo a gruppo base semplice. FANTAPPIÈ L., 213.

— Deduzione autonoma dell'equazione generalizzata di Schrödinger, nella teoria di relatività finale. FANTAPPIÈ L., 367.

Mineralogia. — Sulla identità della hartite con la bombicite. Determinazione della cella elementare e del gruppo spaziale. Nota I. PELLIZZER R., 58.

— Sulla identità della hartite con la bombicite. Determinazione della cella elementare e del gruppo spaziale. Nota II. PELLIZZER R., 150.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, 354, 513.

Ottica. — Sul profilo strumentale teorico d'uno spettrografo astronomico. KRANJC Q., 301.

P

Patologia. — Sulla etiologia virale di una meningo-encefalite benigna riscontrata nelle Marche. ARCHETTI I., FELICI A., MIGLIORI F. e RUSSI F., 180.

Personale accademico, 349, 507.

Plichi suggellati, 349, 510.

Presentazione di libri, 350, 510.

Presentazione di Note e Memorie, 352, 512.

S

Scienze naturali. — Una nuova sottospecie di «*Musca domestica*» L. della regione etiopica. SACCA G. e RIVOSSECHI L., 497.

T

Topologia. — Un indice dei punti uniti. BOURGIN D. G., 435.

Z

Zoologia. — Osservazioni preliminari sulle cellule vitelline e gli ovociti di «*Fasciola hepatica*» L., RANZOLI F., 171.

— Rigenerazione e azione toracizzante nel polichete ermafrodita «*Salmacina incrustans*». RANZOLI F., 313.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1-2.

LUGLIO-AGOSTO 1955.

NOTE DI SOCI

CROCCO G. A., Formulazioni di Meccanica astronautica	Pag. 3
ZAGAR F., Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana. Nota II	13
MAJORANA Q., Sulla grande importanza delle radio-onde emesse dal pianeta Giove . .	17
GUALTIEROTTI T. e MARGARIA R., Variazione del tempo nervoso totale del riflesso patellare nell'uomo durante ipossia (pres. dal Socio R. Margaria)	23

NOTE PRESENTATE DA SOCI

DEBEVER R., Sur un théorème de B. Segre (pres. dal Socio B. Segre)	Pag. 26
GHERARDELLI F., Alcune osservazioni sui sistemi canonici e pluricanonici di una varietà algebrica (pres. dal Socio B. Segre)	28
CLAUSER E., Geometrizzazione della dinamica dei sistemi a vincoli mobili (pres. dal Corrisp. B. Finzi)	33
IANDELLI A., Sui composti intermetallici SrGa_2 e BaGa_2 (pres. dal Socio L. Rolla) .	39
MALATESTA L. e ANGOLETTA M., Composti di Pd^0 e Pt^0 con le fosfine aromatiche e gli esteri arilici fosforosi (pres. dal Socio L. Cambi)	43
FAVINI G. e PIOZZI F., Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer: influenza dei sostituenti all'anello benzenico sulla formazione delle isonitrosoacetanilidi. Nota II (pres. dal Socio L. Cambi)	44
MALARODA R., Contributo alle conoscenze paleontologiche del Pliocene dei dintorni di Strongoli, nel Crotonese (Catanzaro) (pres. dal Corrisp. Gb. Dal Piaz) . . .	50
PELLIZZER R., Sulla identità della hartite con la bombicite. Determinazione della cella elementare e del gruppo spaziale. Nota I (pres. dal Corrisp. C. Andreatta) .	58
MATSCHINSKI M., Deux hypothèses sur les causes de la formation de la bifeuille de Popoff. Nota I (pres. dal Socio E. Onorato)	63
BOVET D., GATTI G. L. e VIRNO M., Azione dei farmaci simpatolitici sulla circolazione cerebrale: ergotamina, diidroergotamina e derivati dell'amminometilbenzodiossano (pres. dal Corrisp. D. Marotta)	67
MANCUSO V., Azione del cianuro di potassio sullo sviluppo di « <i>Physa rivularis</i> Ph. » (pres. dal Socio G. Cotronei)	71
COLOMBO B., Contributo statistico ad un tentativo di discriminazione biometrica di popolazioni o razze geografiche di teleostei del genere « <i>Bregmaceros</i> » (pres. dal Corrisp. U. D'Ancona)	74
ATTARDO C., Effetti dell'azide sodico sulle uova di « <i>Bithynia codiella</i> » (pres. dal Socio G. Cotronei)	83
CARRANO F., L'azione del γ -dinitrofenolo sulle uova di « <i>Tubifex rivulorum</i> » (pres. dal Socio G. Cotronei)	85
URBANI E., Le attività enzimatiche nello sviluppo embrionale e larvale degli Anfibi. Considerazioni su Anuri ed Urodeli (pres. dal Socio G. Cotronei)	89

FASCICOLO 3-4.

SETTEMBRE-OTTOBRE 1955.

NOTE DI SOCI

MAJORANA Q., Su di una nuova teoria della gravitazione	Pag. 95
ARMELLINI G., Sopra un limite inferiore della densità massima di una massa gassosa ruotante	102
SERGI S., I caratteri della mandibola neandertaliana Circeo II	108

NOTE PRESENTATE DA SOCI

LAUWERIER H. A., Alcuni aspetti della Matematica del Mare del Nord (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag. 116
FINZI C. M. e GIANNUZZI M. A., Sul sistema binario λ Ophiuci (A.D.S. 10087) (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	125
FORTINI T., La fase decrescente dell'ultimo ciclo solare, secondo le misure effettuate nell'Osservatorio Astronomico di Roma. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	131
MELCHIOR P. J., Sur l'amortissement du mouvement libre du pôle instantané de rotation à la surface de la Terre (pres. dal Corrisp. <i>G. Cecchini</i>)	137
MATSCHINSKI M., Deux hypothèses sur les causes de la formation de la bifeuille de Popoff. Nota II (pres. dal Socio <i>E. Onorato</i>)	142
PELLIZZER R., Sulla identità della hartite con la bombiccite. Determinazione della cella elementare e del gruppo spaziale. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>C. Andreatta</i>)	150
ARRIGONI O., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XIV. Sulla capacità dell'acido dei droascorbico di legarsi alle proteine mitocondriali e sulla sua conseguente maggior stabilità (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	156
LAUDI G., Dimostrazione dell'esistenza, in tessuti caratteristici di piante superiori ed in piante inferiori, della via ossidoriduttiva: trifosfopiridinnucleotide-glutatione-ascorbico (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	164
RANZOLI F., Osservazioni preliminari sulle cellule vitelline e gli ovociti di « Fasciola hepatica » L. (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i>)	171
ALIBRANDI G., Sulla determinazione del grado di disposizione verso l'epilessia sperimentale riflessa (pres. dal Socio <i>C. Ciaccio</i>)	178
ARCHETTI I., FELICI A., MIGLIORI V. e RUSSI F., Sulla etiologia virale di una meningoencefalite benigna riscontrata nelle Marche (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i>)	180
MALTESE C. e POLLICITA M., Azione di frazioni di estratti embrionali di « Bufo » su larve ed espianti di Urodeli e di « Discoglossus » (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	181
DURANTE M., Su trapianti xenoplastici di arto (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	185
ZORZOLI G. C., Ricerche istochimiche sul pigmento delle cellule nervose del « Thalamus » di Uomo (pres. dal Socio <i>A. Pensa</i>)	189

FASCICOLO 5.

NOVEMBRE 1955.

NOTE DI SOCI

PICONE M. e GHIZZETTI A., Integrazione dei sistemi degeneri di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag. 195
SEGRE B., Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota I	200
SCORZA DRAGONI G., Un'osservazione sul lemma di Sperner	204
BOMPIANI E., Sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo	207

FANTAPPIÈ L., Costruzione di un sistema fondamentale di operatori fisici differenziali, per ogni universo a gruppo base semplice	Pag. 213
ZAGAR F., Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana. Nota III	217
BONINO G. B. e MARINANGELI A. M., Ricerche preliminari sullo spettro ultravioletto di assorbimento di derivati carbonilici del pirrolo (pres. dal Socio G. B. Bonino)	222
NATTA G. e CORRADINI P., Polimeri cristallini del butadiene e struttura del 1-2-poli-butadiene (pres. dal Socio G. Natta)	229

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PINI B., Osservazioni su un problema generalizzato di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine ellittiche e paraboliche (pres. dal Socio M. Picone)	Pag. 237
CONTI R., Sulla t -similitudine tra matrici e la stabilità dei sistemi differenziali lineari (pres. dal Socio G. Sansone)	247
SABAN G., Sul teorema dei quattro vertici (pres. dal Socio B. Segre)	251
COSSU A., Sulle connessioni tensoriali integrabili (pres. dal Socio E. Bompiani)	258
GODEAUX L., Il teorema di Picard sulla regolarità del sistema aggiunto (pres. dal Socio B. Segre)	265
CIARRAPICO L., Sulla permutabilità di due trasformazioni della contiguità negli spazi topologici (pres. dal Socio E. Bompiani)	267
FORTINI T., La fase decrescente dell'ultimo ciclo solare secondo le misure effettuate nell'Osservatorio Astronomico di Roma (pres. dal Socio G. Armellini)	272
GIANNUZZI M. A., Sulla variabilità del raggio solare (pres. dal Socio G. Armellini)	277
MICHARD R. e LABORDE G., Spectrophotométrie des raies d'émission intenses de la chromosphère solaire. — La raie H_{α} (pres. dal Socio G. Abetti)	283
MARTINI A. e MASANI A., Sul gradiente adiabatico di un miscuglio di elio e radiazione (pres. dal Corrisp. F. Zagar)	292
MARUSSI A., In risposta ad una Nota di Corradino Mineo (pres. dal Socio G. Cassinis)	294
BERNARDINI C., Sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio di un filo, percorso da corrente, in campo magnetico (pres. dal Socio E. Persico)	297
KRANJC A., Sul profilo strumentale teorico d'uno spettrografo astronomico (pres. dal Corrisp. F. Zagar)	301
IANDELLI A., Legami covalenti nei composti intermetallici. I composti PrGe e CaGe (pres. dal Socio L. Rolla)	307
RANZOLI F., Rigenerazione e azione toracizzante nel polichete ermafrodita « Salma-cina incrustans » (pres. dal Corrisp. U. D'Ancona)	313
MARRÈ E. e ARRIGONI O., Auxine, Antiauxine e ossidazione dell'acido ascorbico in preparati mitocondriali di « Pisum sativum » (pres. dal Socio S. Tonzig)	320
ALIBRANDI G., Colina e sviluppo sessuale del pollo (pres. dal Socio C. Ciaccio)	324
MORUZZI G. e POMPEIANO O., La inibizione propriocettiva riflessa come causa dell'atonía fastigiale (pres. dal Socio G. C. Pupilli)	326
CREPAX P. e FADIGA E., Modificazioni dell'elettroencefalogramma di Cane per effetto dell'applicazione di stimoli chimici sulla corteccia degli emisferi cerebellari (pres. dal Socio G. C. Pupilli)	331
INFANTELLINA F., Analisi degli effetti provocati dall'acetilcolina nella corteccia cerebrale isolata (pres. dal Socio G. C. Pupilli)	335
MESSERI E., Nascita ed adattamento all'ambiente. Nota I (pres. dal Socio C. Ciaccio)	340
PERRI T., Induzione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris » mediante sostanze citolitiche (trapianti da embrioni di « Rana esculenta », impianti di frammenti di rene cotto) (pres. dal Socio C. Cotronei)	345
Personale accademico	349
Comunicazioni varie	349

Plichi suggellati	Pag. 349
Presentazione di libri	350
Congressi	350
Presentazione di Note e Memorie	352
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 12 novembre 1955	354

FASCICOLO 6.

DICEMBRE 1955.

NOTE DI SOCI

SEGRE B., Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota II	Pag. 357
BOMPIANI E., Ancora sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo	361
FANTAPPIÈ L., Deduzione autonoma dell'equazione generalizzata di Schrödinger, nella teoria di relatività finale	367
KRALL G., Sul problema centrale della dinamica sui ponti. Nota I	373
CHAMBERLAIN O., CHUPP W. W., GOLDBABER G., SEGRÈ E., WIEGAND C., e di AMAI DI E., BARONI G., CASTAGNOLI C., FRANZINETTI C. MANFREDINI A., Su di una stella provocata da un antiprotone osservata in emulsioni nucleari (pres. dal Socio <i>E. Amaldi</i>)	381
BONINO G. B. e FABBRI G., Sullo spettro di assorbimento nell'ultravioletto del ferro-cianuro di potassio (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	386
BONINO G. B. e MARINANGELI A. M., Sullo spettro ultravioletto di assorbimento della 2·4·dimetil·5·pirrolaldeide e della 2·4·dimetil·3·etil·5·pirrolaldeide (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	393
NATTA G., PINO P., MAZZANTI G., CORRADINI P. e GIANNINI U., Sintesi e proprietà di alti polimeri cristallini di alcune α -olefine a catena ramificata (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>)	397
NATTA G., CORRADINI P. e BASSI I. W., Struttura cristallina di alcune poli-alfa-olefine isotattiche (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>)	404

NOTE PRESENTATE DA SOCI

FICHERA G., Su un principio di dualità per talune formole di maggiorazione relative alle equazioni differenziali (pres. dal Corrisp. <i>G. Scorza Dragoni</i>)	Pag. 411
DENNISTON R. H. F., Sui numeri di Betti delle varietà razionali (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	418
COSSU A., Connessioni tensoriali per tensori doppi misti (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>)	421
VESENTINI E., Sugli jacobiani di funzioni meromorfe sopra una varietà complessa compatta (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	428
BOURGIN D. G., Un indice dei punti uniti. Nota I (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	435
VÁLCOVICI V., Sur les principes de Hamilton et de la moindre action (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i>)	441
MARTIN E. L., Orbite anapsidali in sistemi binari di massa variabile (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	449
CORRADINI P. e PASQUON I., Sulla forma geometrica delle catene spiralizzate dei polimeri isotattici cristallini (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>)	453

MARRÈ E., LAUDI G. e ARRIGONI O., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. XV. - Azione inibente dell'acido deidroascorbico sull'attività deidrogenasica di preparati enzimatici vegetali (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	Pag. 460
MESSERI E., Le cure parentali in relazione all'ambiente. Nota II (pres. dal Socio <i>C. Ciaccio</i>)	466
MORUZZI G. e POMPEIANO O., Soppressione dell'atonia fastigiale del Gatto decerebrato mediante sezione del N. VIII contralaterale (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>) . . .	471
INFANTELLINA F., Effetti della stricnina sulla risposta della corteccia cerebrale isolata alla stimolazione singola e a quella iterativa (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>) . .	475
CREPAX P. e INFANTELLINA F., Effetti della morfina applicata localmente sul lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	481
SALA M., Caudalizzazione di materiale neurale prosencefalico indotta dall'area posteriore della placca neurale in Anfibi Urodeli (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i>) .	485
FISCHIAROLO G., Risultati di asportazione di territori vegetativi nella blastula e nella gastrula di Anfibi Anuri (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	493
SACCÀ G. e RIVOSECCHI L., Una nuova sottospecie di « <i>Musca domestica</i> » L. della regione etiopica (pres. dal Socio <i>D. Marotta</i>)	497
GHIRARDELLI E., Studi sul determinante germinale (d. g.) nei Chetognati: Effetti della centrifugazione delle uova e azione del LiCl ed NaSCN (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	498

COMMEMORAZIONI

CALOI P., Commemorazione del Socio Mario Tenani	Pag. 503
Personale accademico	507
Comunicazioni varie.	508
Plichi suggellati	510
Congressi	510
Presentazione di libri	510
Presentazione di Note e Memorie	512
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 dicembre 1955	513
Indice per Autori	519
Indice per materie	523
Indici dei fascicoli	527

